

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотренные выше соотношения справедливы для любых типов невосстанавливаемых изделий, законы распределения показателей надежности которых, заранее известны. Однако применимость их для расчета показателей надежности полупроводниковых приборов и ИМС а так же для прогнозирования деградации последних на длительный период ограничена. Это связано с тем, что полупроводниковые приборы и микросхемы имеют сравнительно высокую надежность и их отказы являются весьма редким событием. Поэтому для получения достаточно достоверной информации при проведении расчетов показателей надежности, необходимо проводить длительные испытания (в течение десятков и сотен тысяч часов). Кроме того, отсутствие данных о законах распределения отказов не позволяют распространять результаты расчетов показателей надежности за пределы временных испытаний и прогнозировать надежность приборов на длительный период. Указанные обстоятельства вызывают необходимость полученные в результате испытаний распределения наработки до отказа аппроксимировать эмпирически математическими выражениями, либо использовать для описания экспериментальных данных известные законы распределения случайных величин, под которыми понимаются соответствие между возможными значениями случайных величин и их вероятностями.

Биномиальный закон.

Биномиальный закон распределения характеризует вероятность появления события A n раз в m независимых испытаниях. Если вероятность появления события A в одном опыте равна r (соответственно вероятность его не появления равна $1 - r = f$), а число независимых испытаний равно m , то вероятность появления события A n раз в серии m испытаний R_m^n может быть представлена математической формулой биномиального закона распределения следующим образом

$$R_m^n = C_m^n r^n (1 - r)^{m-n}, \quad (3.1)$$

где C_m^n - число сочетаний m по n , равное $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Биномиальный закон распределения назван потому, что правую часть равенства (3.1) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона. Биномиальный закон распределения применяется при статическом контроле при ограниченной

информации о свойствах приборов, которые необходимо расклассифицировать на годные и дефектные.

Гипергеометрический закон.

Пусть в партии изделий объемом N имеется F дефектных. Если взять из всей этой партии методом случайного отбора выборку объемом n , то вероятность того, что во взятой нами выборке окажется f дефектных изделий, в общем случае описывается гипергеометрическим законом

$$R_{nf} = \frac{C_F^f C_{N-F}^{n-f}}{C_N^n}. \quad (3.2)$$

Закон Пуассона.

Распределение по закону Пуассона обычно применяется для определения вероятности появления заданного числа независимых и несовместимых событий на заданном интервале времени. Вероятность возникновения события A не менее n раз в интервале времени τ по закону Пуассона задается выражением

$$R_n(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} \exp(-\lambda\tau), \quad (3.3)$$

где $\lambda\tau$ - положительный параметр ($\lambda\tau > 1$), представляющий собой среднее число отсчетов за рассматриваемый интервал времени, а n - обычная факториальная целочисленная функция.

Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального распределения при неограниченном возрастании числа испытаний.

Нормальный закон распределения (закон Гаусса).

В наиболее общем виде этот закон называют предельным в силу того, что к нему приближаются другие законы распределения непрерывных случайных величин и даже сочетания этих законов при определенных часто встречающихся на практике условиях. При нормальном распределении случайная величина может принимать любые значения в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Распределение случайной величины всегда подчиняется нормальному закону, если она зависит от большого числа однородных по своему воздействию факторов. Причем влияние каждого из них по сравнению со всей их совокупностью незначительно. В общем случае выражение для плотности распределения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{(t - M[t])^2}{2\sigma^2(t)}\right\}, \quad (3.4)$$

где $\sigma(t)$ - среднее квадратическое отклонение наработки до отказа, $M[t]$ - математическое ожидание наработки до отказа (средняя наработка до отказа).

Кривая нормального распределения имеет колоколообразный вид симметричный относительно центра рассеяния в точке $M[t] = T_0$. Если изменять положение центра рассеяния, т.е. изменять величину $M[t]$, не изменяя среднего квадратичного отклонения, то кривая будет смещаться вдоль оси времени без изменения своей формы (рис. 3.1).

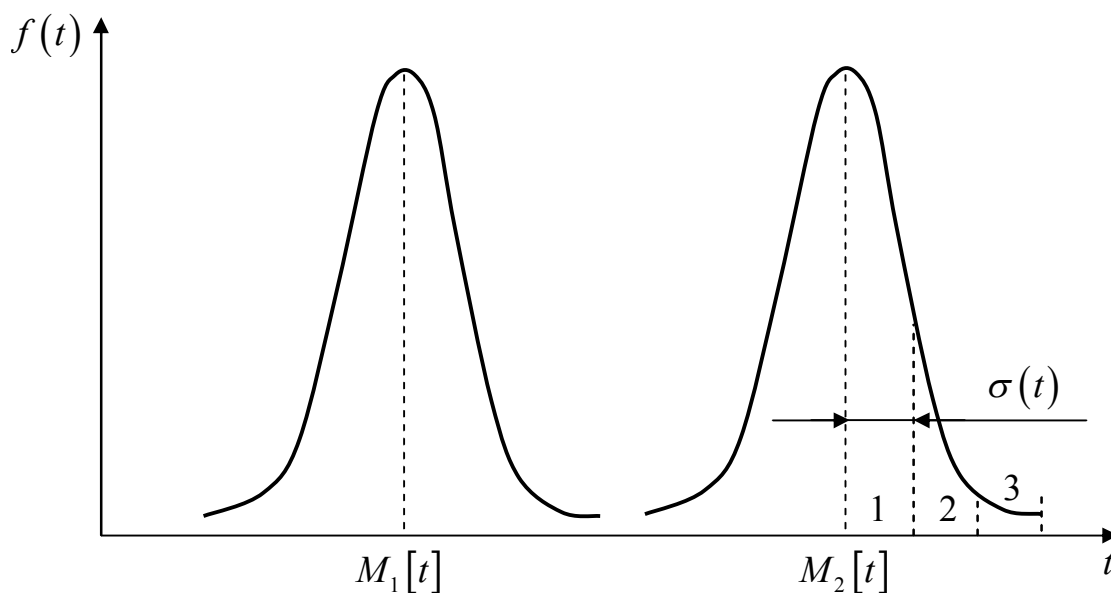


Рис. 3.1.

Расчеты показывают, что вероятность нахождения значения нормально распределенной величины в интервале 1 длиной $\sigma(t)$, расположенной вправо от центра рассеяния, равна 34%, а в интервалах 2 и 3 той же длины, соответственно 14% и 2%. Аналогичные значения вероятности получаются и в случае расположения интервалов длиной $\sigma(t)$ влево от центра рассеяния в силу симметричности кривой распределения. Другими словами 50% возможных отклонений находятся вправо от центра рассеяния на длине $3\sigma(t)$ и 50% значений отклонения укладываются на участке $3\sigma(t)$ с левой стороны. Из сказанного выше следует, что при нормальном распределении весь разброс значений случайной величины практически заключен в интервале времени $M[t] - 3\sigma(t) \leq t \leq M[t] + 3\sigma(t)$.

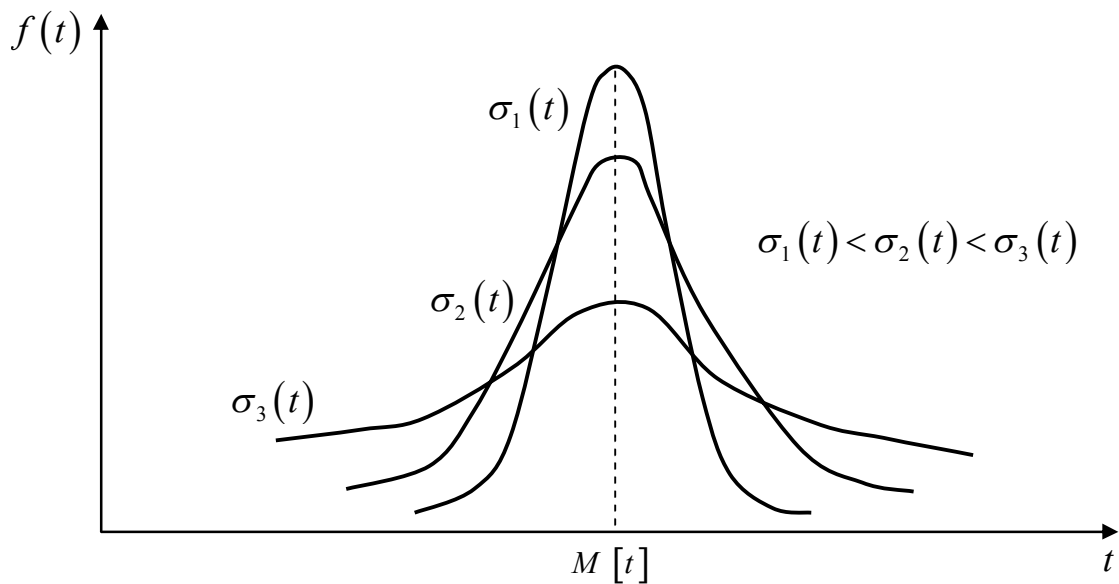


Рис. 3.2.

Параметр $\sigma(t)$ характеризует форму кривой распределения. Из выражения (3.4) видно, что наибольшая ордината кривой распределения, равная $[\sigma(t)\sqrt{2\pi}]^{-1}$, обратно пропорциональна $\sigma(t)$. Поскольку площадь под кривой всегда равна единице, то при различных значениях $\sigma(t)$ происходит трансформация кривой распределения согласно рис. 3.2.

Вероятность безотказной работы при нормальном распределении записывается выражением

$$R(t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} \exp\left\{-\frac{(t-M[t])^2}{2\sigma^2(t)}\right\} dt. \quad (3.5)$$

Рассмотренное распределение чаще всего используется для описания отказов. Вызванных постепенным изменением параметров приборов, а также при оценке надежности элементов на стадии старения. Кроме того, нормальному закону, как правило, подчиняются распределения электрических параметров полупроводниковых приборов и ИМС.

Логарифмически нормальное распределение.

В ряде случаев для представления распределения показателей надежности приборов на начальном этапе эксплуатации используют логарифмически нормальное распределение, при котором логарифм случайной величины подчиняется нормальному закону распределения. В этом случае выражение для плотности вероятности имеет вид

$$f(t) = \frac{\lg e}{t\sigma(z)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[z - M(z)]^2}{2\sigma^2(z)} \right\}, \quad (3.6)$$

где z - десятичный логарифм исследуемой случайной величины (в данном случае логарифм случайной наработки до отказа), $M(z)$ - математическое ожидание логарифма наработки до отказа, $\sigma(z)$ - среднее квадратическое отклонение величины z .

Среднее время безотказной работы при логарифмически нормальном распределении рассчитывается по формуле

$$T_0 = \exp \left[M(z) + \frac{\sigma^2(z)}{2} \right]. \quad (3.7)$$

Распределение Вейбулла – Гнеденко.

Для описания показателей надежности полупроводниковых приборов и ИМС на начальном этапе эксплуатации часто используется распределение Вейбулла – Гнеденко, характеризуемое двумя параметрами: параметром масштаба a и параметром формы b . Показатели надежности определяются следующими выражениями:

вероятность безотказной работы

$$R(t) = \exp \left(-\frac{t^b}{a} \right), \quad (3.8)$$

плотность вероятности отказов

$$f(t) = \frac{b}{a} t^{b-1} \exp \left(-\frac{t^b}{a} \right), \quad (3.9)$$

интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{b}{a} t^{b-1}. \quad (3.10)$$

Особенностью этого распределения является то, что с изменением параметра формы b , изменяется, и характер зависимости показателей надежности от времени. Так, например, для $b < 1$ интенсивность отказов будет монотонно убывающей функцией, а при $b > 1$ - монотонно возрастающей. Данное свойство распределения позволяет соответствующим подбором параметров a и b обеспечить хорошее совпадение результатов опытных данных с аналитическими выражениями показателей распределения. Так при постоянной величине a кривые распределения плотности вероятности от времени при различных значениях b будут иметь вид показанный на рис. 3.3. Большинство полупроводниковых приборов и ИМС на начальном периоде времени эксплуатации имеет распределение наработки до отказа, подчиняющееся закону

Вейбулла – Гнеденко, с показателем формы b меньше или близким к единице.

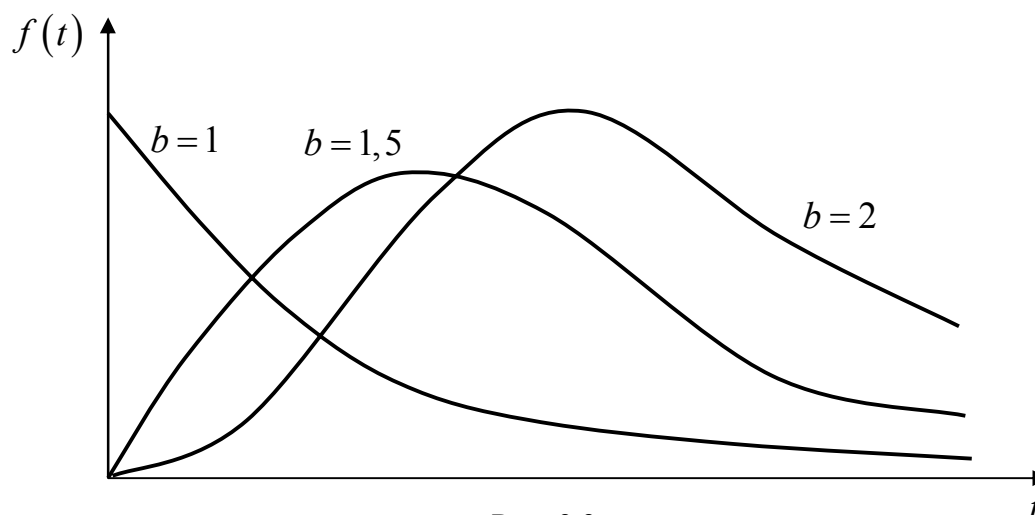


Рис. 3.3.

Экспоненциальный закон.

Наибольшую популярность и широкое применение в теории и практике надежности нашло так называемое экспоненциальное распределение. Его специфической особенностью является постоянство интенсивности отказов во времени.

Для данного распределения вероятность безотказной работы задается выражением

$$R(t) = \exp(-\lambda t). \quad (3.11.)$$

Последнее выражение можно получить из формулы (2.12), если в ней положить $\lambda = const$. В случаях, когда $\lambda t < 0,1$, можно использовать упрощенное выражение для $R(t)$, разложив (3.11) в степенной ряд и

взяв два первых члена разложения:

$$R(t) = 1 + \frac{-\lambda t}{1!} + \dots \approx 1 - \lambda t. \quad (3.12)$$

Воспользовавшись равенством (3.12), получим для вероятности наступления отказа

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - \exp(-\lambda t) = \lambda t; \quad (3.13)$$

плотности вероятности отказа

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda \exp(-\lambda t) \approx \lambda (1 - \lambda t); \quad (3.14)$$

средней наработке до отказа

$$T_0 = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.15)$$

Графически все эти функции показаны на рис. 3.4.

$R(t), f(t), \lambda(t), F(t)$

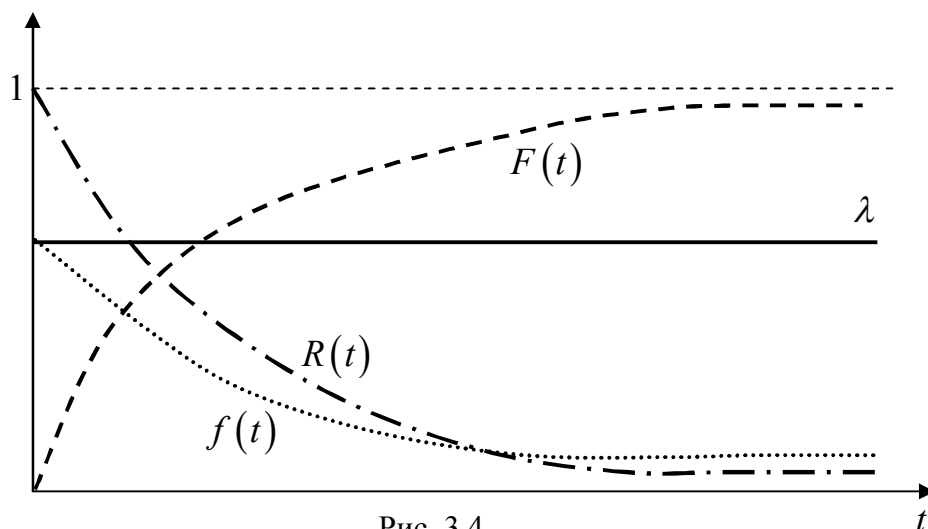


Рис. 3.4.

В качестве примера, для экспоненциального закона распределения при $\lambda_{\text{э}} = 10^{-7} \text{ ч}^{-1}$ и количестве элементов $n = 1000$ в изделии получим следующие результаты расчета показателей надежности, которые приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Исходные данные и показатели надежности	Расчетные формулы	Число элементов, значения показателей
Количество элементов n в аппаратуре, шт.	-----	1000
Интенсивность отказа одного элемента $\lambda_{\text{э}}, \text{ ч}^{-1}$.	-----	10^{-7}
Средняя наработка элемента до отказа $T_{0\text{э}}, \text{ ч}$.	$T_{0\text{э}} = \lambda_{\text{э}}^{-1}$	10^7
Интенсивность отказа аппаратуры $\lambda, \text{ ч}^{-1}$.	$\lambda = n\lambda_{\text{э}}$	10^{-4}
Средняя наработка аппаратуры до отказа $T_0, \text{ ч}$.	$T_0 = \lambda^{-1}$	10^4