Лабораторная работа № 7. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1.Обработка рядов равноточных и неравноточных измерений

Задача 1. Обработка ряд шести равноточных измерений горизонтального угла, выполненных теодолитом Т15. Результаты измерений приведены по вариантам в табл. 1.1.

Таблица 1.1. **Исходные данные к задаче 1 по вариантам**

№ п.п.	Варианты						
	1	2	3	4	5	6	7
1	$63^0$24,5	$75^0$32,3	$103^0$15,6	$35^0$16,1	$25^0$26,0	$14^0$13,6	$12^0$32,0
2	25,1	32,3	15,7	16,8	26,5	13,5	31,5
3	24,9	31,7	15,8	16,3	26,8	13,4	32,1
4	24,8	32,0	15,8	16,9	26,9	13,9	31,7
5	25,6	31,5	15,9	16,7	26,3	13,5	32,0
6	24,8	32,0	15,2	16,5	26,0	13,6	31,6
	8	9	10	11	12	13	14
1	$54^0$16,7	$61^0$25,1	$52^0$13,4	$71^0$26,1	$89^0$13,0	$18^0$12,4	$48^0$41,0
2	16,8	24,8	13,6	25,8	13,4	12,9	40,5
3	16,5	24,7	13,5	25,5	13,8	13,0	40,6
4	16,4	25,3	13,8	26,1	13,5	12,5	41,2
5	16,2	24,9	13,4	25,5	13,3	12,6	41,1
6	16,3	25,0	13,3	26,0	13,2	12,7	40,8

Решение задачи представить в идее табл. 1.2, иллюстрирующей решение на примере.

Пояснения к решению задачи 1

Обработка ряда равноточных измерений заключается в следующем:

1. Вычисление вероятнейшего (наиболее надежного) значения Х измеренной величины;

2. Определение средней квадратической погрешности одного результата измерения;

3. Определение средней квадратической погрешности вероятнейшего значения.

Если имеется ряд равноточных измерений $l_1, l_2, \ldots l_n$ одной и той же величины, то вероятнейшим значением измеренной величины будет среднее арифметическое из этих измерений

$$\bar{x} = \frac{[l]}{n}, \qquad (1.1)$$

где квадратными скобками обозначена сумма измерений l_{in} по Гауссу.

Средняя квадратическая погрешность одного измерения вычисляется по формуле Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \qquad (1.2)$$

где $v_i = l_i - \bar{x}$, а средняя квадратическая погрешность вероятнейшего значения – по формуле

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (1.3)$$

Таблица 1.2. **Обработка ряда равноточных измерений**

№ п.п.	l	ε	εv	v	v²	Решение
1	$67^0 13,0$	+1,0	–0,1	+0,1	0,01	Контроль: $[v^2] = -[v\varepsilon] + (\bar{x} - l_0)[v]$
2	12,9	+0,9	0,0	0	0	$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,31}{5}} = 0',25$
3	12,8	+0,8	+0,08	+0,1	0,01	
4	12,5	+0,5	+0,20	+0,4	0,16	$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0,25}{\sqrt{6}} = 0',10$
5	13,1	+1,1	–0,22	0,2	0,04	
6	13,2	+1,2	–0,36	–0,3	0,09	Ответ: $\bar{x} = 67^0 12,'9$
	$67^0 12,0$	+5,5	–0,40	–0,6	0,31	$m_{\bar{x}} = 0,'10$
	0,9			+0,5		
	$67^0 12,9$			–0,1		

Примечание. $[v] \neq 0$, так как при вычислении x значение $\frac{[\varepsilon]}{n}$ взято с округлением до десятых.

При решении этой задачи, а также и последующих аналогичных ей, следует придерживаться необходимой точности вычислений. Так, в данном случае из-за погрешностей, вызываемых округлениями, вычисления промежуточных величин ε^2, v, v^2 и их сумм необходимо вести с большим на одну количеством значащих цифр по сравнению с исходными данными. если в задаче исходные данные приведены с точностью до десятых, то промежуточные вычисления ведут с точностью до сотых. Значение $\bar{x}$ можно записать с точностью до десятых, а $m_{\bar{x}}$ – с точностью до сотых единиц.

Для удобства расчетов значение $\bar{x}$ вычисляют по формуле

$$\bar{x} = l_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{1.4}$$

где $\varepsilon = l_i - l_0$, а l_0 – произвольное значение (в данном случае наименьшее из всех и округленное для упрощения расчетов до целых единиц).

Формулы (1.1) и (1.4) идентичны. Пример решения задачи приведен в табл. 1.2.

Задача 2. Обработать ряд неравноточных измерений, представляющих собой значения отметок (высот) узловой точки А нивелирной сети (рис. 1.1), полученных от шести исходных реперов со средними квадратическими погрешностями, равными соотвественно: m_1 = 5,0 мм, m_2 = 6,0 мм, m_3 =7,0 мм, m_4 =8,0 мм, m_5 = 9,0 мм, m_6 = 5,0 мм. Значения отметок приведены по вариантам в табл. 1.3. Решение задачи представить в виде табл. 1.4, иллюстрирующих решение на примере.

Таблица 1.3. **Исходные данные к задаче 2 по вариантам**

№ п.п	Варианты						
	1	2	3	4	5	6	7
1	68,151	63,181	93,113	89,351	78,161	92,823	84,516
2	148	179	110	352	166	827	510
3	155	180	105	348	173	830	511
4	160	189	106	357	171	831	510
5	158	185	109	349	160	826	514
6	152	184	114	353	165	829	518
	8	9	10	11	12	13	14
1	52,106	49,537	37,981	56,173	48,461	93,106	92,110
2	103	539	980	170	460	101	106
3	107	540	985	176	453	110	107
4	109	531	984	180	457	108	108
5	116	531	987	177	453	104	103
6	108	532	983	179	457	105	101

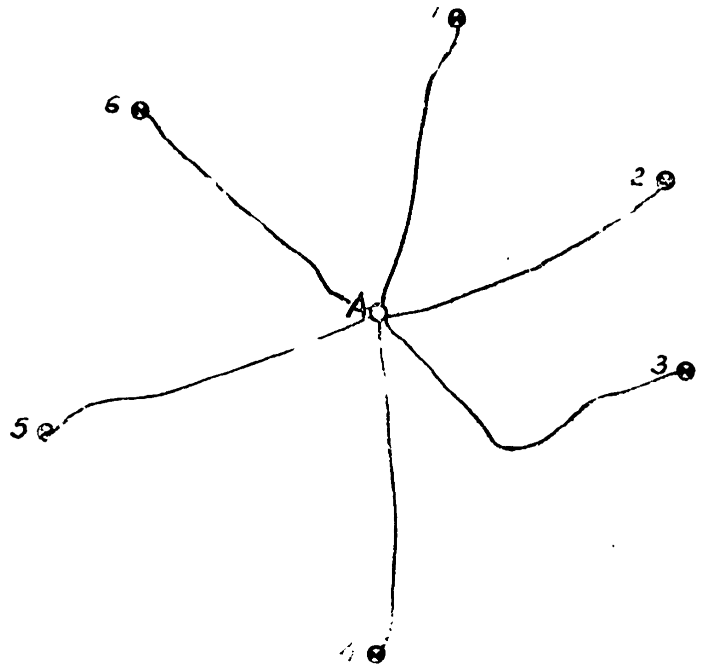

Рис. 1.1. Схема сети

Пояснения к решению задачи 2

Цели обработки ряда неравноточных измерений аналогичны целям задачи 1, в которой обрабатывался ряд равноточных измерений. Однако здесь вместо определения средней квадратической погрешности одного результата измерения определяется такая же величина измерения, вес которого равен единице.

Вес результата измерения P – величина, характеризующая точность измерения, всегда обратно пропорциональна квадрату средней квадратической погрешности измерения m^2

$$p = \frac{c}{m^2}, \qquad (1.5)$$

где c – постоянная величина.

Если имеется ряд неравноточных измерений $l_1, l_2, \dots, l_n$ одной и той же величины с весами $P_1, P_2, \dots, P_n$, то вероятнейшим значением измеренной величины будет общая арифметическая средина, вычисляемая по формуле

$$\bar{x} = \frac{[pl]}{p}. \tag{1.6}$$

Для удобства выполнения расчетов используют по аналогии с задачей 1 следующую формулу:

$$\bar{x} = l_0 + \frac{[\varepsilon p]}{p}, \tag{1.7}$$

которая полностью идентична (1.6). средняя квадратическая погрешность измерения, вес которого равен единице, вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \tag{1.8}$$

а средняя квадратическая погрешность вероятнейшего значения – по формуле

$$m_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \tag{1.9}$$

Порядок решения задачи показан на примере (табл. 1.4).

Замечания по задаче 2

Часто в геодезической практике обработки неравноточных измерений веса длин линий, углов и превышений ставятся не в зависимости от средних квадратических погрешностей в соотвествии с формулой (1.5), а в зависимости от длин линий, числа приемов и длин нивелирных ходов. Так, вес измеренной длины линии D в этом случае будет $p_D = \frac{c}{D}$, измеренного n приемами угла β:$p_\beta = n$, а вес нивелирного хода длины $L: p_L = \frac{c}{L}$, где c – также постоянная величина. Отсюда следует, что чем больше длина линии или нивелирного хода, тем больше погрешностей будет накапливаться при их измерениях и тем меньше будет из вес, и наоборот, чем большим числом приемов будет измерен угол, тем больше будет его вес. Это следует хорошо помнить при решении задач, аналогичных рассмотренной здесь.

1.2. Оценка точности функций измеренных величин

Задача 3. Вычислить среднюю квадратическую погрешность функции измеренных величин. Условия задачи и исходные данные приведены ниже для каждого варианта, причем номер задачи соответствует номеру варианта.

Условия задачи 3 по вариантам и исходные данные

1. Вычислить значения и среднюю квадратическую погрешность МО вертикального круга теодолита Т30, если отсчеты по вертикальному кругу взяты со средней квадратической погрешностью, равной 1′ и составляют при КП=356^{0}29, КЛ=3^{0}02.

2. Известен магнитный азимут линии 1 – 2 $А_м$=350^{0}06 со средней квадратической погрешностью m_A=1′, склонение магнитной стрелки и сближение меридианов в точке 1 δ_1=–1^{0}03, γ_1 = +2^{0}51 и их соответствующие погрешности m_δ = 3′, m_γ = 2. Вычислить дирекционный угол стороны 1-2 и его среднюю квадратическую погрешность.

3. Известна наклонная длина линии 1–2 D=316,56 м со средней квадратической погрешностью m_D = 0,05 м, угол наклона v =+6^{0}00 и его средняя квадратическая погрешность m_v = 2. Найти горизонтальное расстояние линии и среднюю квадратическую погрешность.

4. Измеренные углы замкнутого пятиугольного теодолитного хода получились равными 100^{0}26, 120^{0}04, 36^{0}17, 161^{0}25, 122^{0}06. Средняя квадратическая погрешность каждого из них m_β=1′. Вычислить сумму углов теодолитного хода и ее среднюю квадратическую погрешность.

5. Горизонтальное проложение S линии 1–2 равно 326,71 м, ее средняя квадратическая погрешность m_s = 0,06 м. Дирекционный угол этой линии равен 217^{0}53, а средняя квадратическая погрешность его составляет 6′. Вычислить приращение координат Δx и его среднюю квадратическую погрешность.

6. При геометрическом нивелировании способом из средины превышение получено как среднее из значений, измеренных по красной и черной сторонам реек. Средняя квадратическая погрешность снятия отсчета по рейке равна 1 мм. Найти среднюю квадратическую погрешность превышения.

7. При выполнении тригонометричекого нивелирования линии 1–2 угол наклона ν получится равным $+10^0 21$, высота прибора и точки визирования соотвественно i=1,36 мм, v = 2,00 м, горизонтальное расстояние между этими точками S равно 101,65 м. Средние квадратические погрешности перечисленных величин равны соответственно: $m_v=1'$, $m_i=m_v=1$ см, $m_s=0{,}05$ м. Вычислить превышение между точками 1 и 2 и его среднюю квадратическую погрешность.

8. Высоты точек 1 и 2 равны соответственно $H_1=100{,}65$ м, $H_2=1066{,}53$, горизонтальное расстояние s между ними 365,4 м. Средние квадратические погрешности этих величин следующие: $m_{H1}=m_{H2}=0.03$ м, $m_s = 0{,}1$ м. Вычислить уклон линии 1–2 и его среднюю квадратическую погрешность.

9. Отметка H репера равна 166,351 м, отсчет a по рейке, поставленной на него, 436 мм. Средние квадратические погрешности этих величин такие: m_H =5 мм, m_a = 1 мм. Вычислить горизонт прибора и его среднюю квадратическую погрешность.

10. Горизонтальное проложение S линии 1–2 равно 626,35 м, его средняя квадратическая погрешность $m_s = 0{,}06$ м. Дирекционный угол этой линии равен $317^0 53$, а средняя квадратическая погрешноть его составляет 6′. Вычислить приращение координат Δy и его среднюю квадратическую погрешность.

11.Горизонт прибора (ГП) на станции при геометрическом нивелировании равен 136,753 м, отсчет на промежуточную точку с этой станции $a_{пр}$=1236 мм. Средние квадратические погрешности этих величин составляют $m_{ГП}$ = 4 мм, m_a = 1 мм. Найти отметку промежуточной точки и ее среднюю квадратическую погрешность.

12. Отсчеты по верхней и нижней дальномерным нитям составляют $a_в$ = 1263 мм, a_H =0769 мм коэффициент нитяного дальномера С равен 100. Средние квадратические погрешности этих величин такие: $m_{a_B} = m_{a_н} = 1$ мм, m_c = 0,3. Вычислить длину измеряемой линии и ее среднюю квадратическую погрешность.

13. В треугольнике измерено два угла: $\alpha = 36^0 56'$, $\beta = 96^0 11'$ со средними квадратическими погрешностями $m_\alpha = m_\beta = 1'$. Вычислить значение и среднюю квадратическую погрешность третьего угла треугольника.

14. Дирекционный угол некоторой линии вычислен по исходному дирекционному углу $\alpha_{исх}=326^0 53$ и двум правым по ходу измеренным углам $\beta_1=326^0 53$, $\beta_2=114^0 34$. Средние квадратические погрешности

этих величин такие: $m_\alpha=3'$, $m_{\beta1}= m_{\beta2}=1'$. Вычислить этот дирекционный угол и его среднюю квадратическую погрешность.

Пояснения к решению задачи 3.

Несмотря на различие условий задачи для приведенных вариантов порядок решения их общий. Он заключается в следующем:

1. Необходимо выразить условие задачи в виде функции, т.е. представить искомую по условию величину y в математической зависимости от исходных данных x_1, x_2,…,x_n

$$y = f\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right). \qquad (1.10)$$

2. Вычислить среднюю квадратическую погрешность функции по формуле

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot m_{x_n}^2}\ , \qquad (1.11)$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ – частные производные функции (1.10) по каждому из аргументов, вычисляемые по их измеренным значениям.

В таблице 1.5 приведены примеры вычисленных средних квадратических погрешностей некоторых простейших функций измеренных величин.

Таблица 1.5. **Вычисление средних квадратических погрешностей простейших функций измеренных величин**

№ п.п	Вид функции	Средняя квадратическая погрешность функции
1	$y = x_1 \pm x_2$	$m_y^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2$
2	$y = x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$	$m_y^2 = m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \dots + m_{xn}^2$
3	$y = k \cdot x$	$m_y^2 = k^2 \cdot m_x^2$
4	$y = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_n x_n$	$m_y^2 = k^2 \cdot m_x^2 + k_2^2 m_{x_2}^2 + \dots + k_n^2 \cdot m_{xn}^2$

Следующим примером иллюстрируется решение задачи 3.

Пример. Вычислить длину стороны b треугольника ABC (рис. 1.2) и среднюю квадратическую погрешность ее определения, если измерены углы A=63⁰20′ и B=36⁰53′ с одинаковой средней квадратической погрешностью $m_A = m_B = 1'$ и длина стороны а = 163,53 м со средней квадратической погрешностью m_a= 0,05 м.

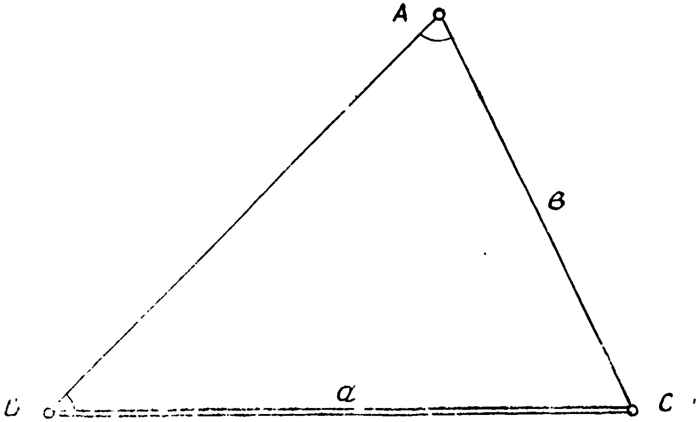

Рис. 1.2. Решение треугольника

1. Искомую длину стороны b представляют в математической зависимости от углов А, В и стороны а. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin b}.$$

Отсюда

$$b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}. \qquad (1.12)$$

Подставляя численные значения в (1.12), получим

$$b = \frac{163{,}53 \cdot \sin 36^0 53'}{\sin 63^0 20'} = 109{,}83 \text{ м}.$$

2. По формуле (1.11) находят среднюю квадратическую погрешность функции. Условно можно принять b=y, a=x_1, B=x_2, C=x_3.

Тогда

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}&=\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{\sin B}{\sin A}=0{,}672,\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}&=\frac{\partial b}{\partial B}=\frac{a\cdot\cos B}{\sin A}=194{,}8\\ \frac{\partial f}{\partial x_3}&=\frac{\partial b}{\partial A}=-\frac{a\cdot\sin B\cdot\cos A}{(\sin A)^2}=-109{,}3\end{aligned}\right\}$$

С учетом (1.13) выражение (1.11) для данного случая примет вид:

$$m_y=m_b=\sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2 m_a^2+\left(\frac{\partial b}{\partial B}\right)^2 m_B^2+\left(\frac{\partial b}{\partial A}\right)^2 m_A^2}. \qquad (1.14)$$

в (1.14) m_B и m_A выражается в радианах. По условию задачи погрешности углов выражены в минутах. Поэтому

$$\left.\begin{aligned}m_A&=\frac{m'_A}{\rho'}\\ m_B&=\frac{m'_B}{\rho'}\end{aligned}\right\}, \qquad (1.15)$$

где $\rho'=3438'$.

С учетом (1.13), (1.15) выражение (1.14) в числовом виде будет следующим:

$$m_b=\sqrt{(0{,}672)^2\cdot(0{,}05)^2+\left(\frac{194{,}8}{3438}\right)^2\cdot(1)^2+\left(-\frac{109{,}3}{3438}\right)^2\cdot(1)^2}=0{,}073\text{м}$$

Ответ: B=109,83±0,07 м.

Решение задачи 3 представить в приведенном для данного примера виде.