Д.В.Штеренлихт

ГИДРАВЛИКА

В ДВУХ КНИГАХ

КНИГА 1

Допущено Государственным Комитетом СССР по народному образованию в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Гидромелиорация»

2-е издание, переработанное
и дополненное

МОСКВА ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ 1991

ББК 30.123
Ш 90
УДК 532.5 (075.8)

Рецензент: Кафедра гидравлики Ленинградского государственного технического университета (заведующий кафедрой проф., доктор техн. наук А. Д. Гиргидов)

Штеренлихт Д. В.

Ш 90 Гидравлика: Учеб. для вузов.— В 2-х кн.: Кн. 1.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Энергоатомиздат, 1991.— 351 с.: ил.

ISBN 5-283-02112-2

Изложены законы равновесия и движения жидкости в трубах, каналах, через гидротехнические сооружения. Большое внимание уделено изложению методов расчета параметров потока применительно к разнообразным случаям, встречающимся в практике. Приведены необходимые для расчетов таблицы и графики. Первое издание вышло в 1984 г. Второе издание переработано и дополнено научными результатами, а также нормативными материалами по гидравлическим расчетам. Состоит из двух книг.

Для студентов гидромелиоративных, а также гидроэнергетических и гидротехнических специальностей вузов.

Ш $\frac{3308010000\text{-}324}{051(01)\text{-}91}$ 227-90 ББК 30.123

ISBN 5-283-02112-2 (кн. 1)
ISBN5-283-02020-7

© Энергоатомиздат, 1984
© Автор, 1991, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебнике изложены законы движения и равновесия жидкости, описываются гидравлические явления и приводятся основные сведения о различных методах и способах гидравлических расчетов.

Учебник составлен в соответствии с программой дисциплины «Гидравлика», утвержденной Госкомобразованием СССР в 1989 г., применительно к специальностям и специализациям, относящимся к гидромелиоративному циклу 3110 — «Гидромелиорация», 3111 — «Механизация гидромелиоративных работ», «Экономика и организация водного хозяйства», 2904 — «Гидротехническое строительство».

Развитие мелиорации и водного хозяйства в нашей стране приводит к созданию технически более совершенных мелиоративных систем. Для обеспечения их надежной работы проводятся гидравлические расчеты, которые являются важной частью комплекса инженерных расчетов объектов и сооружений, входящих в состав систем. Поэтому в учебнике уделено большое внимание гидравлическим условиям работы мелиоративных каналов, гидротехнических сооружений и трубопроводов.

Для улучшения усвоения учебного материала студентами в учебник включены контрольные вопросы по главам, некоторые задачи и рассмотрены примеры решения. К сожалению, объем книги не позволил привести примеры решения в каждой из глав. Более подробно практические приемы решения гидравлических задач рассмотрены в намечаемом к изданию в 1992 г. «Задачнике по гидравлике» [написанном преподавателями кафедры гидравлики Московского гидромелиоративного института (МГМИ) под общей редакцией автора данного учебника].

Объем учебника не позволяет подробно изложить некоторые современные гидравлические расчеты, в ряде случаев студентам рекомендуется обращаться к гидравлическим справочникам и нормативной литературе. Некоторые из них указаны в списке литературы, приведенном в конце книги.

Первое издание учебника вышло в 1984 г. Второе издание сохраняет определенную методическую и научную преемственность по отношению к учебнику «Гидравлика» (авторы И. И. Агроскин, Г. Т. Дмитриев, Ф. И. Пикалов, под общей редакцией И. И. Агроскина, 1964 г.).

Автор учел ценные замечания, сделанные рецензентами рукописи: кафедрой гидравлики Ленинградского политехнического ин-

ститута (заведующий кафедрой доктор техн. наук, проф А. Д. Гиргидов). Учтены также пожелания, высказанные в опубликованных рецензиях на первое издание и читателями книги.

Весьма полезными, как и при работе над рукописью первого издания книги, были обсуждения учебника с коллегами по кафедре гидравлики МГМИ

Всем указанным лицам, а также сотрудникам кафедры, принимавшим участие в оформлении книги, приношу самую искреннюю благодарность.

Автор заранее благодарен читателям за пожелания по улучшению предлагаемого учебника. Просьба все замечания и пожелания направлять в адрес Энергоатомиздата: 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Гидравлика — наука, изучающая законы равновесия и движения жидкостей и разрабатывающая методы применения этих законов для решения различных прикладных задач. Название «гидравлика» произошло от греческих слов «хюдор» — вода и «аулос» — труба, желоб. Вначале в понятие «гидравлика» включалось только учение о движении воды по трубам. В настоящее время почти во всех областях техники применяются различные гидравлические устройства, основанные на использовании гидравлических законов. Главнейшие области применения гидравлики — гидротехника, мелиорация и водное хозяйство, гидроэнергетика, водоснабжение и канализация, водный транспорт, машиностроение, авиация и т. д.

Первым научным трудом в области гидравлики считается трактат Архимеда (287—212 гг. до н. э.) «О плавающих телах», хотя сведения о некоторых законах гидравлики были, видимо, известны и ранее, так как задолго до Архимеда строились оросительные каналы и водопроводы.

В древнем Египте, Индии, Китае были построены каналы и водохранилища грандиозных по тем временам размеров. Так, в Индии глубина некоторых водохранилищ достигала 15 м, в Китае около 2500 лет назад был построен Великий канал длиной около 1800 км, который соединял приустьевые участки крупных рек страны. В Риме 2300 лет назад был построен первый водопровод.

На территории нашей страны также были построены многочисленные каналы и сооружения для добычи и транспортирования воды. Земледелие в районах Кавказа и Средней Азии велось с применением орошения. Некоторые из каналов, построенных в низовьях Амударьи около 2000 лет назад, используются и по сей день (естественно, после многоразовых ремонтов и реконструкций).

Старинные летописи и другие источники содержат сведения о строительстве в России различных сооружений на реках, о развитии водных путей, о попытках создания механизмов, использующих энергию водного потока, и о других конструкциях, осуществление которых было бы невозможно без знания основ гидравлики. Так, еще в X—XI вв. на Руси существовали водопроводы из гончарных и деревянных труб, в 1115 г. был построен наплавной мост через Днепр у Киева. В XIV—XV вв. применялась добыча воды из подземных источников, оборудованных довольно совершенными водопроводными устройствами.

В средние века в России возводились многочисленные плотины на реках. Так, в 1516 г. была построена плотина из камня на р. Неглинке в Москве.

Подъем в развитии гидравлики начался только через 17 веков после Архимеда. В XV—XVI вв. Леонардо да Винчи (1452—1519) написал работу «О движении и измерении воды», которая была опубликована лишь через 400 с лишним лет после ее создания. С. Стевин (1548—1620) написал книгу «Начала гидростатики», Галилео Галилей (1564—1642) в 1612 г. в трактате «Рассуждение о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в ней движутся»

рассмотрел основные законы плавания и гидростатический парадокс, Э. Торричелли (1608—1647) получил формулу скорости истечения невязкой жидкости из резервуаров через отверстия, Б. Паскаль (1623—1662) открыл закон о передаче давления в жидкости, прямым следствием чего явилось появление в то время большого числа простых гидравлических машин (гидравлические прессы, домкраты и т. п.), И. Ньютон (1643—1727) в 1686 г. сформулировал гипотезу о внутреннем трении в жидкости.

Однако перечисленные разработки и открытия касались только отдельных разделов гидравлики. Формирование гидравлики как науки на прочной теоретической основе стало возможным только после работ академиков Петербургской Академии наук: М. В. Ломоносова (1711—1765), Д. Бернулли (1700—1782) и Л. Эйлера (1707—1783).

М. В. Ломоносов в 1760 г. в диссертации «Рассуждение о твердости и жидкости тел» сформулировал открытые им законы сохранения вещества и энергии.

Д. Бернулли в 1738 г. опубликовал выведенное им важнейшее уравнение, которое служит основой теоретических построений и практических расчетов в области гидравлики.

Л. Эйлер в 1755 г. вывел системы дифференциальных уравнений равновесия и движения жидкости.

Интересно, что наряду с гениальными теоретическими работами М. В. Ломоносова, Д. Бернулли и Л. Эйлера известны их исследования в области создания гидравлических приборов и устройств. М. В. Ломоносов изобрел универсальный барометр, вискозиметр (прибор для исследования вязкости жидкости), прибор для определения скорости течений в море, а также занимался усовершенствованием гидравлических машин и устройств. Д. Бернулли изобрел водоподъемник, установленный в с. Архангельском под Москвой и поднимавший воду на высоту 30 м. Л. Эйлер предложил конструкцию турбины, вывел так называемое «турбинное уравнение», создал основополагающие труды в теории корабля.

В 1791 г. в Петербурге А. Колмаков опубликовал книгу «Карманная книжка для вычисления количества воды, протекающей через трубы, отверстия», которая явилась первым справочником по гидравлике.

Первое в России учебное пособие по гидравлике было выпущено в 1836 г. П. П. Мельниковым под названием «Основания практической гидравлики или о движении воды в различных случаях».

Перечисленные теоретические работы положили начало бурному развитию гидравлики. Велики заслуги ученых: Д. Полени (1685—1761), который работал в области истечения через отверстия и водосливы; А. Шези (1718—1798), изучавшего равномерное движение жидкости; П. Дюбуа (1734—1809), занимавшегося движением наносов в реках, сопротивлениями движению воды в руслах; Д. Вентури (1746—1822), исследовавшего истечение через отверстия и насадки; Ю. Вейсбаха (1806—1871), в основном известного работами в области сопротивлений движению жидкости; А. Базена (1829—1897), изучавшего равномерное движение и истечение жидкости через водосливы; О. Рейнольдса (1842—1912), внесшего большой вклад в изучение ламинарного и турбулентного режимов движения. Можно было бы указать и многих других исследователей.

Во второй половине XIX в. в России появляются работы, оказавшие большое влияние на последующее развитие гидравлики. И. С. Громека (1851—1889) создал основы теории винтовых потоков и потоков с поперечной циркуляцией. Д. И. Менделеев (1834—1907) в своей работе «О сопротивлении жидкости и воздухоплавании» в 1880 г. привел важные выводы о наличии двух режимов движения жидкости (ламинарного и турбулентного). Далее Н. П. Петров (1836—1920) сформулировал закон внутреннего трения в жидкости. Н. Е. Жуковский (1847—1921) разработал теорию гидравлического удара в водопроводных трубах, теорию движения наносов в реках и основополагающие предложения в области фильтрации.

Труды академика Н. Н. Павловского (1884—1937) в области равномерного и неравномерного движения, фильтрации через земляные плотины и под гидротехническими сооружениями явились весьма большим вкладом в развитие гидравлики и послужили основой наряду с работами его учеников и последователей в СССР для создания инженерной гидравлики, широко используемой при расчетах в гидротехнике.

Развитие гидротехнического и гидромелиоративного строительства в СССР способствует дальнейшему развитию советской гидравлической науки. Глубокие исследования по различным направлениям, отвечающим потребностям гидротехники, привели к появлению новых, оригинальных разработок в области теории гидравлики и рекомендаций для расчетной практики, предложенных Н. Н. Павловским, И. И. Агроскиным, А. И. Богомоловым, М. А. Великановым, Е. А. Замариным, И. И. Леви, К. А. Михайловым, Ф. И. Пикаловым, М. Д. Чертоусовым, Р. Р. Чугаевым, А. А. Угинчусом и многими другими видными советскими учеными, широко известными не только в СССР, но и за рубежом.

В настоящее время гидравлические исследования и расчеты вновь возводимых гидротехнических сооружений и объектов водохозяйственного и мелиоративного строительства проводятся во многих научно-исследовательских и учебных институтах, среди них ВНИИ гидротехники имени Б. Е. Веденеева (ВНИИГ), ВНИИ гидротехники и мелиорации имени А. Н. Костякова (ВНИИГиМ), Научно-исследовательский сектор (НИС) ВО «Гидропроект» имени С. Я. Жука, Среднеазиатский НИИ ирригации имени В. Д. Журина (САНИИРИ), Грузинский НИИ гидротехники и мелиорации (ГрузНИИГиМ), Грузинский НИИ энергетики и гидротехнических сооружений (ГрузНИИЭГС), Московский гидромелиоративный институт (МГМИ), Московский инженерно-строительный институт (МИСИ) имени В. В. Куйбышева, Ленинградский государственный технический университет (ЛГТУ), Киргизский сельскохозяйственный институт (КиргСХИ), Новочеркасский инженерно-мелиоративный институт (НИМИ), Саратовский политехнический институт (СарПИ) и др.

При исследовании гидравлических явлений и расчетах в гидравлике применяют аналитический и экспериментальный методы. В аналитическом методе применяют уравнения механики и получают уравнения движения и равновесия жидкости, устанавливающие зависимости между кинематическими и динамическими характеристиками движущейся жидкости. Ввиду сложности строения жидкостей аналитические исследования проводятся для модельных жидкостей, облегчающих применение уравнений механики. Например, применяется модель невязкой жидкости, которая в отличие от всех имеющихся в природе и технике жидкостей лишена свойства вязкости.

В гидравлике принята гипотеза сплошности жидкости. Согласно этой гипотезе жидкость рассматривается как континуум, непрерывная сплошная среда. Все параметры, характеризующие движение жидкости, считаются непрерывными вместе с их производными во всех точках (кроме особых точек). Благодаря таким предпосылкам стало возможным получение дифференциальных уравнений равновесия и движения жидкости. Решение этих уравнений (в тех случаях, когда его удается получить) позволяет иметь данные о механическом движении и равновесии жидкости в любой точке пространства, где движется жидкость.

Во многих случаях в гидравлике рассматриваются одномерные задачи, в которых достаточно знать только средние по сечениям значения гидравлических параметров, определяющих изучаемое (или рассматриваемое) гидравлическое явление, применительно к которым получен ряд основных уравнений гидравлики.

Кроме гидравлики вопросы покоя и движения жидкостей изучает теоретическая гидромеханика, имеющая строго математический характер. Получаемые в теоретической гидромеханике решения не всегда еще могут быть применены для практических расчетов, но эти решения помогают раскрывать общие закономерности изучаемых явлений.

Применение моделей вносит погрешности в результаты аналитических исследований, которые оцениваются экспериментальным путем.

Экспериментальные исследования в гидравлике имеют важное значение. Здесь уместно привести слова Леонардо да Винчи: «Всякий раз, когда имеешь дело с водой, прежде всего обратись к опыту, а потом уже рассуждай». Действительно, роль экспериментов в гидравлике крайне велика. Изучение гидравлических явлений на моделях, созданных на основе теории подобия с применением определенных методик моделирования, позволяет получить данные о параметрах, которыми будет характеризоваться явление в натурных условиях. Экспериментальные исследования позволяют в необходимых случаях уточнить результаты, полученные в аналитических расчетах, при принятии тех или иных допущений.

В. И. Ленин в «Материализме и эмпириокритицизме» писал: «Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений»[1]. На этом базируются различные методы аналогии (ЭГДА — электрогидродинамическая аналогия, ГАГА — газогидравлическая аналогия и т. п.). Метод ЭГДА, согласно которому можно, например, изучать движение грунтовых вод (фильтрацию) под плотиной на модели из электропроводного материала, был предложен Н. Н. Павловским еще в 1922 г. и в настоящее время широко используется при изучении фильтрации и проведении расчетов движения грунтовых вод.

Наряду с экспериментами в лабораториях достаточно развиты натурные гидравлические исследования.

Методом гидравлических исследований можно считать рациональное сочетание аналитического и экспериментального методов.

В последнее время в гидравлику интенсивно внедряются ЭВМ и различные вычислительные методы расчетов. Используются как

---

[1] **Ленин В. И.** Полн. собр. соч. Т. 18. С. 396.

численные методы расчетов, так и численное моделирование гидравлических явлений. Гидравлику, использующую эти вычислительные методы, часто называют вычислительной гидравликой.

В гидравлических экспериментальных исследованиях, проводимых в лабораторных и натурных условиях, все шире используются достижения научного приборостроения.

Гидравлические параметры в процессе исследований определяются с помощью новейших средств измерения.

Глава 1

ЖИДКОСТИ И ИХ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

1.1. Жидкости. Гипотеза сплошности. Плотность жидкости

Жидкости. Все вещества в природе имеют молекулярное строение. По характеру молекулярных движений, а также по численным значениям межмолекулярных сил жидкости занимают промежуточное положение между газами и твердыми телами. Свойства жидкостей при высоких температурах и низких давлениях ближе к свойствам газов, а при низких температурах и высоких давлениях — к свойствам твердых тел.

В газах расстояния между молекулами больше, а межмолекулярные силы меньше, чем в жидкостях и твердых телах, поэтому газы отличаются от жидкостей и твердых тел большей сжимаемостью. По сравнению с газами жидкости и твердые тела м а л о с ж и м а е м ы.

Молекулы жидкости находятся в непрерывном хаотичном тепловом движении, отличающемся от хаотичного теплового движения газов и твердых тел: в жидкостях это движение осуществляется в виде к о л е б а н и й (10^{13} колебаний в секунду) относительно мгновенных центров и с к а ч к о о б р а з н ы х переходов от одного центра к другому. Тепловое движение молекул твердых тел — колебания относительно стабильных центров. Тепловое движение молекул газа — непрерывные скачкообразные перемены мест.

Диффузия молекул жидкостей и газов обусловливает их общее свойство — т е к у ч е с т ь. Поэтому термин «жидкость» применяют для обозначения и собственно жидкости (несжимаемая или весьма мало сжимаемая, капельная жидкость), и газа (сжимаемая жидкость).

В гидравлике рассматриваются равновесие и движение капельных жидкостей.

Гипотеза сплошности. Жидкость рассматривается как деформируемая система материальных частиц, непрерывно заполняющих пространство, в котором она движется.

Жидкая частица представляет собой бесконечно малый объем, в котором находится достаточно много молекул жидкости. Например, если рассмотреть кубик воды со сторонами размером 0,001 см, то в объеме будет находиться $3{,}3 \cdot 10^{13}$ молекул. Частица жидкости полагается достаточно малой по сравнению с размерами области, занятой движущейся жидкостью.

При таком предположении жидкость в целом рассматривается как континуум — сплошная среда, непрерывно заполняющая пространство, т. е. принимается, что в жидкости нет пустот или разрывов, все характеристики жидкости являются непрерывными функциями, имеющими непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Сплошная среда представляет собой модель, которая успешно используется при исследовании закономерностей покоя и движения жидкости.

Правомерность применения модели жидкость — сплошная среда подтверждена всей практикой гидравлики.

Плотность жидкости. Плотность ρ характеризует распределение массы M жидкости по объему W. В произвольной точке A жидкости плотность

$$\rho_A = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}, \tag{1.1}$$

где ΔM — масса, заключенная в объеме ΔW, стягиваемом в точку A.

Плотность однородной жидкости равна отношению массы M жидкости к ее объему W:

$$\rho = M/W. \tag{1.2}$$

Плотность ρ во всех точках однородной жидкости одинакова.

В общем случае плотность ρ может изменяться от точки к точке в объеме, занятом жидкостью, и в каждой точке объема с течением времени.

Единица плотности (плотности массы) в системе СИ принята кг/м^3.

Удельный вес γ однородной жидкости определяется как отношение веса G жидкости к ее объему W:

$$\gamma = G/W.$$

Учитывая, что $G = Mg$, получим зависимость, используемую в расчетах:

$$\gamma = \rho g.$$

В системе СИ единица удельного веса принята Н/м^3.

Отметим, что значение ускорения свободного падения g изменяется от 9,831 м/с^2 (на полюсе) до 9,781 м/с^2 (на экваторе).

Плотность жидкостей и газов зависит от температуры и давления. Все жидкости, кроме воды, характеризуются уменьшением плотности с ростом температуры. Плотность воды максимальна при $t = 4$ °С и уменьшается как с уменьшением, так и с увеличением температуры от этого значения. В этом проявляется одно из аномальных свойств воды. В табл. 1.1 приведены значения плотности воды при нормальном атмосферном давлении и различных температурах.

Таблица 1.1

t, °C	0	2	4	6	8
ρ, кг/м^3	999,87	999,97	1000	999,97	999,88

Продолжение

t, °C	10	20	30	40	60
ρ, кг/м^3	999,7	998,2	995,7	992,2	983,2

Плотность морской воды при $t = 0$ °С равна 1020—1030, нефти и нефтепродуктов — 650—900, чистой ртути — 13 596 кг/м^3.

При изменении давления плотность жидкостей изменяется незначительно. Для условий работы гидротехнических сооружений плотность воды можно считать постоянной, $\rho = 1000$ кг/м^3. Сравните: плотность воздуха при $t = 0$ °С и атмосферном давлении равна 1,29 кг/м^3.

Температура, при которой плотность воды максимальная, с увеличением давления уменьшается. Так, при давлении 14 МПа вода имеет максимальную плотность при 0,6 °С.

1.2. Силы, действующие в покоящейся или движущейся жидкости

Силы, действующие в жидкости, можно разделить на две группы.

1. Силы, действующие на каждую частицу жидкости с массой $\Delta M = \rho \Delta W$, т. е. силы, распределенные по массе. Эти силы называются массовыми (объемными). К ним относятся: сила тяжести, силы инерции (кориолисова сила инерции, переносная сила инерции), электромагнитные силы. В гидравлических задачах электромагнитные силы не рассматриваются, за исключением ряда специальных задач. К массовым силам относятся также гравитационные силы, подчиняющиеся закону всемирного тяготения Ньютона (например, силы притяжения Луны и Солнца при рассмотрении водных масс морей и океанов Земли).

Массовые силы характеризуются плотностью распределения **F**. Если ΔW — элементарный объем, содержащий точку A, и $\Delta \mathbf{F}$ — массовая сила, действующая на массу $\Delta M = \rho \Delta W$ жидкости в этом объеме, то в данной точке A плотность распределения массовой силы

$$\mathbf{F}_A = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\rho \Delta W} \tag{1.3}$$

при стягивании объема ΔW к точке A.

Таким образом, плотность массовой силы представляет собой массовую силу, отнесенную к единице массы. Ее составляющие по осям координат будут соответственно F_x, F_y, F_z. Плотность массовых сил имеет размерность ускорения $[LT^{-2}]$.

2. Силы, действующие на каждый элемент $\Delta\omega$ поверхностей, ограничивающих жидкость, и на каждый элемент поверхностей, проведенных произвольно внутри жидкости, называются поверхностными. К ним относятся нормальные к поверхности силы давления **P** и касательные к поверхности силы трения **T**.

Плотность распределения нормальных сил $p_A = \lim\limits_{\Delta\omega\to 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}$ называется нормальным напряжением в точке A. Плотность распределения касательных сил $\tau_A = \lim\limits_{\Delta\omega\to 0} \frac{\Delta T}{\Delta\omega}$ называется касательным напряжением в точке A.

Массовые и поверхностные силы могут быть внешними и внутренними. Внешние силы действуют на рассматриваемую массу и поверхность жидкости извне и приложены соответственно к каждой частице жидкости, составляющей массу, и к каждому элементу поверхности, ограничивающей жидкость. Внутренние силы представляют собой силы взаимодействия частиц жидкости. Они являются парными, их сумма в данном объеме жидкости всегда равна нулю.

1.3. Свойства жидкости

Сжимаемость — свойство жидкостей изменять объем при изменении давления — характеризуется коэффициентом объемного сжатия (сжимаемости) β_W, $Па^{-1}$, представляющим относительное изменение объема жидкости W, $м^3$, при изменении давления p, Па, на единицу:

$$\beta_W = -\frac{1}{W}\frac{dW}{dp}. \qquad (1.4)$$

Знак минус в формуле указывает, что при увеличении давления объем жидкости уменьшается.

Учитывая, что при неизменной массе [см. (1.2)]

$$-dW/W = d\rho/\rho, \qquad (1.5)$$

имеем

$$\beta_W = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}. \qquad (1.6)$$

Коэффициент объемного сжатия β_W определяет также относительное изменение плотности жидкости при изменении давления на единицу.

Таблица 1.2

t, °C	0	10	20	30
E_0, МПа	1950	2030	2110	2150

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия,— модуль упругости жидкости, Па,

$$E_0 = 1/\beta_W,$$

или из (1.6)

$$E_0 = \rho\, dp/d\rho. \qquad (1.7)$$

Отсюда

$$d\rho/\rho = dp/E_0. \qquad (1.8)$$

Соотношение (1.7) представляет собой закон Гука для жидкостей. Модуль упругости E_0 зависит от температуры и давления, поэтому жидкости не точно следуют закону Гука. В табл. 1.2 даны значения E_0 для воды при различной температуре.

Модуль упругости минеральных масел, используемых в механизмах с гидравлическим приводом, при $t = 20$ °С составляет $(1{,}35 \div 1{,}75)\cdot 10^3$ МПа (меньшее значение относится к более легкому маслу); бензина и керосина — приблизительно $1{,}3\cdot 10^3$ МПа; глицерина $4{,}4\cdot 10^3$ МПа; ртути — в среднем $3{,}2\cdot 10^4$ МПа. Глинистые растворы, применяемые при бурении, имеют $E_0 = 2{,}5\cdot 10^3$ МПа.

Сжимаемость воды весьма незначительна. При увеличении давления на 9,81 МПа объем воды уменьшается на 1/20000 первоначального объема. В то же время сжимаемость воды примерно в 100 раз больше сжимаемости стали.

Условия работы гидротехнических сооружений позволяют считать воду несжимаемой средой. Но не следует забывать, что такое допущение правомерно лишь в тех случаях, когда изменения давления невелики. Так, сжимаемость воды существенно сказывается на положении уровня водной поверхности Мирового океана. Если бы вода была абсолютно несжимаема, то отметки уровня воды в океанах поднялись бы примерно на 30 м.

В практике эксплуатации гидравлических систем имеются случаи, когда вследствие действия того или иного возмущения (например, резкого закрытия или открытия запорного устройства в трубопроводе) в жидкости значительно изменялось давление. В таких случаях пренебрежение сжимаемостью приводит к существенным погрешностям.

Таблица 1.3

t, °С	1—10	1—20	40—50	60—70	90—100
β_t, 1/°С	0,000014	0,00015	0,000422	0,000556	0,000719

Поскольку в безграничной однородной жидкости или в объеме, ограниченном абсолютно жесткими стенками, скорость распространения звука

$$c = \sqrt{E_0/\rho}, \tag{1.9}$$

а по (1.7) $d\rho = \rho\, dp/E_0$, то

$$d\rho = d\, p/c^2. \tag{1.10}$$

Если допустить, что жидкость несжимаема ($d\rho = 0$), то $c = \infty$. При достаточно большом объеме жидкости или достаточно быстром изменении давления использование в расчетах $c = \infty$ приводит к ошибкам.

Температурное расширение — свойство жидкостей изменять объем при изменении температуры — характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения, представляющим относительное изменение объема жидкости при изменении температуры на единицу (на 1 °С) и при постоянном давлении:

$$\beta_t = \frac{1}{W}\frac{dW}{dt}. \tag{1.11}$$

Для большинства жидкостей коэффициент β_t с увеличением давления уменьшается. Для воды с увеличением давления при температуре до 50 °С β_t растет, а при температуре выше 50 °С уменьшается.

В табл. 1.3 приведены значения β_t для воды при нормальном атмосферном давлении и различных температурах.

В табл. 1.4 приведены значения β_t для некоторых жидкостей при 20 °С и нормальном атмосферном давлении.

Таблица 1.4

Жидкость	β_t, 1/°С	Жидкость	β_t, 1/°С
Вода	0,00015	Нефть	0,0006
Глицерин	0,0005	Ртуть	0,00018
Спирт	0,0011	Масло АМГ-10	0,0008

Коэффициент β_t с уменьшением плотности нефтепродуктов от 920 до 700 кг/м^3 увеличивается от 0,0006 до 0,0008; для рабочих жидкостей гидросистем β_t обычно принимают не зависящим от температуры. Для этих жидкостей рост давления от атмосферного до 60 МПа приводит к увеличению β_t примерно на 10—20 %, причем чем выше температура рабочей жидкости, тем выше увеличение β_t.

Вязкость — свойство жидкости оказывать сопротивление относительному сдвигу ее слоев. Вязкость проявляется в том, что при относительном перемещении слоев жидкости на поверхностях их соприкосновения возникают силы сопротивления сдвигу, называемые силами внутреннего трения, или силами вязкости. Благодаря этим силам медленнее движущийся слой жидкости «тормозит» соседний слой, движущийся быстрее, и наоборот. Силы внутреннего трения появляются вследствие наличия межмолекулярных связей между движущимися слоями.

Силы внутреннего трения в жидкости впервые были обнаружены Ньютоном. Он установил пропорциональность между силой внутреннего трения, площадью соприкосновения слоев и относительной скоростью перемещения слоев.

Дальнейшие исследования показали, что численное значение касательного напряжения, возникающего вследствие действия силы внутреннего трения, равно

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt},$$

где коэффициент пропорциональности μ учитывает особенности конкретных жидкостей и называется динамической вязкостью жидкости; $d\theta/dt$ — скорость деформации сдвига.

Рассмотрим слоистое прямолинейное движение жидкости в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения (рис. 1.1). Жидкость движется кольцевыми концентрическими цилиндрическими слоями толщиной dn, скорость слоев уменьшается от оси к стенкам трубы.

Разность скоростей в соседних слоях равна du. На поверхностях соприкосновения слоев возникают силы внутреннего трения.

Рассмотрим элементарный объем жидкости (рис. 1.2). При слоистом движении вследствие различия скоростей, с которыми перемещаются верхняя и нижняя поверхности выделенного объема, произойдет деформация сдвига, скорость которой

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{du}{dn}dt}{dt},$$

так как

$$d\theta = \operatorname{tg}(d\theta) = \frac{du\,dt}{dn},$$

где du/dn — градиент скорости.

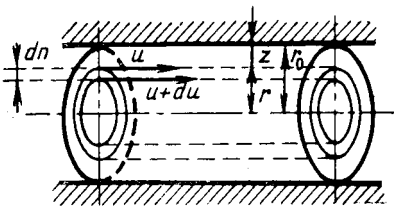


Рис. 1.1

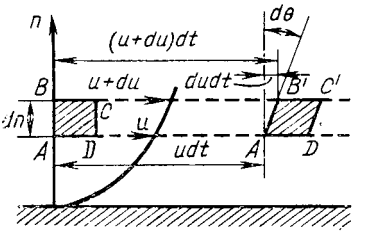


Рис. 1.2

Таким образом, при слоистом движении скорость деформации сдвига равна градиенту скорости:

$$\frac{du}{dn} = \frac{d\theta}{dt}.$$

Тогда согласно закону внутреннего трения, открытому Ньютоном, численное значение касательного напряжения равно

$$\tau = \pm\mu \frac{du}{dn}. \qquad (1.12)$$

В зависимости от выбора направления отсчета расстояний по нормали (от стенки рассматриваемой трубы или от ее оси) градиент скорости может быть положительным (расстояние отсчитывается от стенки) или отрицательным (расстояние отсчитывается от оси трубы). Знак в (1.12) принимается таким, чтобы касательное напряжение было положительным.

Закон внутреннего трения (1.12) экспериментально подтвержден и математически оформлен основоположником гидродинамической теории смазки Н. П. Петровым в 80-е годы XIX в.

Динамическая вязкость μ имеет размерность $[ML^{-1}T^{-1}]$; она зависит от температуры и давления. Для чистой воды зависимость динамической вязкости от температуры, предложенная Пуазейлем, имеет вид

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}0337t + 0{,}000221t^2)^{-1}, \qquad (1.13)$$

где t — температура, °С; μ_0 — динамическая вязкость при $t = 0$ °С.

В табл. 1.5 приведены значения μ для воды при различных температурах.

Таблица 1.5

t, °С	0	10	20	30
μ, 10^4 Па·с	17,92	13,04	10,1	8,00

Таблица 1.6

t, °C	ν, 10^4 м²/с	t, °C	ν, 10^4 м²/с
0	0,0179	18	0,0106
2	0,0167	20	0,0101
4	0,0157	25	0,009
6	0,0147	30	0,008
8	0,0139	35	0,0072
10	0,0131	40	0,0065
12	0,0124	45	0,006
14	0,0118	50	0,0055
16	0,0112	60	0,0048

В память французского ученого Пуазейля единица вязкости была названа «пуаз», 1 Пз = 1 г/(см·с) в системе CGS. В системе СИ единица динамической вязкости измеряется в Па·с, 1 Па·с = = 10 Пз.

В гидравлических расчетах кроме динамической вязкости широко используется кинематическая вязкость, равная отношению динамической вязкости μ к плотности ρ жидкости:

$$\nu = \mu/\rho. \qquad (1.14)$$

Название «кинематическая вязкость» отражает тот факт, что в размерность ν входят только кинематические (а не динамические) величины.

В системе СИ единица кинематической вязкости измеряется в м²/с; в системе CGS применяется также единица см²/с, названная «стокс»; 1 м²/с = 10^4 Ст = 10^6 сСт.

В табл. 1.6 приведены значения кинематической вязкости пресной воды при различных температурах.

Для минеральных масел изменение давления в пределах от атмосферного до 40 МПа приводит к росту кинематической вязкости в 2 раза при 80 °С и в 3 раза при 40 °С.

Влияние давления на вязкость воды проявляется в меньшей степени. В табл. 1.7 приведены значения ν для некоторых жидкостей (для нефтепродуктов — осредненные данные).

Кинематическая вязкость воды, содержащей достаточное количество мелких (менее 0,05 мм) взвешенных твердых частиц, может существенно увеличиться по сравнению с чистой (без взвеси) водой (см. табл. П.1.1). В связи с этим при изучении движения воды, несущей большое количество мелких наносов (особенно в придонной области потока в реке или канале), часто учитывают изменение кинематической вязкости в зависимости от положения движущегося слоя относительно дна.

Вязкость жидкостей измеряют с помощью приборов — вискозиметров различных типов и конструкций.

Таблица 1.7

Жидкость	t, °С	ν, 10^4 м²/с	Жидкость	t, °С	ν, 10^4 м²/с
Воздух	0	0,133	Масло АМГ-10	50	0,1
	100	0,245	Нефть:		
Молоко цельное	20	0,0174	легкая	18	0,25
Патока	18	600	тяжелая	18	1,4
Керосин	15	0,027	Ртуть	15	0,0011
Мазут	18	20	Сталь жидкая	1550	0,0037
Глицерин безводный	20	11,89			

Жидкости, для которых справедлив закон внутреннего трения Ньютона (1.12), называются ньютоновскими. Существуют жидкости (коллоидные суспензии, растворы полимеров, гидросмеси из глины, мела, цемента, сапропелей, илов, бетонные гидросмеси, строительные растворы, кормовые смеси в сельском хозяйстве и т. п.), для которых связь между касательным напряжением τ и скоростью сдвиговой деформации du/dn выражается другими соотношениями. Такие жидкости относятся к неньютоновским. Например, если соотношение между τ и du/dn имеет вид

$$\tau = \tau_0 \pm \mu du/dn, \qquad (1.15)$$

то жидкости называются вязкопластичными и их движение начинается лишь после того, как внешней силой будет преодолено напряжение сдвига τ_0 (рис. 1.3). Таким образом, вязкопластичные жидкости отличаются от ньютоновских наличием касательного напряжения в состоянии покоя τ_0. Для других неньютоновских жидкостей динамическая вязкость может зависеть от градиента скорости, времени и т. д.

Растворение газов. Все жидкости в той или иной мере поглощают и растворяют газы. Согласно закону Генри—Дальтона при давлениях до 30 МПа и постоянной температуре относительный объем $W_г/W_ж$ растворенного газа равен постоянной величине $k_р$, называемой коэффициентом растворимости. Коэффициент растворимости зависит от температуры.

Если процесс растворения происходит при давлении p_2, то, пересчитав объем газа на некоторое эталонное давление p_1 (например, на атмосферное), получим соотношение

$$\frac{W_{г\,p_1}}{W_{ж\,p_2}} = k'_р \frac{p_2}{p_1}, \qquad (1.16)$$

где $W_ж$ — объем жидкости при давлении p_2 и температуре t; $W_г$ — объем растворенного газа, отнесенный к давлению p_1 и температуре t; $k'_р$ — коэффициент растворимости данного газа в данной жидкости при температуре t.

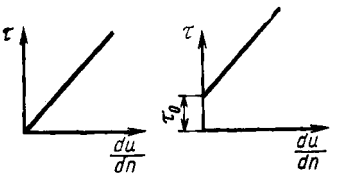


Рис. 1.3

При температуре 20 °С и атмосферном давлении в воде содержится около 2 % (точнее, 1,6 %) растворенного воздуха по объему ($k'_р = 0{,}016$). С увеличением температуры от 0 до 30 °С коэффициент растворимости воздуха в воде уменьшается. Коэффициент растворимости воздуха в маслах при температуре 20 °С равен примерно 0,08—0,1. Кислород отличается более высокой растворимостью, чем воздух, поэтому содержание кислорода в воздухе, растворенном в жидкости, примерно на 50 % выше, чем в атмосферном. При уменьшении давления из жидкости выделится объем газа в соответствии с (1.16). Процесс выделения газа протекает интенсивнее, чем растворение.

Кипение — процесс перехода жидкости в газообразное состояние, происходящий внутри жидкости. Жидкость можно довести до кипения повышением температуры до значений, больших температуры кипения при данном давлении, или понижением давления до значений, меньших давления насыщенных паров $p_{н.\,п}$ жидкости при данной температуре. Обычно при понижении давления до давления насыщенных паров жидкости (при данной температуре) в жидкости образуются пузырьки, заполненные парами жидкости или газами, выделившимися из жидкости, т. е. происходит так называемое «холодное кипение». В жидкости, из которой удален растворенный и не растворенный в ней газ (или воздух), т. е. в дегазированной жидкости, кипение не возникает и при температуре, большей температуры кипения при данном давлении.

В табл. 1.8 приведено давление насыщенных паров $p_{н.\,п}$ при атмосферном давлении.

Сопротивление растяжению жидкостей может возникать только в дегазированных жидкостях. В опытах удавалось при центрифугировании дегазированной дистиллированной воды получить на очень короткое время напряжения растяжения в воде, доходившие приблизительно до 25 МПа. Технические жидкости не сопротивляются растягивающим усилиям. Газы могут находиться в жидкости в растворенном и нерастворенном виде. Присутствие в жидкости нерастворенного воздуха (газа) в виде пузырьков существенно уменьшает модуль упругости жидкости, причем

Таблица 1.8

t, °С	5	10	15	20	25	30	40
$p_{н.\,п}$, кПа	0,87	1,23	1,7	2,33	3,2	4,3	7,4

это уменьшение не зависит от размеров пузырьков воздуха. Динамическая вязкость жидкости с увеличением содержания воздуха растет. Содержание нерастворенного воздуха в рабочих жидкостях гидросистем машин и механизмов, так же как и в трубопроводах, подающих жидкость, может сильно повлиять на параметры работы трубопроводов и гидросистем.

Поверхностное натяжение. Известно, что молекулы жидкости, находящиеся на границе с газом, твердым телом или между двумя несмешивающимися жидкостями, испытывают со стороны остальных молекул жидкости не уравновешенное извне воздействие. Под влиянием этого воздействия поверхность жидкости стремится принять форму, соответствующую наименьшей площади. Малые массы жидкости в воздухе стремятся к шарообразной форме, образуя капли.

Чтобы увеличить поверхность жидкости, необходимо часть внутренних молекул вывести на поверхность, для чего придется совершить работу. Это можно представить как наличие сопротивления граничной поверхности жидкости растяжению и считать, что по поверхности распределены силы, препятствующие растяжению. Эти силы действуют по касательным к поверхности направлениям и называются силами поверхностного натяжения.

Поверхностное натяжение σ представляет собой отнесенную к единице площади дополнительную энергию, которой обладают молекулы поверхностного слоя, или силу поверхностного натяжения, отнесенную к единице длины на свободной поверхности. Размерность поверхностного натяжения $[MT^{-2}]$, в системе СИ — Н/м.

Значение σ зависит от природы соприкасающихся сред и температуры. С увеличением температуры значение σ уменьшается; при 20 °С и контакте с воздухом σ равно: для воды 0,0726; для ртути 0,486; для этилового спирта 0,022; для сырой нефти 0,0235—0,038; для смазочного масла 0,035—0,038 Н/м.

На границе с воздухом расплавленная сталь при $t = 1550$ °С имеет $\sigma = 1{,}86$ Н/м, расплавленный чугун при $t \approx 1200 \div 1450$ °С имеет $\sigma = 0{,}9 \div 1{,}0$ Н/м. Для границы вода — ртуть при 20 °С $\sigma = 0{,}378$ Н/м.

Добавка в жидкость поверхностно-активных веществ (ПАВ) может заметно уменьшить поверхностное натяжение.

Влияние поверхностного натяжения необходимо учитывать при изучении потоков с малой глубиной, при захвате окружающего воздуха движущейся жидкостью (аэрация жидкости), в капиллярах и т. д.

В трубках малого диаметра (капиллярах) наблюдается искривление свободной поверхности, граничащей с газом или с парами этой же жидкости. Если поверхность трубки смачивается, свободная поверхность жидкости в капилляре вогнутая. Если нет смачи-

вания, свободная поверхность выпуклая. В этих случаях силы поверхностного натяжения обусловливают дополнительные напряжения в жидкости.

Под действием этих напряжений в трубках малого диаметра происходит капиллярное поднятие (при смачивании) или опускание (если нет смачивания) жидкости на высоту, определяемую по формуле

$$h_{\text{кап}} = \frac{4\sigma \cos\theta}{\rho g d}, \qquad (1.17)$$

где θ — острый угол между касательной к свободной поверхности в точке пересечения со стенкой и самой стенкой капилляра; d — диаметр капилляра.

Для чистой воды и стекла $\theta \approx 0$, для ртути и стекла $\theta \approx 50°$.

При $t = 20$ °С для воды, спирта (поднятие) и ртути (опускание) $h_{\text{кап}}$ равна соответственно $30/d$, $11{,}5/d$ и $10{,}15/d$ мм.

Одна и та же жидкость в капиллярах одного и того же диаметра может подниматься (при смачивании) или опускаться (если нет смачивания) в зависимости от материала, из которого изготовлена капиллярная трубка.

Поднятие воды в капиллярах в почве и грунтах является важным фактором в распространении воды. Высота капиллярного поднятия в грунтах изменяется от нуля (галечники) почти до 5 м (глины). При этом с увеличением минерализации воды высота капиллярного поднятия увеличивается.

Поверхностное натяжение и капиллярные эффекты определяют закономерности движения жидкости в условиях невесомости.

1.4. Особые свойства воды

Известно, что в понятие «вода» следует включать вещества, состоящие не только из молекул H_2O^{16}. Различные комбинации изотопов водорода и кислорода обусловливают существование 36 разновидностей воды. В природной воде 99,7 % — молекулы H_2O^{16}, на долю остальных разновидностей молекул воды приходится лишь 0,3 %. Это не означает, что влияние других разновидностей молекул на свойства воды пропорционально их доле в общем объеме воды.

Вода — аномальное вещество. Прежде всего при различных температурах и давлениях вода может находиться в одном из трех агрегатных состояний: твердом (лед), жидком и газообразном (пар).

При уменьшении температуры от 4 до 0 °С объем воды не уменьшается (как у всех других веществ, кроме висмута), а увеличивается. Плотность воды, имеющая максимальное значение при 4 °С, при этом уменьшается. При замерзании объем воды увеличивается примерно на 10 %. Температура замерзания воды с увеличением давления (до 19,6 МПа) понижается, а затем повышается

Известно, что конвекция в водоемах (с пресной водой) прекращается при 4 °С. При этой температуре в нижних слоях находится вода с большей плотностью, чем в верхних слоях.

Морская вода замерзает при температуре — 1,9 °С. Вода в капиллярах в почве иногда может замерзать и при температуре + 4,4 °С.

Вода обладает чрезвычайно большой теплоемкостью, например в 10 раз большей, чем железо, в 33 раза большей, чем ртуть, в 3,3 раза большей, чем спирт и глицерин, и т. д. При этом обычно теплоемкость других жидкостей с увеличением температуры увеличивается. Вода характеризуется минимальным значением теплоемкости при 35 °С, а с ростом температуры теплоемкость вновь растет. Появление этого минимума объясняется разрушением ассоциаций (групп) молекул воды примерно при этой температуре.

Вода обладает очень высокой теплотой испарения и скрытой теплотой плавления. Например, теплота испарения воды в 8 раз, а скрытая теплота плавления в 27 раз больше, чем теплота спирта. При атмосферном давлении для перехода воды в пар из окружающей среды требуется в 6,75 раза больше теплоты, чем при плавлении льда при том же давлении.

При конденсации влаги (образовании тумана) выделяется значительное количество теплоты. Это используется в установках, создающих искусственный туман; такие установки помимо орошения могут использоваться для предохранения растений от заморозков.

Электропроводность сухого льда и снега гораздо меньше электропроводности воды, причем электропроводность воды сильно зависит от наличия примесей, а на электропроводность льда они влияют очень мало. Электропроводность воды, естественно, зависит от количества растворенных в ней солей. Поэтому электропроводность морской воды на 2—3 порядка больше, чем электропроводность пресной речной воды, а по сравнению с химически чистой водой при 18 °С — примерно в 12 000 раз.

Вода является сильным растворителем. Эта способность воды характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью, которая довольно высока и при 0 °С составляет около 87, с ростом же температуры она уменьшается до 55,7 при 100 °С. Таким образом, по сравнению с воздухом и водяным паром, диэлектрическая проницаемость которых равна 1, эта характеристика воды гораздо больше (для льда она равна 3,2).

В связи с наличием в воде растворенного воздуха, богатого кислородом, и ряда агрессивных компонентов вода воздействует на материалы, из которых возведены сооружения. При этом может происходить коррозия. Растворенные в воде соли и взвешенные в ней твердые частицы могут привести к «зарастанию» стенок, например, трубопровода, вследствие чего пропускная способность таких труб может существенно уменьшиться.

Обработка воды воздействием магнитного поля применяется для борьбы с накипеобразованием и для предотвращения коррозии в котлах и опреснительных установках, а также для ускорения осаждения взвесей при очистке воды. В результате проведенных опытов получены данные об увеличении скорости фильтрации воды, прошедшей обработку в магнитном поле, об ускорении сроков схватывания бетонов, в состав которых входит такая вода. Однако механизм влияния магнитного поля на свойства воды пока изучен недостаточно.

1.5. Контрольные вопросы и примеры

1. Каковы отличия жидкостей от твердых тел и газов? Как эти отличия связаны с молекулярным строением?
2. В чем заключается гипотеза сплошности жидкости?
3. Что такое плотность жидкости, от чего она зависит и какими единицами измеряется?
4. Какие силы относятся к массовым и поверхностным? Какие виды напряжений действуют в жидкости?
5. Что характерно для сжимаемости жидкостей, как связаны модуль упругости и коэффициент объемного сжатия жидкости?
6. Что такое вязкость жидкости? Запишите согласно закону внутреннего трения, открытому Ньютоном, выражение для касательного напряжения.
7. Какова связь динамической и кинематической вязкости, каковы их единицы измерения? Почему указанные величины имеют именно такие названия?
8. Может ли в покоящейся жидкости проявляться касательное напряжение? Каково основное различие так называемых ньютоновской и неньютоновской жидкостей?
9. Может ли жидкость, например вода, включать в себя и воздух? Если может, то подтвердите это положение формулой и количественными данными.
10. Превышает ли давление насыщенных паров атмосферное давление? Как эти величины соотносятся между собой?
11. Какова природа явления поверхностного натяжения? Какими единицами измерения пользуются для характеристики этого явления?
12. Каковы особенности капиллярного поднятия или опускания жидкости? Зависит ли их количественная характеристика от параметров жидкости и рода материала стенок капилляра?
13. В чем заключаются особые свойства воды? С чем связано существование этих особых свойств?

Пример 1.1. Трубопровод испытывается с помощью повышения внутреннего давления (опрессовывается), чтобы проверить, сохранится ли прочность стенок трубопровода при высоком рабочем давлении. Определить (дополнительно подаваемый) объем, на который сожмется вода в заглушенном с торцов трубопроводе с внутренним диаметром $d = 1$ м, длиной $l = 2000$ м, для повышения давления на $\Delta p = 10^6$ Па по сравнению с $p_{\text{нач}} = 9{,}81 \cdot 10^4$ Па. Деформацией стенок трубопровода пренебрегаем.

Решение. Первоначальный объем воды в трубопроводе

$$W_0 = \frac{\pi d^2}{4} l = 0{,}785 \cdot 1 \cdot 2000 = 1570 \text{ м}^3.$$

Дополнительно подаваемый объем воды входит в выражение (1.4) для коэффициента объемного сжатия

$$\beta_w = -\frac{dW}{W dp} \quad \text{или} \quad \beta_w = \left| \frac{\Delta W}{(W_0 + \Delta W)\,\Delta p} \right|.$$

Отсюда

$$\Delta W = \frac{\beta_w W_0 \Delta p}{1 - \beta_w \Delta p}.$$

Приняв

$$\beta_w = \frac{1}{2{,}1 \cdot 10^9} \text{ Па}^{-1} = 4{,}76 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н},$$

получим

$$\Delta W = \frac{4 \cdot 76 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}57 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{1 - 4{,}76 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6} = 0{,}748 \text{ м}^3.$$

Полученный объем воды должен быть дополнительно подан насосом в трубопровод. При этом повышение давления достигнет требуемого значения.

Пример 1.2. Определить, как изменится плотность пресной воды при увеличении давления от $p_1 = p_{ат} = 9{,}81 \cdot 10^4$ Па до $p_2 = 3 \cdot 10^7$ Па. Первоначальное значение плотности равно 1000 кг/м^3 (в диапазоне температур от 0 до 10 °С); коэффициент объемного сжатия воды равен $5 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$.

Решение. При сжатии масса воды не изменяется. Объем, занимаемый водой, уменьшается на относительную величину

$$|\Delta W/W| = \beta_w \Delta p.$$

Так как плотность однородной жидкости $\rho = M/W$, а масса воды при сжатии не изменяется, то

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{W_2}{\left(1 - \dfrac{\Delta W}{W_1}\right) W_1} =$$

$$= \frac{1}{1 - \beta_w \Delta p} = \frac{1}{1 - 5 \cdot 10^{-10} \cdot 2{,}99 \cdot 10^7} = 1{,}015.$$

Таким образом, при давлении, равном $3 \cdot 10^7$ Па, плотность пресной воды равна 1015 кг/м^3. Отметим, что увеличение давления на $3 \cdot 10^7$ Па соответствует увеличению глубины, на которой находится данный объем воды, примерно на 300 м.

Пример 1.3. Определить высоту капиллярного поднятия воды и опускания ртути в стеклянной капиллярной трубке диаметром $d = 0{,}001$ м при температуре 20 °С.

Решение. Согласно формуле (1.17) высота капиллярного поднятия равна

$$h_{кап} = \frac{4\sigma \cos\theta}{\rho g d}.$$

По табл. 1.1 плотность воды при $t = 20$ °С равна 998,2 кг/м^3; поверхностное натяжение σ для воды равно 0,0726 Н/м. Тогда при $\theta = 0$ для воды

$$h_{кап} = \frac{4 \cdot 0{,}0726 \cdot 1}{998{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}001} = 0{,}0297 \text{ м}.$$

Для ртути при $\rho_{рт} = 13\,550$ кг/м^3 (при $t = 20$ °С), $\sigma = 0{,}49$ Н/м, $\theta = 50°$ получим

$$h_{кап} = \frac{4 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}643}{13\,550 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}001} = 0{,}0095 \text{ м}.$$

Глава 2

ГИДРОСТАТИКА

2.1. Напряженное состояние покоящейся жидкости. Гидростатическое давление

Рассмотрим массу M жидкости, находящейся в состоянии покоя (рис. 2.1) (в общем случае относительного покоя), когда жидкость в резервуаре, который движется с ускорением относительно Земли, неподвижна по отношению к резервуару.

Рассечем объем, занимаемый жидкостью, произвольной плоскостью на две части, содержащие соответственно массы M_1 и M_2, и отбросим одну из частей объема, например правую. Чтобы сохранить равновесие оставшейся в левой части массы жидкости M_1, необходимо приложить к ней силу, эквивалентную действию отброшенной массы M_2. Эта сила должна быть распределенной по площади рассечения ω. Напряжение этой силы в произвольной точке A площади ω определяется соотношением

$$\mathbf{p}_A = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta \omega}, \qquad (2.1)$$

где $\Delta\omega$ — элементарная площадка на площади рассечения, содержащая произвольную точку A; $\Delta\mathbf{P}$ — сила, действующая на площадку $\Delta\omega$. При предельном переходе площадка $\Delta\omega$ стягивается в точку A.

Покажем, что сила $\Delta\mathbf{P}$ и напряжение $\mathbf{p}$ направлены по внутренней нормали к площадке $\Delta\omega$. Действительно, если бы сила $\Delta\mathbf{P}$ была направлена не по нормали к площадке $\Delta\omega$, то эту силу можно было бы разложить на составляющие: нормальную и касательную к площадке $\Delta\omega$. Из-за текучести жидкости касательная составляющая привела бы жидкость в движение, т. е. в этом случае равновесие жидкости было бы невозможно.

Так как жидкость не сопротивляется растягивающим усилиям (см. гл. 1), то сила $\Delta\mathbf{P}$

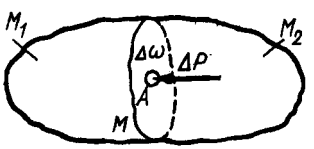


Рис. 2.1

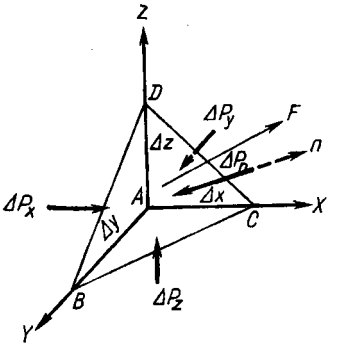


Рис. 2.2

может быть только сжимающей. Таким образом, по любой поверхности ω, проведенной внутри покоящейся жидкости, всегда действует только распределенная сжимающая сила.

Нормальное напряжение поверхностных сил в покоящейся жидкости направлено всегда по внутренней нормали к площадке действия.

Через произвольную точку A покоящейся жидкости можно провести бесчисленное множество секущих поверхностей, по-разному ориентированных в пространстве. На любой из них можно выбрать площадку $\Delta\omega$, содержащую точку A, и вычислить нормальное напряжение $\mathbf{p}_A = \lim\limits_{\Delta\omega\to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta\omega}$. При этом $\mathbf{p}_A$ всегда направлено по внутренней нормали к площадке $\Delta\omega$, т. е. направление $\mathbf{p}$ зависит от того, на какой из секущих поверхностей выбрана площадка $\Delta\omega$*.

Докажем, что в покоящейся жидкости значение нормального напряжения не зависит от ориентации $\Delta\omega$. Для этого выделим в покоящейся жидкости элементарную частицу в форме тетраэдра с ребрами Δx, Δy, Δz, выбранными вдоль координатных осей, и объемом $\Delta W = 1/6\ \Delta x \Delta y \Delta z$ (рис. 2.2).

Три грани тетраэдра $\Delta\omega_x$, $\Delta\omega_y$, $\Delta\omega_z$ лежат в координатных плоскостях, а четвертая грань $\Delta\omega_n$ наклонена и ориентирована нормально к направлению n

Отбросим окружающую тетраэдр жидкость и для сохранения равновесия выделенной частицы приложим к каждой грани тетраэдра поверхностные силы ΔP_x, ΔP_y, ΔP_z и ΔP_n.

Кроме поверхностных сил на жидкость, заключенную в тетраэдре, действует массовая сила $\rho\Delta W\ \mathbf{F}$ (см. § 1.2), плотность распределения которой $\mathbf{F}$. Проекции $\mathbf{F}$ на оси координат обозначим F_x, F_y, F_z.

Записав в проекциях на координатные оси уравнения равновесия жидкости, заключенной в тетраэдре, получим

$$\left.\begin{aligned} &\Delta P_x - \Delta P_n \cos(\widehat{n, x}) + F_x \rho \Delta W = 0 \\ &\text{или} \\ &\Delta P_x = \Delta P_n \cos(\widehat{n, x}) - F_x \rho \Delta W. \\ &\text{Аналогично} \\ &\Delta P_y = \Delta P_n \cos(\widehat{n, y}) - F_y \rho \Delta W \\ &\text{и} \\ &\Delta P_z = \Delta P_n \cos(\widehat{n, z}) - F_z \rho \Delta W. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

---

* Напряжение $\mathbf{p}$ в точках покоящихся жидкостей представляет собой необычный вектор, так как направление этого вектора зависит не только от координат рассматриваемых точек, но и от ориентации в пространстве площадок, на которые действует. Такие величины называются т е н з о р а м и.

В уравнениях (2.2) обозначения $(\widehat{n, x})$, $(\widehat{n, y})$, $(\widehat{n, z})$ относятся к углам, образуемым нормалью к грани $\Delta\omega_n$ с осями координат.

Если разделить каждый из членов первого уравнения (2.2) на площадь $\Delta\omega_x$, то получим

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta\omega_x} = \frac{\Delta P_n \cos(\widehat{n, x})}{\Delta\omega_x} - F_x\rho\frac{\Delta W}{\Delta\omega_x}.$$

Но $\Delta\omega_x = \Delta\omega_n \cos(\widehat{n, x})$ — площадь грани, перпендикулярной оси OX, т. е. грани ABD.

Так как объем тетраэдра $\Delta W = 1/6\ \Delta x\Delta y\Delta z$, а площадь грани $\Delta\omega_x = 1/2\ \Delta y\Delta z$, то можно записать

$$\frac{\Delta P_x}{\Delta\omega_x} = \frac{\Delta P_n}{\Delta\omega_n} - F_x\rho\frac{1}{3}\Delta x.$$

Стягивая тетраэдр в точку A, в пределе получаем

$$p_x = p_n.$$

Аналогично другие уравнения в (2.2) дадут соответственно

$$p_y = p_n \quad \text{и} \quad p_z = p_n,$$

откуда

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \tag{2.3}$$

Таким образом, доказано, что нормальное напряжение в любой точке покоящейся жидкости не зависит от направления действия. Это позволяет характеризовать напряженное состояние покоящейся жидкости в каждой точке скалярной величиной, представляющей значение нормального напряжения в этой точке. Эта величина называется гидростатическим давлением. (В дальнейшем слово «гидростатическое» опускается.)

Давление может быть неодинаковым в различных точках покоящейся жидкости:

$$p = f(x, y, z).$$

2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости

Рассмотрим жидкость, находящуюся в покое относительно неинерциальной системы координат x, y, z. Выделим в этой жидкости элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, параллельными соответствующим осям координат (рис. 2.3). Масса жидкости в параллелепипеде равна $\rho dxdydz$. Отбросим жидкость, окружающую параллелепипед, и заменим действие отброшенной жидкости силами. Это будут сжимающие поверхностные силы давления.

Кроме поверхностных сил на жидкость действуют массовые силы $\rho\mathbf{F}dW$. Плотность распределения массовых сил $\mathbf{F}$, ее проекции на координатные оси F_x, F_y, F_z.

Пусть давление в центре выделенного объема равно p. Так как давление является непрерывной функцией координат, то, разложив эту функцию в ряд Тейлора по приращению dx и ограничившись в этом разложении двумя первыми членами, получим выражения для давления в центрах боковых граней $ABKE$ и $DCGH$ соответственно:

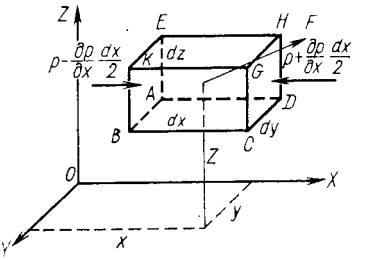


Рис. 2.3

$$p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}; \quad p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}.$$

Аналогично можно получить выражения для давления в центрах остальных граней.

Составим уравнения равновесия жидкости, заключенной в параллелепипеде. В направлении OX получим

$$F_x\rho dx\,dy\,dz+\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz=0,$$

откуда после сокращений

$$\rho F_x=\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Составив аналогочные уравнения в направлении OY и OZ, получим окончательно

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}&=\rho F_x;\\ \frac{\partial p}{\partial y}&=\rho F_y;\\ \frac{\partial p}{\partial z}&=\rho F_z.\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Уравнения (2.4) представляют собой систему уравнений равновесия; они были выведены Эйлером и называются уравнениями Эйлера.

Для любого направления можно получить уравнение равновесия в виде

$$\frac{\partial p}{\partial n}=\rho F_n.$$

Умножив уравнения (2.4) соответственно на dx, dy, dz и сложив их, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=\rho\,(F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz).$$

Левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал dp функции $p = f(x, y, z)$. Заменив левую часть на dp, получим

$$dp = \rho (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \tag{2.5}$$

Так как левая часть (2.5) представляет собой полный дифференциал и для однородной несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, то в правой части (2.5) выражение в скобках — полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, т. е.

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2.6}$$

Следовательно, поле массовых сил потенциальное. Тогда (2.5) принимает вид

$$dp = \rho dU$$

или

$$dp = -\rho d\Pi, \tag{2.7}$$

где $-d\Pi = dU$.

Функция $\Pi(x, y, z)$ выражает потенциальную энергию поля массовых сил.

Интегрируя (2.7) для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), получаем

$$p = -\rho\Pi + C \text{ или } p + \rho\Pi = C, \tag{2.8}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования.

Для двух точек одного и того же объема данной однородной несжимаемой жидкости уравнение (2.8) записывается в виде

$$p_1 + \rho\Pi_1 = p_2 + \rho\Pi_2. \tag{2.9}$$

2.3. Поверхности равного давления

Поверхность, во всех точках которой давление одинаково, называется поверхностью равного давления.

Обратившись к уравнению (2.5) и полагая в нем $dp = 0$ при $\rho \neq 0$, получаем дифференциальное уравнение семейства поверхностей равного давления

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \tag{2.10}$$

или

$$\Pi(x, y, z) = \text{const}. \tag{2.11}$$

Различные значения постоянной в (2.11) соответствуют различным поверхностям равного давления.

Свободная поверхность жидкости, т. е поверхность, граничащая с газовой средой, также является одной из поверхностей равного давления

При равновесии жидкости массовая сила в любой точке жидкости ориентирована по нормали к поверхности равного давления, проходящей через эту точку.

2.4. Равновесие однородной несжимаемой жидкости относительно Земли

Основное уравнение гидростатики. Рассмотрим жидкость, покоящуюся в сосуде, неподвижном относительно Земли. Для рассматриваемого случая действующей на жидкость массовой силой является только сила тяжести $\mathbf{G} = M\mathbf{g}$. Тогда $\mathbf{F} = \mathbf{g}$.

Направив ось OZ вертикально вверх, получим

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = -g,$$

а подставив полученные величины в (2.5), будем иметь

$$dp = -\rho g\, dz. \tag{2.12}$$

Интегрируя (2.12) в предположении $\rho = \text{const}$ и принимая, что в пределах рассматриваемого объема жидкости можно пренебречь изменением ускорения свободного падения по высоте z ($g = \text{const}$), получаем

$$p = -\rho g z + C$$

или

$$p + \rho g z = C, \tag{2.13}$$

где C — произвольная постоянная.

Разделив (2.13) на ρg, получим

$$z + p/\rho g = \text{const}. \tag{2.13а}$$

При делении на ρ уравнение (2.13) примет вид

$$gz + p/\rho = \text{const}. \tag{2.14}$$

Отметим, что члены уравнения (2.13а) отнесены к единице веса, а (2.14) — к единице массы.

Для двух точек одного и того же объема покоящейся жидкости уравнения (2.13а) и (2.14) соответственно представляются в виде

$$z_1 + p_1/\rho g = z_2 + p_2/\rho g; \tag{2.15}$$

$$gz_1 + p_1/\rho = gz_2 + p_2/\rho. \tag{2.16}$$

Уравнения (2.15) и (2.16) выражают гидростатический закон распределения давления в однородной несжимаемой жидкости, покоящейся относительно Земли. Уравнение (2.15) обычно называют основным уравнением гидростатики.

Поверхности равного давления. Для рассматриваемого случая равновесия, когда единственной массовой силой, действующей на

жидкость, является сила тяжести, поверхности равного давления $p = \text{const}$ представляют собой семейство горизонтальных плоскостей.

Действительно, из (2.12) при $dp = 0$ получаем $dz = 0$, т. е.

$$z = C. \tag{2.17}$$

Каждому значению C соответствует плоскость, в точках которой давление имеет определенное постоянное значение. Свободная поверхность жидкости в данном случае является одной из плоскостей равного давления. Здесь следует указать, что полученный вывод справедлив лишь в пределах сравнительно небольших поверхностей, для которых можно считать вектор ускорения свободного падения вертикальным.

Если рассматривать массу жидкости, имеющей большую поверхность, например поверхность моря, то становится очевидным, что необходимо учитывать действительное направление вектора ускорения свободного падения (по радиусу к центру Земли), а также то, что поверхности равного давления (и в том числе свободная поверхность) в этом случае не будут горизонтальными. Основное уравнение гидростатики можно записать иначе. Рассмотрим жидкость, покоящуюся в открытом резервуаре (рис. 2.4).

Пусть необходимо определить давление p в точке A на уровне z. Применим основное уравнение гидростатики (2.15) к точке A и к точке B, расположенной на свободной поверхности жидкости на уровне z_0. Давление на свободной поверхности равно p_0, его называют внешним давлением. Оно может быть равным атмосферному ($p_0 = p_{ат}$), большим ($p_0 > p_{ат}$) или меньшим ($p_0 < p_{ат}$) атмосферного.

Из основного уравнения гидростатики (2.15) имеем

$$z + p/\rho g = z_0 + p_0/\rho g.$$

Отсюда

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z), \tag{2.18}$$

где $z_0 - z = h$; h — глубина погружения точки под свободной поверхностью.

Тогда

$$p = p_0 + \rho g h. \tag{2.19}$$

Величину $\rho g h$ называют **весовым давлением**, так как она равна весу столба жидкости при единичной площади и высоте h.

Таким образом, по (2.19) давление в точке покоящейся жидкости, находящейся на глубине h под свободной поверхностью, равно сумме внешнего давления p_0 и давления $\rho g h$.

Иногда давление p называют **абсолютным давлением** и обозначают $p_{абс}$.

Избыточное и вакуумметрическое давление. Избыточным давлением называют разность

$$p_{изб} = p - p_{ат} = p_0 + \rho g h - p_{ат}. \qquad (2.20)$$

В гидротехнических сооружениях, как правило, на свободной поверхности жидкости давление равно атмосферному ($p_0 = p_{ат}$). В этих случаях

$$p_{изб} = \rho g h, \qquad (2.21)$$

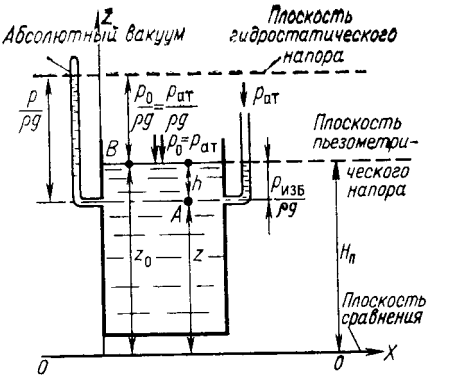


Рис. 2.4

где h — глубина погружения рассматриваемой точки под свободной поверхностью жидкости. Таким образом, при $p_0 = p_{ат}$ избыточное и весовое давления совпадают.

Если давление в жидкости меньше атмосферного, то напряженное состояние жидкости характеризуется значением разрежения (вакуума).

Вакуумметрическое давление

$$p_{вак} = p_{ат} - p. \qquad (2.22)$$

Давление измеряется с помощью пьезометров, манометров и вакуумметров.

Эпюры давления. Закон распределения в жидкости гидростатического давления легко изобразить графически в виде эпюр давления. Для этого нужно представить давление вектором, направление которого совпадает с направлением давления, а его значение пропорционально значению давления.

Эпюры всегда следует строить со стороны жидкости, помня о направлении действия нормальных напряжений в покоящейся жидкости (во внутренней нормали). Так, для плоской наклонной стенки, восстановив в каждой ее точке перпендикуляры, равные $p_i = p_0 + \rho g h_i$ для давления и $p_{изб} = \rho g h_i$ для избыточного давления (при $p_0 = p_{ат}$), и объединив концы этих отрезков, получим соответствующие эпюры давления (рис. 2.5); h_i — глубина погружения рассматриваемой i-й точки под свободной поверхностью.

В ряде случаев жидкости могут быть расслоенными (стратифицированными). Слои с переменной плотностью могут быть представлены жидкостями различного состава (вода, масла, нефть, керосин и т. п.), или солевыми растворами с различной концентрацией, или водой с различным по глубине содержанием взвешенных твердых частиц, например в водохранилище. Наконец, это может быть жидкость с переменной температурой в разных слоях, например вода в прудах-охладителях тепловых и атомных электростанций.

Равновесие таких жидкостей возможно, только если плотность постоянна в пределах каждого горизонтального слоя и слои с большей плотностью на-

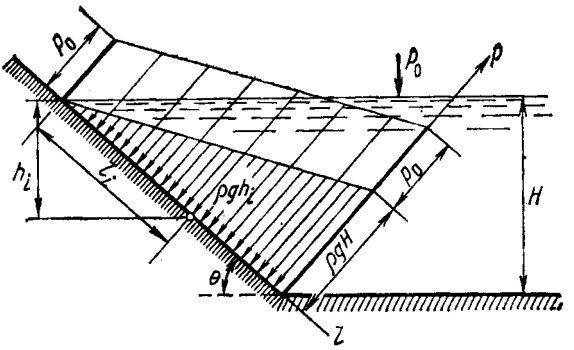


Рис. 2.5

ходятся ниже слоев с меньшей плотностью. При построении эпюр давления следует учесть, что плотность ρ в разных слоях таких жидкостей различна.

Закон Паскаля. Применив основное уравнение гидростатики к двум точкам покоящейся жидкости $z_1 + p_1/\rho g = z_2 + p_2/\rho g$, изменим давление в первой точке на Δp_1, не нарушая равновесия жидкости. Тогда во второй точке давление должно измениться на некоторое значение Δp_2. Из основного уравнения гидростатики следует, что

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2 + \Delta p_2}{\rho g}$$

или

$$\Delta p_1 = \Delta p_2,$$

т. е. изменение давления в любой точке покоящейся жидкости передается в остальные ее точки без изменений. Это положение называется законом Паскаля.

Сообщающиеся сосуды. Допустим, что имеются два сообщающихся сосуда, содержащих жидкости с различными плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 2.6). Сосуды открыты, и внешнее давление на их свободных поверхностях одинаково: $p_{01} = p_{02} = p_{ат}$. Поверхность раздела жидкостей, являясь поверхностью равного давления, будет горизонтальной плоскостью. Следовательно, $\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$. Отсюда

$$h_1/h_2 = \rho_2/\rho_1.$$

При разнородных жидкостях в открытых сообщающихся сосудах высоты уровней над плоскостью раздела жидкостей будут обратно пропорциональны плотностям жидкостей.

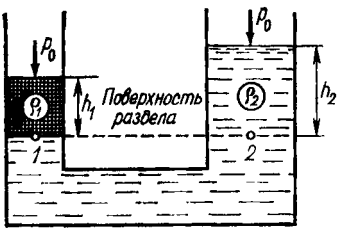


Рис. 2.6

2.5. Геометрическая интерпретация основного уравнения гидростатики

Ордината z рассматриваемой точки жидкости отсчитывается от произвольной горизонтальной плоскости XOY, принятой в качестве координатной. В гидравлике эту плоскость называют плоскостью сравнения, а отсчитанную от нее ординату z точки — геометрической высотой точки, или высотой положения точки, или геометрическим напором в данной точке жидкости. На рис. 2.7 плоскость сравнения показана линией 0—0.

Величина $p/\rho g$ имеет линейную размерность $[L^{-1}MT^{-2}]/[L^{-3}M][LT^{-2}] = [L]$ и представляет собой геометрическую высоту, на которую поднимется жидкость под действием давления p. Указанную высоту можно измерить, если подсоединить к сосуду трубку, из которой полностью удален воздух. Жидкость в трубке поднимется на высоту $p/\rho g$. Если трубка открыта и давление на свободной поверхности равно атмосферному, жидкость в трубке поднимется на высоту $p_{изб}/\rho g$, соответствующую избыточному давлению.

Высота $p/\rho g$ соответствует давлению p. Высота $p_{изб}/\rho g$ называется пьезометрической высотой. Высота, соответствующая давлению $p_{вак}$, называется вакуумметрической высотой. Эта высота может быть измерена с помощью простейшего вакуумметра (рис. 2.8).

Сумму высот $z + p/\rho g$ называют гидростатическим напором H. Пьезометрический напор $H_п$ меньше гидростатического напора на высоту, соответствующую атмосферному давлению, т. е. $p_{ат}/\rho g$.

Отложив от плоскости сравнения по вертикали отрезки $z + p/\rho g$ для различных точек покоящейся жидкости, обнаружим,

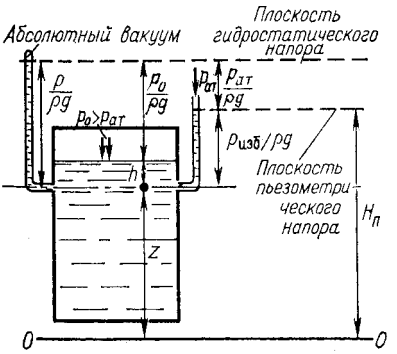


Рис. 2.7

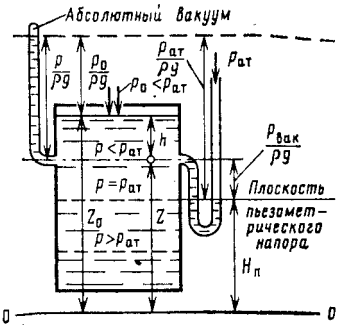


Рис. 2.8

что геометрическое место концов таких отрезков будет представлять собой горизонтальную плоскость, расположенную на расстоянии $z + p/\rho g$ от плоскости сравнения. Такая плоскость называется плоскостью гидростатического напора, а если откладывать отрезки $z + p_{изб}/\rho g$ — то плоскостью пьезометрического напора.

Если давление на свободной поверхности равно атмосферному, то плоскость пьезометрического напора совпадает со свободной поверхностью. При $p_0 \neq p_{ат}$ положения плоскости пьезометрического напора могут быть различными в зависимости от соотношения $p_0 > p_{ат}$ или $p_0 < p_{ат}$ (рис. 2.7, 2.8).

2.6. Относительный покой (равновесие жидкости в движущемся сосуде)

При равновесии в движущемся сосуде жидкость движется вместе с сосудом как единое целое, т. е. находится в состоянии относительного покоя.

А. Цилиндрический сосуд, равномерно вращающийся относительно вертикальной оси. Рассмотрим цилиндрический сосуд радиусом R (рис. 2.9), заполненный до некоторого уровня жидкостью плотностью ρ и приведенный во вращение с постоянной угловой скоростью ω относительно вертикальной оси. Через некоторое время после начала вращения сосуда жидкость под действием сил трения будет вращаться с той же скоростью, что и сосуд. Установится равновесие жидкости относительно сосуда или, иначе говоря, относительно вращающейся вместе с сосудом неинерциальной системы координат x, y, z. При написании уравнений равновесия в неинерциальной системе необходимо в число действующих сил вводить переносную силу инерции. В рассматриваемом случае такой силой является центробежная сила, направленная вдоль радиуса и равная $\Delta M\omega^2 r$ для элементарной массы ΔM, вращающейся на расстоянии r от вертикальной оси. Кроме центробежной силы на любую частицу ΔM действует сила тяжести ΔMg. Проекции вектора плотности распределения массовых сил при этом;

от силы тяжести

$$F_{x_1} = 0; \quad F_{y_1} = 0; \quad F_{z_1} = -g;$$

от переносной силы инерции

$$F_{x_2} = \omega^2 x; \quad F_{y_2} = \omega^2 y; \quad F_{z_2} = 0,$$

где x и y — горизонтальные координаты произвольно выбранной точки A жидкости.

Рассмотрим следующие два вопроса.

Форма поверхностей равного давления. Используем уравнение поверхности равного давления (2.10)

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = 0$$

и, подставляя в него выражения для F_x, F_y и F_z, найдем

$$\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz = 0.$$

После интегрирования получим

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) - gz = C$$

или, поскольку $x^2 + y^2 = r^2$,

$$\omega^2 r^2/2 - gz = C. \qquad (2.23)$$

Из (2.23) ясно, что поверхности равного давления в рассматриваемом случае представляют собой семейство конгруэнтных[1] параболоидов вращения с вертикальной осью. Различным значениям постоянной C соответствуют разные параболоиды равного давления.

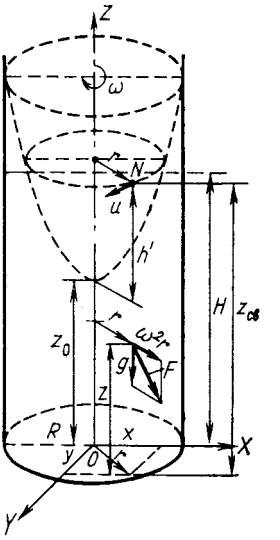


Рис. 2.9

Свободная поверхность также является поверхностью равного давления, во всех точках которой давление равно внешнему давлению p_0.

Найдем значение произвольной постоянной C для параболоида свободной поверхности. Координаты вершины параболоида $x = 0$, $y = 0$, $z_{св} = z_0$. Подставив эти координаты в уравнение (2.23), получим

$$C_0 = -gz_0.$$

Уравнение свободной поверхности

$$z_{св} - z_0 = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2)$$

или

$$z_{св} - z_0 = \omega^2 r^2/2g. \qquad (2.24)$$

Частица жидкости, находящейся в состоянии относительного покоя во вращающемся сосуде, расположенная на расстоянии радиуса r от оси вращения, имеет линейную скорость $u = \omega r$. Высота, на которую поднята над вершиной параболоида точка свободной поверхности (например, N), равна

$$h' = z_{св} - z_0 = \omega^2 r^2/2g = u^2/2g. \qquad (2.25)$$

Ордината z_0 вершины параболоида свободной поверхности при заданной угловой скорости зависит от объема жидкости в сосуде. Если до вращения сосуда уровень жидкости был горизонтальным и устанавливался на высоте H, то объем жидкости равнялся $\pi R^2 H$. При вращении сосуда свободная поверхность становится парабо-

[1] Конгруэнтный — совмещающийся при наложении.

лической, форма объема жидкости изменяется, а его значение при $\rho = \text{const}$, остается неизменным:

$$\int_0^R (z_0 + \omega^2 r^2/2g)\, 2\pi r\, dr = \pi R^2 H.$$

После интегрирования имеем

$$H = z_0 + \omega^2 R^2/4g$$

или

$$z_0 = H - \omega^2 R^2/4g.$$

Полагая $z_0 = 0$, найдем угловую скорость ω, при которой свободная поверхность жидкости коснется дна сосуда:

$$\omega = 2\sqrt{gH}/R.$$

Закон распределения давлений. Используя дифференциальное уравнение равновесия жидкости (2.5) и подставляя в него проекции плотности распределения массовых сил, получаем

$$dp = \rho\,[\omega^2 (x\,dx + y\,dy) - g\,dz]. \qquad (2.26)$$

После интегрирования уравнения (2.26) имеем

$$p = \rho\,(\omega^2 r^2/2 - gz) + C_1. \qquad (2.27)$$

Подставив в уравнение (2.27) координаты вершины параболоида свободной поверхности $r = 0$, $z = z_0$ и давление $p = p_0$, найдем C_1:

$$C_1 = p_0 - \rho\,(-gz_0) = p_0 + \rho g z_0.$$

Подставив найденное значение C_1 в (2.27), получим

$$p = p_0 + \rho g\,(z_0 - z) + \rho\omega^2 r^2/2 = p_0 + \rho g\,(z_0 - z + \omega^2 r^2/2g). \qquad (2.28)$$

Так как по (2.25) $\omega^2 r^2/2g = h'$ для любой точки, то можно переписать (2.28) в виде

$$p = p_0 + \rho g\,(z_0 - z + h')$$

или

$$p = p_0 + \rho g h, \qquad (2.29)$$

где h — глубина погружения точки под свободной поверхностью, т. е. измеренное по вертикали расстояние от свободной параболической поверхности до рассматриваемой точки. Таким образом, в жидкости, покоящейся в равномерно вращающемся сосуде, давление по вертикали распределяется по гидростатическому закону.

Б. Сосуд, движущийся горизонтально и прямолинейно с постоянным ускорением. Рассмотрим равновесие (относительный покой) жидкости, находящейся в сосуде, перемещающемся горизонтально с постоянным положительным ускорением a (рис. 2.10). В этом случае из массовых сил действуют сила тяжести и сила инерции, направление которой противоположно направлению движения.

Применив уравнение (2.5), получим

$$dp = \rho (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

или

$$dp = \rho (-a\,dx + 0 - g\,dz).$$

После интегрирования найдем

$$p = -\rho ax - \rho gz + C.$$

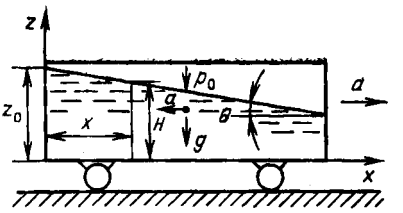


Рис. 2.10

Уравнение поверхностей равного давления будет иметь вид

$$\rho ax + \rho gz = C.$$

Таким образом, поверхности равного давления в данном случае представлены семейством параллельных плоскостей, отличающихся значениями постоянной C.

Одна из таких плоскостей — свободная поверхность. Для точки на свободной поверхности с $z = z_0$ и $x = 0$ имеем

$$C_0 = \rho g z_0,$$

тогда $ax + gz = gz_0$ и $z - z_0 = -xa/g$.

Свободная поверхность наклонена к горизонту под углом

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{g}\right).$$

Таким образом, положение свободной поверхности не зависит от рода жидкости, т. е. от ρ.

При равнозамедленном движении свободная поверхность также будет плоскостью, но наклоненной в другую сторону.

Распределение давлений найдем из уравнения

$$dp = \rho (-a\,dx - g\,dz).$$

После интегрирования получаем

$$p = -\rho ax - \rho gz + C_1.$$

Подставляя значения $p = p_0$ и $z = z_0$, для $x = 0$ получаем

$$p_0 = -\rho g z_0 + C_1$$

или

$$C_1 = p_0 + \rho g z_0.$$

Далее вновь для $x = 0$ получаем

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z).$$

Для любого данного вертикального сечения, характеризующегося постоянной для него координатой x, получим, что распределение давлений подчиняется линейному закону

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) + \rho ax.$$

В. Сосуд, движущийся вертикально с постоянным ускорением. В этом случае положительные значения ускорения a соответствуют равноускорен-

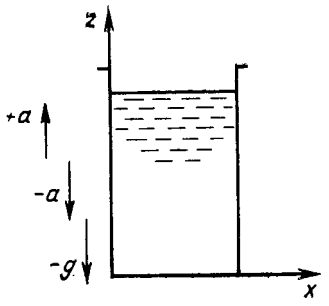


Рис. 2.11

ному подъему, а отрицательные — равноускоренному опусканию (рис. 2.11).

Уравнение поверхностей равного давления примет вид

$$\rho(-g \pm a)\,dz = 0,$$

так как $F_x = F_y = 0$.

Если выражение $(-g \pm a)$ не равно нулю, то $dz = 0$ и тогда $z = \text{const}$. Значит, при относительном покое в сосуде, движущемся вертикально с постоянным ускорением, поверхности равного давления — горизонтальные плоскости.

Из (2.5) применительно к данному случаю имеем

$$dp = \rho(-g \pm a)\,dz$$

и тогда

$$p = \rho(-g \pm a)\,z + C.$$

Определив значение C из условий на свободной поверхности $z = z_0$ и $\tilde{p} = p_0$, получаем $p = p_0 + \rho g\,[1 \pm (a/g)]/(z_0 - z)$. И в этом случае давление распределяется по линейному закону.

2.7. Силы давления покоящейся жидкости на горизонтальные и наклонные плоские площадки (стенки)

Рассмотрим жидкость, покоящуюся относительно Земли. Выберем в жидкости горизонтальную площадку ω. Все точки этой площадки находятся на одинаковой глубине и испытывают одинаковое давление со стороны покоящейся жидкости. Если свободная поверхность жидкости открыта в атмосферу ($p_0 = p_{ат}$), то сила избыточного давления на площадку ω определяется по формуле

$$P_{изб} = \rho g h \omega, \qquad (2.30)$$

т. е. численно равна весу жидкости, заключенной в вертикальной призме основанием ω и высотой h.

Сила $P_{изб}$ направлена со стороны жидкости перпендикулярно стенке. Линия действия силы пересекает площадку ω в центре тяжести, так как давление распределено по площадке равномерно.

Из (2.30) очевидно, что сила избыточного гидростатического давления на дно сосуда зависит от плотности жидкости, площади дна и высоты заполнения сосуда жидкостью.

При равенстве p_0, плотностей ρ, площадей основания ω и глубин h независимо от формы сосуда сила давления на горизонтальное дно будет одной и той же (рис. 2.12) (гидростатический парадокс).

Рассмотрим плоскую стенку с площадью смоченной части ω, наклоненную к горизонту под углом θ (рис. 2.13). Гидростатическое давление жидкости не остается постоянным в пределах смоченной части стенки. Разбив площадь ω на элементарные площадки $d\omega$

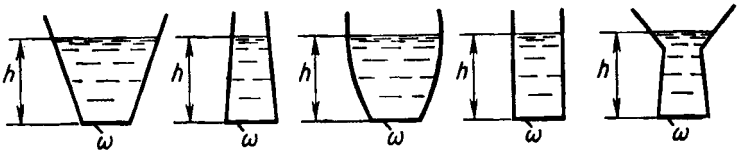


Рис. 2.12

и считая в пределах $d\omega$ давление неизменным, выразим значение силы давления dP на элементарную площадку как $dP = p\,d\omega$. Вектор $d\mathbf{P}$ направлен со стороны жидкости по нормали к площадке. Суммарное воздействие жидкости сведется к равнодействующей силе $\mathbf{P}$, значение которой определяется с учетом (2.19) по соотношению

$$P_{абс} = \int_{\omega} (p_0 + \rho g h)\,d\omega = p_0\omega + \int_{\omega} \rho g h\,d\omega. \qquad (2.31)$$

Так как расстояние l, измеряемое по стенке от линии уреза воды (от оси OY) до элементарной площадки $d\omega$, равно $l = h/\sin\theta$, то при $\rho g = \text{const}$ получим

$$\int_{\omega} \rho g h\,d\omega = \rho g \sin\theta \int_{\omega} l\,d\omega.$$

Интеграл $\int_{\omega} l\,d\omega$ представляет собой статический момент площади ω относительно оси OY, т. е. в данном случае относительно

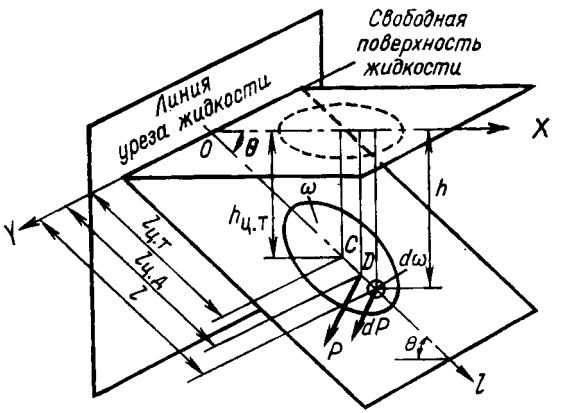


Рис. 2.13

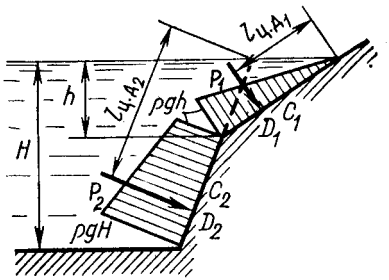


Рис. 2.14

линии уреза жидкости. Статический момент равен произведению площади ω на плечо $l_{ц.т}$ момента:

$$\int_{\omega} h\,d\omega = \sin\theta \int_{\omega} l\,d\omega =$$

$$= \sin\theta\, l_{ц.т}\omega = h_{ц.т}\omega. \quad (2.32)$$

Выражение (2.31) примет вид

$$P_{абс} = (p_0 + \rho g h_{ц.т})\,\omega. \quad (2.33)$$

Сила давления покоящейся жидкости на плоскую наклонную стенку равна произведению площади ω на давление жидкости в центре тяжести смоченной части стенки. Сила направлена со стороны жидкости по нормали к стенке.

При $p_0 = p_{ат}$ сила избыточного давления равна

$$P_{изб} = \rho g h_{ц.т}\omega. \quad (2.34)$$

Далее силу избыточного давления (при $p_0 = p_{ат}$) будем обозначать P (без индекса).

Сравним (2.30) и (2.34). Очевидно, что структура этих расчетных формул одна и та же, но в (2.30) входит h — глубина погружения любой точки горизонтальной поверхности, а для наклонной плоской стенки в (2.34) входит $h_{ц.т}$ — глубина погружения центра тяжести смоченной площади. Следует всегда помнить об этом различии.

Линия действия силы P пересекает площадку в точке D (рис. 2.13), которая называется центром давления.

Центр давления не совпадает с центром тяжести площади ω, поэтому необходимо определять координаты центра давления.

Сила $P_0 = p_0\omega$, связанная с действием в каждой точке смоченной площади ω одного и того же давления p_0, приложена в центре тяжести смоченной площади (точке C). Сила P приложена в другой точке, не совпадающей с точкой C.

Если необходимо найти точку приложения суммарной силы $P_{абс}$, то ее определяют по правилу сложения сил.

Обычно для расчетов гидротехнических сооружений представляют интерес сила избыточного давления P (при $p_0 = p_{ат}$) и координаты точки ее приложения. В дальнейшем будем называть центром давления точку приложения силы P (рис. 2.14).

Пусть рассматриваемая площадь ω имеет вертикальную ось симметрии (ее след — линия Ol на рис. 2.13). Тогда центр давления D будет расположен на оси симметрии и для определения его положения достаточно найти расстояние от линии уреза жидкости до точки D, т. е. $l_{ц.д}$.

Воспользуемся теоремой моментов: момент равнодействующей относительно произвольной оси силы равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси. За ось моментов в данном случае примем линию уреза жидкости, т. е. ось OY. Тогда

$$P l_{\text{ц. д}} = \int_{\omega} l \, \mathrm{d}P. \tag{2.35}$$

Помня, что

$$P = \rho g h_{\text{ц. т}} \omega; \quad \mathrm{d}P = \rho g h \, \mathrm{d}\omega = \rho g \sin\theta l \, \mathrm{d}\omega,$$

подставим эти значения в (2.35):

$$\rho g h_{\text{ц. т}} \omega l_{\text{ц. д}} = \rho g \sin\theta \int_{\omega} l^2 \, \mathrm{d}\omega = \rho g \sin\theta J_y, \tag{2.36}$$

где J_y — момент инерции смоченной площади ω относительно оси, совпадающей с линией уреза жидкости (оси OY).

Из (2.36) имеем

$$l_{\text{ц. д}} = \sin\theta J_y / \omega h_{\text{ц. т}} = J_y / \omega l_{\text{ц. т}}. \tag{2.37}$$

Перенесем ось момента инерции в центр тяжести площади.

Моменты инерции относительно параллельных осей связаны между собой соотношением

$$J_y = J_0 + \omega l^2_{\text{ц. т}},$$

где J_0 — момент инерции смоченной площади относительно оси, проходящей параллельно линии уреза жидкости через центр тяжести C этой площадки.

Подставив значение J_y в (2.37), получим

$$l_{\text{ц. д}} = l_{\text{ц. т}} + J_0 / \omega l_{\text{ц. т}} \tag{2.38}$$

или

$$l_{\text{ц. д}} = l_{\text{ц. т}} + J_0 / S, \tag{2.39}$$

где $S = \omega l_{\text{ц. т}}$ — статический момент смоченной площади относительно линии уреза жидкости.

Центр давления силы избыточного давления на плоскую наклонную площадку расположен ниже центра тяжести смоченной площади, считая по оси симметрии (по наклону) стенки, на $J_0/(\omega l_{\text{ц. т}})$.

Отметим, что при ломаной наклонной стенке $l_{\text{ц. д}}$ определяется для каждого из участков стенки относительно линии пересечения этого участка (или его продолжения) со свободной поверхностью (см. рис. 2.14).

Следует обратить внимание на то, что при увеличении $l_{\text{ц. т}}$ разница значений $l_{\text{ц. д}}$ и $l_{\text{ц. т}}$ (для той же самой смоченной плоской поверхности) уменьшается.

В приложении (табл. П.2.1) приведены сводные данные по рассмотренным характерным величинам для различных плоских фигур.

2.8. Силы давления покоящейся жидкости на цилиндрические стенки

Рассмотрим некоторую ограниченную часть твердой цилиндрической поверхности, которую назовем цилиндрической стенкой. Пусть рассматриваемая стенка находится под односторонним воздействием покоящейся жидкости, которое сводится к тому, что в каждой точке на стенку действует давление жидкости. Разобьем стенку на элементарные площадки. В силу малости площадок будем считать их плоскими и выразим элементарную силу давления на них в общем виде: $\mathrm{d}P = p\,\mathrm{d}\omega$. Силы $\mathrm{d}P$ уже не будут направлены параллельно друг другу, их линии действия могут не пересекаться в одной точке, и их сумма может не сводиться к одной равнодействующей.

Для цилиндрической стенки кругового очертания элементарные силы давления, будучи нормальными к элементарным площадкам на этих поверхностях, направлены по радиусам и, следовательно, пересекутся в центре сферы или в центре круга (поперечного сечения цилиндра).

Определение сил давления на цилиндрические и шаровые поверхности имеет важное значение, так как в гидротехнических сооружениях обычно применяются конструкции с такими поверхностями (секторные, сегментные, вальцовые и шаровые затворы, водонапорные баки и т. п.).

Рассмотрим цилиндрические стенки, находящиеся под односторонним воздействием покоящейся жидкости. Определим силу избыточного давления. При этом условимся одну из осей координат направлять вдоль образующей цилиндрической поверхности.

Цилиндрическая поверхность с горизонтальной образующей. Направим ось OY параллельно образующей (рис. 2.15), а ось OZ — вертикально вверх.

Значение силы давления на цилиндрическую поверхность в данном случае определяется следующим образом:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}, \tag{2.40}$$

где P_x и P_z — горизонтальная и вертикальная составляющие силы давления.

Выделим на цилиндрической поверхности элементарную площадку $\mathrm{d}\omega$, на которую действует направленная по нормали элементарная сила $\mathrm{d}P = \rho g h\,\mathrm{d}\omega$. Найдем горизонтальную $\mathrm{d}P_x$ и вертикальную $\mathrm{d}P_z$ составляющие силы $\mathrm{d}P$:

$$\mathrm{d}P_x = \mathrm{d}P\cos\left(\widehat{\mathrm{d}P,\ OX}\right) = \rho g h\,\mathrm{d}\omega\cos\left(\widehat{\mathrm{d}P,\ OX}\right);$$

$$\mathrm{d}P_z = \mathrm{d}P\cos\left(\widehat{\mathrm{d}P,\ OZ}\right) = \rho g h\,\mathrm{d}\omega\cos\left(\widehat{\mathrm{d}P,\ OZ}\right).$$

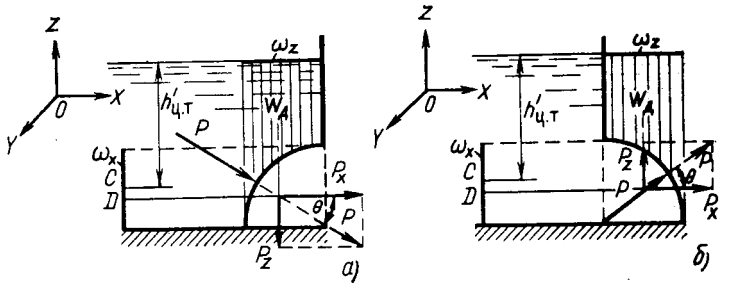


Рис. 2.15

Учитывая, что

$$d\omega \cos\left(d\widehat{P, OX}\right) = d\omega_x;$$

$$d\omega \cos\left(d\widehat{P, OZ}\right) = d\omega_z,$$

имеем

$$dP_x = \rho g h \, d\omega_x;$$

$$dP_z = \rho g h \, d\omega_z,$$

где $d\omega_x$ — проекция элементарной площадки $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную оси OX; $d\omega_z$ — проекция элементарной площадки $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную оси OZ.

Проинтегрировав, получим для горизонтальной составляющей силы P

$$P_x = \rho g h'_{ц.т} \omega_x, \tag{2.41}$$

где ω_x — проекция всей цилиндрической поверхности на плоскость, нормальную к оси OX; $h'_{ц.т}$ — глубина центра тяжести проекции ω_x под пьезометрической плоскостью.

Для вертикальной составляющей получим

$$P_z = \rho g \int_{\omega_z} z \, d\omega_z.$$

Сила P_x проходит через центр давления плоской вертикальной проекции цилиндрической поверхности на плоскость ZOY. Площадь указанной проекции ω_x. Расстояние от свободной поверхности до центра давления в этом случае (плоская вертикальная проекция)

$$l_{ц.д} = h_{ц.д} = h'_{ц.т} + \frac{J_0}{\omega h'_{ц.т}}.$$

Интеграл $\int_{\omega_z} z \, d\omega_z$ представляет собой объем призмы, ограниченной снизу цилиндрической поверхностью, а сверху — ее проекцией ω_z на пьезометрическую плоскость. Направляющие

этой призмы — вертикальные прямые. Полученное таким образом тело называется т е л о м д а в л е н и я.

Вертикальная составляющая P_z численно равна весу жидкости в объеме тела давления:

$$P_z = \rho g \int\limits_{\omega_z} z \, d\omega_z = \rho g W_д, \tag{2.42}$$

где $W_д = \int\limits_{\omega_z} z \, d\omega_z$ — объем тела давления. На рис. 2.15 тело давления заштриховано вертикальными линиями.

Горизонтальная составляющая P_x проходит через центр давления проекции ω_x, а вертикальная составляющая P_z — через центр тяжести тела давления.

Направление вертикальной составляющей P_z для схемы, изображенной на рис. 2.15, *а*,— вниз, а на рис. 2.15, *б* — вверх.

Из рис. 2.15, *а* видно, что при построении тела давления криволинейная (в данном случае цилиндрическая) поверхность проектируется на свободную поверхность (рис. 2.15, *а*) или на ее продолжение (рис. 2.15, *б*). В первом случае жидкость заполняет тело давления, вертикальная составляющая P_z направлена вниз; во втором случае жидкость не заполняет тело давления и вертикальная составляющая силы давления направлена вверх.

Направление линии действия силы P определяется направляющими косинусами

$$\cos\left(\widehat{P, OX}\right) = P_x/P; \tag{2.43}$$

$$\cos\left(\widehat{P, OZ}\right) = P_z/P. \tag{2.44}$$

Некоторые примеры к определению сил P_z применительно к рассматриваемым здесь случаям приведены на рис. 2.16.

В практике часто применяются сегментные затворы с различным расположением их оси вращения по отношению к уровню воды в верхнем бьефе (т. е. перед затвором), поэтому в приложении (табл. П. 2.2) приведены необходимые в расчетах формулы для определения вертикальной составляющей силы избыточного гидростатического давления.

Цилиндрическая стенка с вертикальной образующей. Направим ось OZ параллельно образующей цилиндра, а оси OX и OY расположим в горизонтальной плоскости. На плоскость, нормальную к оси OZ, цилиндрическая поверхность проектируется в виде линии, т. е. $\omega_z = 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2}; \\ P_x &= \rho g h'_{ц.\,т} \omega_x; \\ P_y &= \rho g h''_{ц.\,т} \omega_y. \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

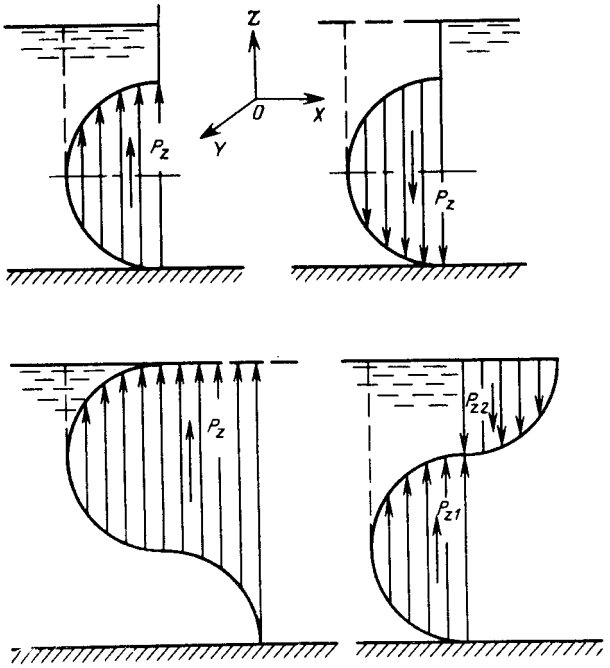


Рис. 2.16

Направление линии действия силы P определяется направляющими косинусами

$$\cos\left(\widehat{P, OX}\right) = P_x/P;$$

$$\cos\left(\widehat{P, OY}\right) = P_y/P.$$

Для цилиндрической поверхности в виде четверти боковой поверхности цилиндра радиусом r и высотой h с вертикальной образующей (рис. 2.17)

$$\omega_x = hr; \quad h'_{\text{ц. т}} = 0{,}5h;$$

$$\omega_y = hr; \quad h''_{\text{ц. т}} = 0{,}5h.$$

Прямолинейная труба круглого поперечного сечения с вертикальной осью заполнена покоящейся жидкостью под постоянным давлением. Пусть ось трубы расположена вертикально. Найдем силу, действующую на стенки трубы (рис. 2.18). Горизонтальная сила P_x, стремящаяся разорвать трубу по вертикальному диаметральному сечению, при давлении p будет равна

$$P_x = p\omega_x = plD,$$

где l — длина трубы.

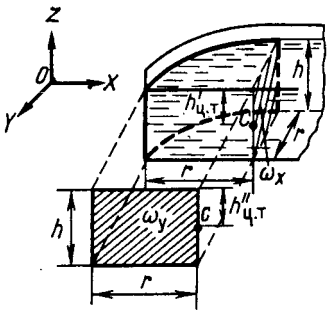


Рис. 2.17

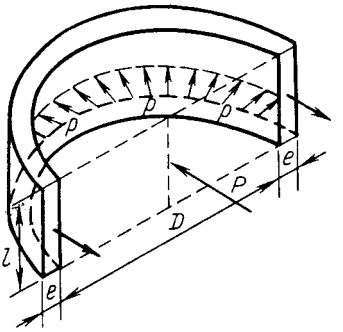


Рис. 2.18

Эта сила действует на трубу как растягивающая. Она уравновешивается силами сопротивления, возникающими в материале, из которого изготовлена труба. Сила сопротивления распределена по площади осевого сечения трубы $2el$, где e — толщина стенки. Нормальное напряжение в материале стенок трубы определится при этом по формуле Мариотта

$$\sigma = pD/2e. \tag{2.46}$$

Произвольная криволинейная стенка *abcd* (рис. 2.19). В этом случае составляющие силы P по направлениям горизонтальных осей OX и OY (P_x и P_y) и вертикальной оси OZ (P_z) не равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \rho g h'_{ц.т}\omega_x; \\ P_y &= \rho g h''_{ц.т}\omega_y; \\ P_z &= \rho g W_д; \\ P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Если линии действия составляющих пересекаются, то воздействие жидкости сводится к одной силе P. Линия действия силы P определяется углами, образованными направлением P и направлениями координатных осей. Косинусы этих углов вычисляются по соотношениям

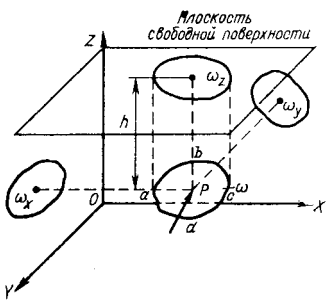


Рис. 2.19

$$\cos\left(P, \widehat{OX}\right) = P_x/P;$$

$$\cos\left(P, \widehat{OY}\right) = P_y/P;$$

$$\cos\left(P, \widehat{OZ}\right) = P_z/P.$$

2.9. Закон Архимеда. Плавание тел

Рассмотрим полностью погруженное в жидкость твердое тело, объем которого $W_т$, а форма такова, что любая прямая пересекает поверхность этого тела только в двух точках (рис. 2.20). Для определения силы P давления жидкости на тело воспользуемся результатами предыдущего параграфа.

Горизонтальные составляющие силы P_x и P_y взаимно уравновешиваются. Вертикальная составляющая силы давления равна весу жидкости в объеме тела.

Действительно, в данном случае имеем два тела давления: $ABMNAEF$, соответствующее давлению на верхнюю часть тела, и $AKMFE$, соответствующее давлению на нижнюю часть тела. Объем первого тела давления равен W_1, объем второго тела давления — W_2, причем $W_2 = W_1 + W_т$.

Вертикальная составляющая P_{z_1} равна весу жидкости в объеме W_1, т. е. $\rho g W_1$, и направлена по вертикали вниз. Вертикальная составляющая P_{z_2} равна весу жидкости в объеме W_2, т. е. $\rho g W_2$, и направлена по вертикали вверх.

Равнодействующая сила давления равна разности указанных составляющих:

$$P_z = P_{z_2} - P_{z_1}$$

или

$$P_z = \rho g W_т. \qquad (2.48)$$

Силу P_z называют а р х и м е д о в о й с и л о й.

Так как $P_x = P_y = 0$, то $P = P_z$.

Сила давления покоящейся жидкости на погруженное в нее тело — архимедова сила — равна весу жидкости $\rho g W$ в объеме, вытесненном телом, направлена по вертикали вверх и приложена в центре тяжести этого объема. Это и есть з а к о н А р х и м е д а.

Объем W вытесненной телом жидкости называется о б ъ е м н ы м в о д о и з м е щ е н и е м.

Центр тяжести объемного водоизмещения называется ц е н т р о м в о д о и з м е щ е н и я, или ц е н т р о м д а в л е н и я D (так как в этой точке приложена равнодействующая сил давления на тело).

При полном погружении тела объем W равен всему объему тела $W_т$, при неполном погружении $W < W_т$. Во втором случае архимедова сила равна

$$P_z = \rho g W.$$

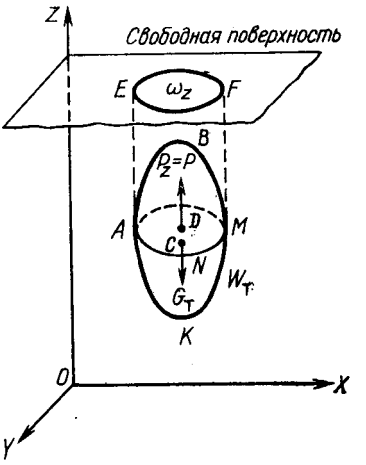


Рис. 2.20

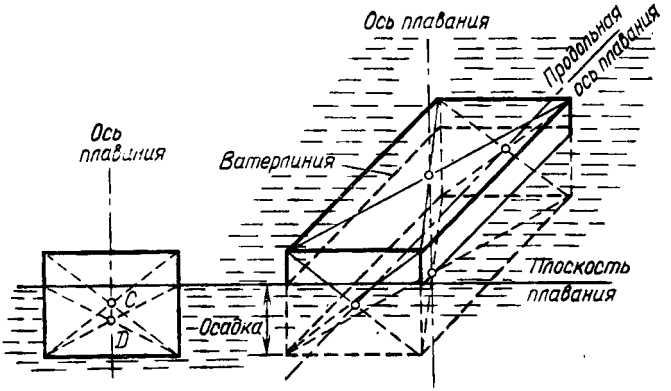


Рис. 2.21

Тело плавает, если вес тела $G_т$ равен архимедовой силе:

$$G_т = P = \rho g W. \tag{2.49}$$

Если вес тела больше архимедовой силы, то тело тонет (погружается), если меньше, оно всплывает.

Плавание может быть подводным (тело погружено полностью) или надводным (погружена в жидкость часть тела).

Из условия плавания $P = G_т$ для однородных тел следует

$$\rho g W = \rho_т g W_т$$

или

$$W/W_т = \rho_т/\rho, \tag{2.50}$$

где $\rho_т$ — плотность тела; $W_т$ — объем всего тела; ρ — плотность жидкости; W — объемное водоизмещение. При подводном плавании $W = W_т$, откуда $\rho_т = \rho$.

При надводном плавании осадкой плавающего тела называют глубину погружения наинизшей точки смоченной поверхности тела.

Осадку тела при надводном плавании можно найти из (2.49) и (2.50).

Линия пересечения свободной поверхности жидкости с поверхностью плавающего тела называется ватерлинией (рис. 2.21). Площадь, ограниченная ватерлинией, называется площадью по ватерлинии.

Ось плавания проходит через центр тяжести тела C и центр водоизмещения D. При равновесии тела, плавающего в надводном или подводном состоянии, ось плавания вертикальна. Если тело имеет плоскость симметрии, ось плавания должна находиться в этой плоскости.

2.10. Условия статической остойчивости плавающего тела

Рассмотрим симметричное тело, находящееся в состоянии плавания. Ось плавания вертикальна, расположена в плоскости симметрии тела и проходит через центр тяжести площади ватерлинии. Тело занимает при плавании определенное положение. Это положение можно изменить приложением внешних сил.

О с т о й ч и в о с т ь ю называется способность тела плавать в одном и том же положении, т. е. восстанавливать положение после прекращения действия внешних сил, вызвавших нарушение исходного положения тела.

Плавающие тела должны обладать статической и динамической остойчивостью (различаются по характеру действия внешних сил).

Рассмотрим с т а т и ч е с к у ю о с т о й ч и в о с т ь плавающих тел относительно продольной оси.

Если пара сил — вес тела $G_т$ и архимедова сила P — во время крена стремится увеличить крен, такое положение тела является н е о с т о й ч и в ы м. Если в результате действия указанной пары сил крен уменьшается, тело в таком положении остойчиво.

У с л о в и я о с т о й ч и в о с т и различны при подводном и надводном плавании:

1) т е л о п л а в а е т п о л н о с т ь ю п о г р у ж е н н ы м в ж и д к о с т ь (п о д в о д н о е п л а в а н и е). На рис. 2.22,*а* показано положение, при котором пара сил $G_т$ и P стремится увеличить крен. Происходит это потому, что центр тяжести тела C расположен выше, чем центр водоизмещения D.

Если центр тяжести тела C находится ниже центра водоизмещения D, указанная пара сил стремится к уменьшению крена (рис. 2.22, *б*) и восстановлению положения тела. При таких условиях плавающее тело остойчиво.

Таким образом, условие статической остойчивости при подводном плавании формулируется так: при подводном плавании тело будет статически остойчиво, если центр тяжести C расположен на оси плавания ниже центра водоизмещения D;

2) т е л о п л а в а е т п р и ч а с т и ч н о м п о г р у ж е н и и (н а д в о д н о е п л а в а н и е). Если тело (рис. 2.23) выведено из положения равновесия и повернулось около продольной оси на угол θ, объем водоизмещения W, оставаясь постоянным, изменит свою первоначальную форму. Его поперечное сечение ABO станет равным сечению A_1B_1O. При крене центр водоизмещения (центр давления) D не остается на оси плавания (ось плавания связана с телом), а перемещается в точку D', через которую при крене проходит архимедова сила P.

Точку пересечения линии действия архимедовой силы с осью плавания называют м е т а ц е н т р о м. При углах крена $\theta < 15°$ положение точки пересечения линии действия архимедовой силы с осью плавания практически не изменяется. Можно считать, что

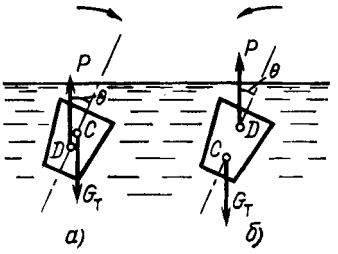


Рис. 2.22

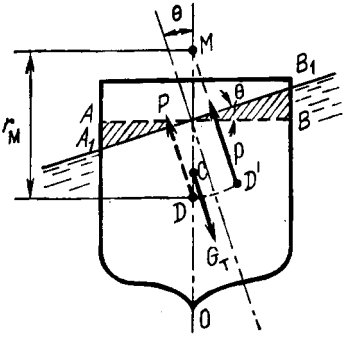


Рис. 2.23

центр водоизмещения при углах крена $\theta < 15°$ перемещается по дуге окружности, описываемой из метацентра M радиусом $r_м$, который называется метацентрическим радиусом.

При поперечном крене тела (дифференте) метацентр и метацентрический радиус называют поперечными.

Найдем выражение для метацентрического радиуса, необходимого при расчетах статической остойчивости тел.

При крене часть объема водоизмещения AOA_1 выходит из воды, а часть BOB_1 погружается в воду. Объем первой части W_1, а второй W_2 (эти объемы заштрихованы на рис. 2.24). Общую в обоих случаях часть объема водоизмещения обозначим W_0, тогда $W = W_0 + W_1 = W_0 + W_2$. Отсюда $W_1 = W_2$.

Найдем статический момент объема W_0 относительно продольной оси площади по ватерлинии.

Так как в первом положении тела $W_0 = W - W_1$, то искомый статический момент равен $W(-b) - W_1(-t_1)$. При втором положении $W_0 = W - W_2$ и статический момент равен $W_a - W_2 t_2$, где a, b, t_1, t_2 — коэффициенты центров тяжести соответствующих объемов. Найденные моменты равны, так как они представляют собой статические моменты одного и того же объема W_0 относительно одной и той же продольной оси $0-0$. Приравняв оба выражения, получим $W(-b) - W_1(-t_1) = W_a - W_2(t_2)$.

Обозначив равные объемы W_1 и W_2 через W_1, найдем $W(a + b) = W_1(t_1 + t_2)$, а так как $a + b = r_м \sin\theta$, то $W r_м \sin\theta = W_1(t_1 + t_2)$.

Статический момент объема W_1 (рис. 2.25) равен $W_1 t_1 = \int\limits_{\omega_1} x\,\theta x\,d\omega_1$. Статический момент объема W_2 (при $W_2 = W_1$) равен $W_2 t_2 = \int\limits_{\omega_2} x\,dx\,d\omega_2$. Тогда $W_1(t_1 + t_2) = \theta \int\limits_{\omega} x^2 d\omega$, где ω — полная площадь по ватерлинии.

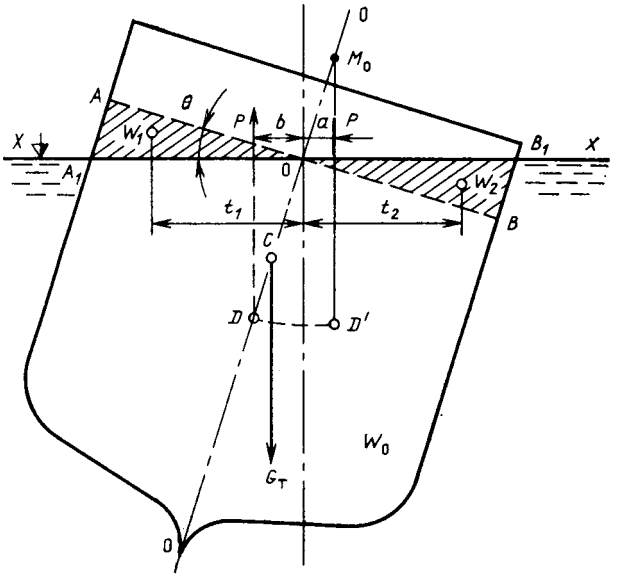


Рис. 2.24

Интеграл $\int\limits_{\omega} x^2 d\omega = J_{x_0}$ — центральному моменту инерции площади по ватерлинии относительно продольной оси. Тогда $W r_м \sin\theta = \theta J_{x_0}$. Отсюда $r_м = \frac{J_{x_0}}{W} \frac{\theta}{\sin\theta}$. При малых углах крена ($\alpha < 15°$) можно приближенно принимать $\theta = \sin\theta$.

Тогда

$$r_м = \frac{J_{x_0}}{W}, \qquad (2.51)$$

т. е. метацентрический радиус равен частному от деления центрального момента инерции площади по ватерлинии относительно продольной оси на объемное водоизмещение плавающего тела. И при надводном плавании более низкое (по сравнению с центром водоизмещения D) расположение на оси плавания центра тяжести тела C обеспечивает статическую остойчивость тела (рис. 2.26, *а*).

Но, как будет видно, выполнение этого условия при надводном плавании (образование сил P и $G_т$, стремящихся уменьшить крен) возможно и в том случае, если центр тяжести тела C расположен на оси плавания выше, чем центр водоизмещения D. Но только при этом центр тяжести тела C не должен быть расположен выше метацентра. Если центр тяжести тела C на оси плавания лежит

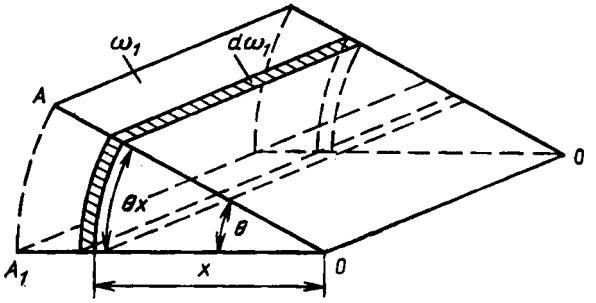


Рис. 2.25

выше метацентра, пара сил P и G стремится увеличить крен (рис. 2.26, *б*).

При надводном плавании тело остойчиво при расположении центра тяжести тела C между центром водоизмещения (точка C выше D) и метацентром M (точка C ниже M); см. на рис. 2.26, *в*.

Следовательно, для обеспечения остойчивости тела при надводном плавании необходимо, чтобы расстояние δ между центром водоизмещения D и центром тяжести тела C было меньше метацентрического радиуса:

$$\delta < r_м \quad \text{или} \quad \delta/r_м < 1. \tag{2.52}$$

Если $r_м > \delta$, расстояние между метацентром M и центром тяжести тела C, называемое метацентрической высотой,— величина положительная.

Чем больше метацентрическая высота, тем больше момент пары сил P и G, стремящийся к уменьшению крена (т. е. к более надежному обеспечению остойчивости).

Обычно если тело обладает остойчивостью относительно продольной оси площади по ватерлинии, его остойчивость относительно поперечной оси будет заведомо обеспечена.

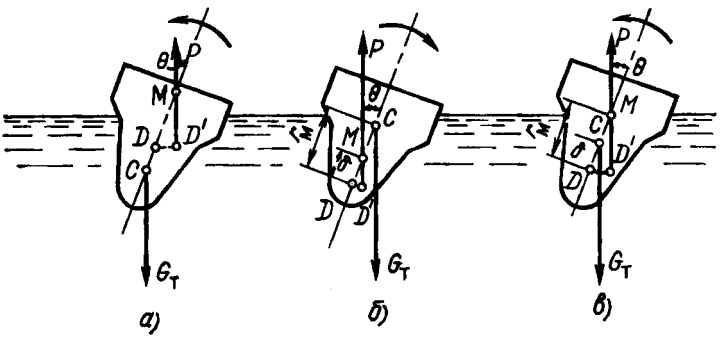


Рис. 2.26

У плавающих полых тел, частично заполненных жидким грузом, положение центра тяжести C при крене изменяется, и условия остойчивости таких тел будут несколько иными. Наличие жидкого содержимого уменьшает остойчивость.

2.11. Контрольные вопросы и примеры

1. Каковы особенности напряженного состояния покоящейся жидкости?
2. Каковы основные отличительные свойства нормального напряжения поверхностных сил в покоящейся жидкости?
3. Гидростатическое давление — векторная или скалярная величина? Можно ли говорить «давление направлено . . .»?
4. В каких единицах измеряется давление? Чему равняется атмосферное давление?
5. Может ли давление в жидкости быть меньше нуля, равно нулю?
6. Что такое абсолютное, весовое, избыточное, вакуумметрическое давление? Может ли вакуумметрическое давление быть больше атмосферного давления; или быть меньше нуля; или равно нулю?
7. Отличается ли пьезометрическая высота от вакуумметрической высоты?
8. Есть ли различие в понятиях «гидростатический напор» и «пьезометрический напор»? Если есть, то в чем их различие?
9. В каких случаях плоскость пьезометрического напора располагается выше и ниже свободной поверхности покоящейся жидкости? Может ли плоскость пьезометрического напора совпадать со свободной поверхностью?
10. Запишите выражение для полного дифференциала давления. Как из этого выражения получить основное уравнение гидростатики? Для какого условия оно справедливо?
11. Что такое поверхность равного давления? Каково ее уравнение?
12. Может ли движущаяся жидкость находиться в равновесии? Если может, при каких условиях?
13. Отличается ли форма поверхностей равного давления при относительном покое жидкости в равномерно вращающемся относительно вертикальной оси цилиндрическом сосуде и в движущихся прямолинейно равноускоренно и равнозамедленно сосудах?
14. Справедливо ли основное уравнение гидростатики в различных случаях относительного покоя?
15. В каком случае могут совпасть центр тяжести смоченной плоской поверхности и центр давления?
16. Запишите формулу для силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности. Почему в большинстве случаев необходимо знать силу избыточного гидростатического давления?
17. Можно ли расстояние до центра давления $l_{ц.д}$ измерять по вертикали, если плоская поверхность (стенка), на которую действует покоящаяся жидкость, наклонная?
18. Как располагаются по отношению друг к другу центр тяжести смоченной вертикальной или наклонной плоской поверхности и точка приложения силы избыточного давления (центр давления)? Обратите внимание на то, от какой точки на свободной поверхности измеряется расстояние $l_{ц.д}$.
19. Как определяются составляющие (проекции) силы давления покоящейся жидкости на криволинейные поверхности?
20. Что такое тело давления, как определяется его объем?
21. Как ориентирована в пространстве равнодействующая сил гидростатического давления на криволинейные (и в том числе на цилиндрические) поверхности и на ее составляющие силы?
22. Каковы условия плавания тел?
23. Различаются ли условия, определяющие статическую устойчивость тел, находящихся в подводном и надводном плавании?

24. Влияют ли очертания плавающего в надводном положении тела (в плане) на статическую его остойчивость? Если влияют, то как именно?

Пример 2.1. В закрытом сосуде вода находится в равновесии в условиях, когда внешнее давление над уровнем ее составляет $110 \cdot 10^3$ Па (рис. 2.27). Определить, на какой высоте над уровнем воды в сосуде располагается свободная поверхность в пьезометре (размеры поперечного сечения пьезометра таковы, что свободную поверхность можно считать плоской).

Решение. Так как жидкость покоится, то давление в точке A справа и слева будет одним и тем же.

Давление (абсолютное) в точке A слева $p_A = p_0 + \rho g h_1$, где ρ — плотность воды. Давление (абсолютное) в точке A справа $p_A = p_{ат} + \rho g h + \rho g h_1$.

Приравняв оба выражения для p_A, получим $p_0 = p_{ат} + \rho g h$. Тогда $h = (p_0 - p_{ат})/\rho g = (110\,000 - 98\,100)/9810 = 1{,}21$ м.

Пример 2.2. К замкнутому сосуду присоединен пьезометр с ртутью (рис. 2.28). Определить абсолютное и избыточное давление в сосуде (в точке A), если ртуть в пьезометре располагается выше линии раздела между водой и ртутью на $h_1 = 0{,}5$ м, а указанная линия раздела находится на $h_2 = 0{,}6$ м выше точки A.

Решение. Так как жидкость покоится, то давление в точках, находящихся на одной горизонтальной плоскости, т. е. в точках B и C, будет одним и тем же.

Давление в точке C справа $p_C = p_{ат} + \rho_{рт} g h_1$, где $\rho_{рт}$ — плотность ртути; $\rho_{от} = 13\,600$ кг/м^3.

Давление в точке C слева равно давлению в точке B, которое будет меньше, чем искомое давление в точке A, так как точка A расположена ниже, чем точка B, на расстояние h_2. Тогда $p_B = p_A - \rho g h_2$. Учитывая, что $p_C = p_B$, и приравнивая два уравнения для p_C, получаем $p_A - \rho g h_2 = p_{ат} + \rho_{рт} g h_1$.

Тогда абсолютное давление в точке A равно $p_A = p_{ат} + \rho_{рт} g h_1 + \rho g h_2 = 98\,100 + 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}6 = 170\,694$ Н/м$^2 \cong 170{,}7 \cdot 10^3$ Па $= 170{,}7$ кПа.

Избыточное давление в точке A равно $p_{изб} = p_A - p_{ат} = \rho_{рт} g h_1 + \rho g h_2 = 72\,594$ Н/м$^2 \cong 72{,}6 \cdot 10^3$ Па $= 72{,}6$ кПа.

Пример 2.3. Разность давлений в точках A и B двух замкнутых емкостей с водой, находящейся в равновесии, измеряется с помощью дифференциального манометра (рис. 2.29). Определить, каково значение разности давлений в точках B и A (судя по рисунку, давление в точке B больше, чем давление в точке A), если $h = h_1 - h_2 = 0{,}3$ м.

Решение. Указанную разность давлений можно определить, рассмотрев условие равновесия на линии раздела между водой и ртутью в правом пьезометре, т. е. на линии 2—2.

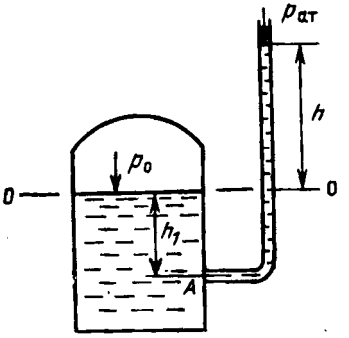


Рис. 2.27

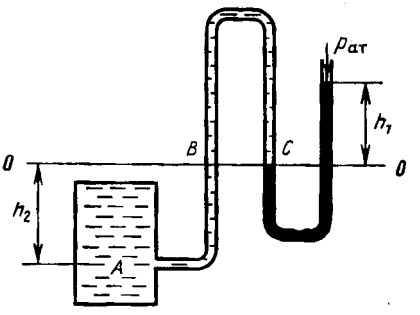


Рис. 2.28

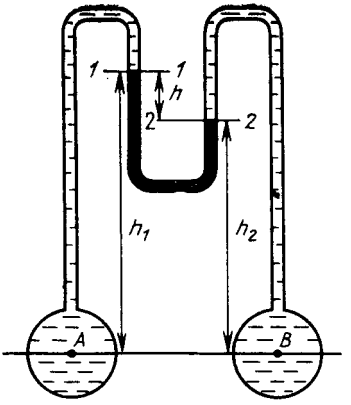


Рис. 2.29

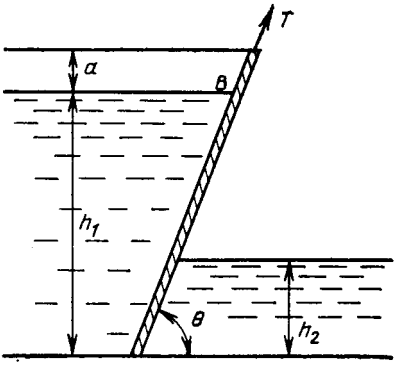


Рис. 2.30

Давление справа $p_{2-2} = p_B - \rho g h_2$, где ρ — плотность воды.

Давление слева $p_{2-2} = p_A - \rho g h_1 + \rho_{рт} g h$.

Приравняв правые части обоих уравнений, получим $p_B - \rho g h_2 = p_A - \rho g h_1 + \rho_{рт} g h$. Тогда разность давлений равна $p_B - p_A = \rho_{рт} g h - \rho g (h_1 - h_2)$ или $p_B - p_A = g h (\rho_{рт} - \rho) = 9{,}81 \cdot 0{,}3 \quad (13\,600 - 1000) = 37\,082$ Н/м^2 $\cong$ $\cong 37{,}08 \cdot 10^3$ Па $\cong 37{,}1$ кПа.

Пример 2.4. Определить силу избыточного давления, действующую на плоский прямоугольный затвор, ширина которого (размер, перпендикулярный плоскости чертежа) $b = 8$ м (рис. 2.30). Глубина воды в верхнем бьефе (слева от затвора) равна $h_1 = 3$ м, глубина в нижнем бьефе (справа от затвора) $h_2 = 2$ м, расстояние $a = 1$ м. Угол наклона затвора $\theta = 70°$. Определить также координаты центра давления и найти начальное подъемное усилие T (по направлению, совпадающему с плоскостью наклона стенки). Толщина затвора $t = 0{,}1$ м; плотность материала затвора (металлические конструкции и дерево) $\rho_з = 1300$ кг/м^3, коэффициент трения опор затвора о пазы $f = 0{,}4$.

Решение. Сила избыточного давления (далее — сила давления) определяется по формуле (2.34): $P = \rho g h_{ц.\,т} \omega$.

Сила давления на затвор слева (со стороны верхнего бьефа)

$$P_1 = \rho g \frac{h_1}{2} b \frac{h_1}{\sin\theta} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 8 \frac{3^2}{2 \cdot 0{,}891} = 396{,}36 \cdot 10^3 \text{ Н} = 396{,}36 \text{ кН}.$$

Сила давления на затвор справа (со стороны нижнего бьефа)

$$P_2 = \rho g b \frac{h_2^2}{2 \sin\theta} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 8 \frac{2^2}{2 \cdot 0{,}891} = 176{,}16 \cdot 10^3 \text{ Н} = 176{,}16 \text{ кН}.$$

Равнодействующая сил давления $P = P_1 - P_2 = 220{,}2$ кН.

Расстояние от свободной поверхности в верхнем бьефе до точки приложения силы P_1 (по наклону затвора), т. е. координату $l_{ц.\,д1}$, определим по

(2.38): $$l_{ц.\,д1} = l_{ц.\,т1} + \frac{J_{01}}{\omega_1 l_{ц.\,т1}} = \frac{h_1}{2 \sin\theta} + \frac{b h_1^3 \sin^2\theta \cdot 2}{12 \sin^3\theta b h_1^2} =$$

$$= \frac{2 h_1}{3 \sin\theta} = 2{,}24 \text{ м}.$$

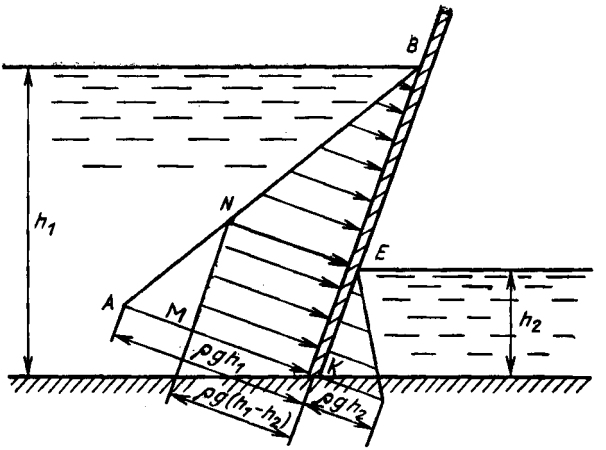


Рис. 2.31

Расстояние от свободной поверхности в нижнем бьефе до точки приложения силы P_2 (также по наклону затвора) найдем по (2.37):

$$l_{\text{ц. д2}} = \frac{J_{y_2}}{\omega_2 l_{\text{ц. т2}}} = \frac{bh_2^3 2\sin^2\theta}{3\sin^3\theta bh_2^2} =$$

$$= \frac{2h_2}{3\sin\theta} = 1{,}496 \text{ м} \approx 1{,}5 \text{ м}.$$

Ось OY перпендикулярна плоскости чертежа, т. е. ширина b измеряется по направлению, совпадающему с направлением OY.

Для определения расстояния $l_{\text{ц. д}}$ (по наклону затвора, от свободной поверхности) до точки приложения равнодействующей силы давления P используем теорему о том, что момент равнодействующей силы относительно какой-либо оси равен сумме моментов относительно той же оси сил составляющих.

Составим уравнение моментов относительно оси, проходящей вдоль уреза воды в верхнем бьефе, т. е. через ось, проходящую через точку B перпендикулярно плоскости чертежа:

$$Pl_{\text{ц. д}} = P_1 l_{\text{ц. д1}} - P_2\left(l_{\text{ц. д2}} + \frac{h_1 - h_2}{\sin\theta}\right).$$

Тогда $220{,}2\, l_{\text{ц. д}} = 396{,}36 \cdot 2{,}24 - 176{,}16\ (1{,}5 + 1/0{,}891)$ или $l_{\text{ц.д}} = 1{,}93$ м.

Полученные размеры показаны на рис. 2.31, где построены эпюры давления. Итоговая эпюра давления представлена трапецией $MNBK$. Учитывая, что боковая поверхность затвора — прямоугольная фигура, можно, умножив площадь указанной трапеции на ширину затвора b, получить объем эпюры, численно равный равнодействующей силе давления.

Для данного случая (прямоугольная плоская поверхность) силы давления проходят через центры тяжести соответствующих эпюр давления. Для других (непрямоугольных) плоских поверхностей такое положение не будет верным.

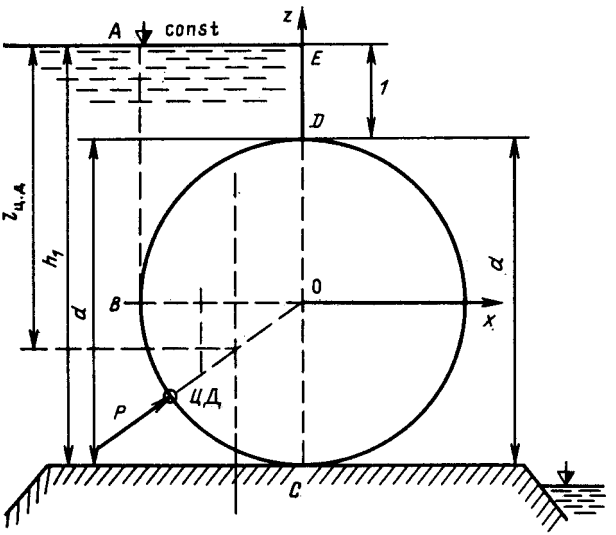


Рис. 2.32

Начальное подъемное усилие (без учета архимедовой силы, которая отсутствует в начальный момент подъема) равно

$$T = \frac{G}{\sin\theta} + [P + G\cos\theta]\, f.$$

Вес затвора

$$G = \rho_{з} g \frac{h_1 + a}{\sin\theta} bt = 1300 \cdot 9{,}81 \frac{4}{0{,}891} 8 \cdot 0{,}1 = 45{,}8 \text{ кН};$$

$$T = \frac{45{,}8}{0{,}891} + (220{,}2 + 45{,}8 \cdot 0{,}454)\, 0{,}4 = 147{,}8 \text{ кН}.$$

Пример 2.5. Определить силу избыточного гидростатического давления воды на цилиндрический (вальцовый) затвор, перекрывающий водосбросное отверстие прямоугольного поперечного сечения. Определить также координаты центра давления. Глубина воды перед затвором $h_1 = 6$ м, диаметр цилиндрического затвора $d = 5$ м, ширина пролета отверстия (размер, перпендикулярный плоскости чертежа) равна $b = 9$ м. Уровень воды в нижнем бьефе находится на отметке, не достигающей низа затвора (рис. 2.32).

Решение. Известно, что для цилиндрической поверхности (при направлении оси OY вдоль образующей цилиндра) имеются только две составляющие силы гидростатического давления: P_x и P_z.

Горизонтальная составляющая силы давления согласно (2.41) имеет вид $P_x = \rho g h'_{ц.т}\, \omega_x = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}5 \cdot 9 \cdot 5 = 1\,545\,075$ Н $= 1545{,}1$ кН $=$ $= 1545{,}1$ кПа.

Линия действия горизонтальной составляющей равнодействующей силы давления, т. е. силы P_x, проходит на расстоянии $l_{ц.д}$ от свободной поверхности. Так как проекция цилиндрической поверхности на плоскость OY

вертикальная, то в данном случае $l_{ц.\,д} = h_{ц.\,д} = h'_{ц.т} + \dfrac{J_0}{\omega_x h'_{ц.\,т}} = h_1 \dfrac{d}{2} +$

$$+ \frac{bd}{12bd\left(h_1 - \dfrac{d}{2}\right)} \quad l_{ц.\,д} = 6 - 2{,}5 + \frac{5^2}{12 \cdot 3.5} = 4{,}095 \text{ м}.$$

Вертикальная составляющая силы гидростатического давления P_z численно равна весу воды в объеме тела давления:

$$P_z = \rho g W_д.$$

В данном случае вертикальная составляющая силы давления равна $P_z = P'_z - P''_z = \rho g (W'_д - W''_д)$, где $W'_д$ — объем части тела давления соответствующей вертикальной составляющей (направленной вверх) силы давления, т. е. P'_z; $W''_д$ — объем части тела давления, которая соответствует направленной вниз вертикальной составляющей силы давления, т. е. P''_z.

Объем $W'_д = \omega_{EDCBA} b$. Объем $W''_д = \omega_{EDBA} b$. Тогда $W_д = W'_д - W''_д = b(\omega_{EDCBA} - \omega_{EDBA}) = b\omega_{DCBD} = b\pi d^2/8$, т. е. объем тела давления равен объему полуцилиндра. Сила P_z, равная разности сил P'_z и P''_z, направлена вертикально вверх и численно равна

$$P_z = \rho g W_д = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 9 \cdot 0.785 \cdot 5^2 = 1\,732\,691 \text{ Н} = 1732.7 \text{ кН} = 1732.7 \text{ кПа}.$$

Сила P_z проходит через центр тяжести полукруга $DCBD$. Этот центр тяжести находится на пересечении горизонтальной оси BO с вертикальной линией, отстоящей от вертикального диаметра CD на расстоянии $2d/3\pi = 1{,}06$ м.

Равнодействующая сил давления на цилиндрический затвор равна по (2.40)

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{1545{,}1^2 + 1732{,}7^2} =$$

$$= 2\,321\,540 \text{ Н} \doteq 2321{,}5 \text{ кН} = 2321{,}5 \text{ кПа}.$$

Угол наклона равнодействующей P определяется как

$$\theta = \arccos \frac{P_x}{P} = \arccos 0{,}666 = 48{,}27^\circ = 48^\circ 16'$$

или

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{P_z}{P_x} = \operatorname{arctg} 1{,}121 = 48^\circ 16'.$$

Для определения координат центра давления равнодействующей, т. е. силы P, используем тот факт, что эта сила проходит через точку пересечения линий действия сил P_x и P_z и через центр полуокружности — точку 0.

Тогда $\operatorname{tg} \theta = z/x = 1{,}121$ или $z = 1{,}121\ x$. Далее, подставляя эти значения в уравнение окружности, имеем $x^2 + 1{,}121^2\ x^2 = 2{,}5^2$ или $x^2 + 1{,}256\ x^2 = 6{,}25$; $x = \pm 1{,}664$ м. Учитывая направление осей координат, изображенных на рис. 2.32, получим координаты центра давления равнодействующей сил давления $x = -1{,}664$ м и $z = -1{,}865$ м (индексы «ц. д» опущены). Проверка может быть выполнена графоаналитическим способом.

Пример 2.6. Определить, будет ли обеспечена статическая остойчивость деревянной призмы (рис. 2.33) длиной $l = 3$ м, плавающей в пресной воде. Поперечное сечение призмы — равнобедренный треугольник (клин), ширина которого по верху $b = 0{,}2$ м, вершина треугольника — внизу, высота треугольника $h = 0{,}35$ м. Плотность дерева $\rho_т = 800$ кг/м^3.

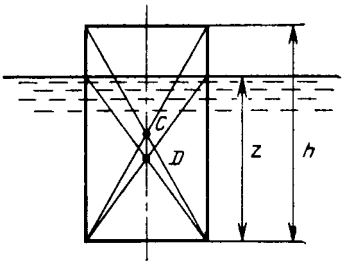


Рис. 2.33

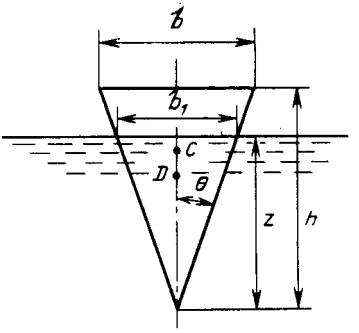


Рис. 2.34

Решение. Найдем осадку тела из условия плавания:

$$\rho_т g W_т = \rho g W;$$

$$\rho_т \frac{1}{2} bhl = \rho \frac{1}{2} b_1 z l.$$

Половинный угол при вершине треугольника равен $\theta = \operatorname{arctg}(b/2h) = 15{,}95^\circ = 15^\circ 57'$; $\operatorname{tg}\theta = 0{,}2857$.

Согласно (2.52) статическая остойчивость плавающего тела в надводном состоянии будет обеспечена, если $\delta < r_м$, где δ — расстояние между центром тяжести тела и центром водоизмещения; $r_м$ — метацентрический радиус.

В данном случае (для плавания параллелепипеда в пресной воде)

$$\delta = \frac{h}{2} - \frac{z}{2} = 0{,}035 \text{ м}.$$

Метацентрический радиус равен

$$r_м = \frac{J_0}{W} = \frac{lb^3}{12lbz} = \frac{b^2}{12z} = \frac{0.2^2}{12 \cdot 0{,}28} = 0{,}012 \text{ м}.$$

Так как в результате получено, что $\delta = 0{,}035$ м, что больше $r_м = 0{,}012$ м, то брус неостойчив.

Если проанализировать, при какой ширине (и неизменной высоте $h = 0{,}35$ м) при тех же плотностях тела и воды (пресной) брус станет остойчивым, получим следующее. Для остойчивости необходимо, чтобы

$$r_м = \frac{b^2}{12z} > \delta = 0{,}035 \text{ м} \quad \text{или} \quad b > \sqrt{12 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}035},$$

т. е. $b > 0{,}343$ м, при этом следует отметить, что осадка z не зависит от ширины бруса.

Пример 2.7. Определить, какой будет осадка деревянного параллелепипеда (бруса), плавающего в воде (в пресной и морской). Проверить для случая плавания в пресной воде, остойчив ли брус при поперечных размерах: ширина $b = 0{,}2$ м; высота $h = 0{,}35$ м (рис. 2.34). Длина бруса $l = 3$ м, плотность материала, из которого он изготовлен, $\rho_т = 800$ кг/м^3.

Решение. Осадку найдем по формулам (2.49) и (2.50). Из условия плавания вес тела равен

$$\rho_т g W_т = \rho g W,$$

где $W_т = bhl$ — объем тела; $W = zbl$ — объем погруженной части тела; z — осадка.

Тогда объем водоизмещения $\rho_т h = \rho z$; $z = h\rho_т/\rho$.

При плавании в пресной воде

$$z = 0{,}35\,\frac{800}{1000} = 0{,}28 \text{ м}.$$

При плавании в морской воде (приняв $\rho = 1030$ кг/м^3) имеем $z = 0{,}35\,\frac{800}{1030} = 0{,}272$ м или

$$\rho_т bh = \rho \cdot 0{,}286 z^2,$$

откуда

$$z = \sqrt{\frac{\rho_т bh}{0{,}286\rho}} = \sqrt{\frac{800 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}35}{2 \cdot 0{,}286 \cdot 1000}} = 0{,}313 \text{ м}.$$

Ширина призмы на уровне ватерлинии равна $b_1 = 0{,}179$ м. Находим расстояние между центром тяжести и центром водоизмещения:

$$\delta = \frac{2}{3}h - \frac{2}{3}z = 0{,}0247 \text{ м}.$$

Находим значение метацентрического радиуса:

$$r_м = J_0/W,$$

где $J_0 = \frac{lb_1^3}{12}$; $W = 1/2 b_1 z l$.

Тогда $r_м = \frac{b_1^2}{6z} = \frac{0{,}179^2}{6 \cdot 0{,}313} = 0{,}017$ м. Так как $r_м = 0{,}017$ м, т. е. меньше $\delta = 0{,}0247$ м, то деревянная призма при заданных условиях не обладает статической остойчивостью.

Глава 3

КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

3.1. Способы описания движения жидкости

Кинематика жидкости — раздел гидромеханики (механики жидкости), в котором изучаются виды и кинематические характеристики движений жидкости, но не рассматриваются силы, под действием которых происходит движение.

Жидкость представляет собой совокупность частиц, заполняющих объем без пустот и разрывов.

Ж и д к а я ч а с т и ц а — часть жидкости, малая по сравнению с объемом рассматриваемой жидкости, и в то же время объем частицы велик по сравнению с объемом молекулы жидкости. В частице содержится так много молекул, что жидкость в пределах

частицы можно считать сплошной средой — континуумом.

Сплошная среда является моделью жидкости (см. § 1.1), используемой при рассмотрении ее покоя и движения: предположение о сплошности позволяет считать все параметры, характеризующие движущуюся жидкость, непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и времени.

В процессе движения жидкости изменяются во времени взаимные положения жидких частиц и их форма. Положение жидкой частицы определяется координатами некоторой точки, выбранной произвольно в пределах частицы. Эта точка называется полюсом. Различные точки частицы имеют различные скорости. Под скоростью частицы понимается скорость выбранного полюса. В общем случае движение жидкости можно считать определенным, если известны законы движения всех частиц, т. е. положение каждой частицы задано как функция времени.

Существуют два способа описания движений жидкости.

1. **Способ Лагранжа.** В этом способе предлагается рассматривать движение каждой частицы жидкости. В начальный момент времени положение частицы определено начальными координатами ее полюса x_0, y_0, z_0. При движении частица перемещается и координаты ее полюса изменяются. Движение жидкости определено, если для каждой частицы можно указать координаты x, y, z как функции начального положения (x_0, y_0, z_0) и времени t:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0, t);\\ y &= y(x_0, y_0, z_0, t);\\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t). \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Переменные x_0, y_0, z_0 и t называют переменными Лагранжа. Совокупность приведенных функций (3.1) описывает траектории движений частиц жидкости. Из уравнений (3.1) можно найти проекции на координатные оси скоростей и ускорений всех жидких частиц. Если обозначить через u вектор скорости жидкой частицы, то проекции скоростей

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad u_y = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad u_z = \frac{\partial z}{\partial t} \tag{3.2}$$

и ускорений

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{3.3}$$

При описании движений жидкости методом Лагранжа можно пользоваться также криволинейными координатами.

Способ Лагранжа находит применение при решении ряда специальных задач, например при расчете волновых движений.

2. **Способ Эйлера.** В этом способе движение жидкости описывается функциями, выражающими изменения скоростей в точках

некоторой неподвижной области, выбранной в пределах потока. В данный момент времени в каждой точке этой области, определяемой координатами x, y, z, находится частица жидкости, имеющая некоторую скорость u. Эта скорость называется мгновенной местной скоростью. Совокупность мгновенных местных скоростей представляет векторное поле, называемое полем скоростей. В общем случае поле скоростей может изменяться во времени и по координатам:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t);\\ u_y &= u_y(x, y, z, t);\\ u_z &= u_z(x, y, z, t). \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

Переменные x, y, z, t называют переменными Эйлера.

Векторными линиями поля скоростей являются линии тока. Линия тока — кривая, в каждой точке которой в данный момент времени вектор местной скорости направлен по касательной (рис. 3.1) (или касательная к ней совпадает с направлением скорости в этой точке).

Как следует из определения, составляющие скорости, нормальные к линии тока, в любой точке этой линии равны нулю.

Уравнение линии тока можно получить из условия совпадения направления касательной к линии тока с направлением вектора местной скорости в каждой точке. Направляющие косинусы (косинусы углов касательной к линии тока с осями координат) равны dx/dl, dy/dl, dz/dl (dx, dy, dz — проекции элемента линии тока dl на оси координат).

Косинусы углов вектора скорости с осями координат (направляющие косинусы для скорости u) равны u_x/u, u_y/u, u_z/u.

На линии тока

$$dx/dl = u_x/u; \quad dy/dl = u_y/u; \quad dz/dl = u_z/u$$

или

$$dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z = dl/u.$$

Отсюда дифференциальные уравнения линий тока для данного момента времени

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z, t)} = \frac{du}{u_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z, t)}. \qquad (3.5)$$

Здесь t рассматривается как параметр, имеющий заданное значение. Задавая различные значения t, можно определить линии тока для различных моментов времени.

Линии тока можно построить следующим образом (рис. 3.1). Пусть в области, через которую движется жидкость, в выделенной нами в некоторый момент времени точке *1* скорость равна u_1. В точке *2*, расположенной бесконечно близко на отложенном из точки *1* векторе скорости u_1, в тот же момент времени скорость равна u_2. На векторе u_2 в бесконечно близкой точке *3* в тот

же момент времени скорость равна u_3 и т. п. Векторы скоростей u_1, u_2, u_3 и т. д. образуют в общем случае ломаную линию. Если провести огибающую этой ломаной, получим линию тока.

Через точку, где скорость не обращается в нуль или бесконечность, может проходить лишь одна линия тока, т. е. линии тока не пересекаются. В точках, где скорость равна нулю или бесконечности, линии тока могут пересекаться или разветвляться. Такие точки называются особыми или критическими.

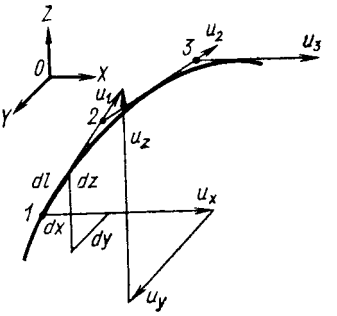


Рис. 3.1

По характеру изменения поля скоростей во времени движения жидкости делятся на неустановившиеся и установившиеся.

Неустановившееся (нестационарное) движение такое, когда в точках области, где движется жидкость, местные скорости изменяются с течением времени. Такое движение описывается уравнениями (3.4).

При неустановившемся движении в общем случае линии тока соответствуют только мгновенному состоянию поля скоростей. В последующие моменты времени поле скоростей и, следовательно, линии тока могут изменяться. В связи с этим в общем случае при неустановившемся движении линии тока и траектории могут не совпадать. Но может встретиться частный случай неустановившегося движения, когда направление и форма линий тока не изменяются во времени (направления скоростей остаются неизменными, изменяются только значения скоростей u в точках). В этом случае линии тока и траектории частиц жидкости совпадут.

Установившееся (стационарное) движение такое, когда в каждой точке области, где движется жидкость, местные скорости во времени не изменяются. Тогда уравнения (3.4) превращаются в следующие:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z);\\ u_y &= u_y(x, y, z);\\ u_z &= u_z(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

При установившемся движении линия тока и траектории движения частиц совпадают.

При установившемся движении уравнения линии тока принимают вид

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z)}. \qquad (3.7)$$

Если в некоторый данный момент времени выделить в области, через которую движется жидкость, замкнутый, не пересекающий себя контур $abcd$ (рис. 3.2), ни одна из точек которого не является

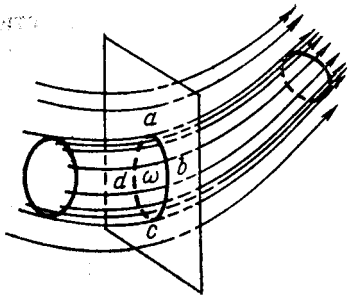


Рис. 3.2

особой точкой потока, то через каждую точку такого контура в данный момент времени проходит единственная линия тока. Совокупность линий тока, проведенных через все точки этого контура, образует поверхность, которая называется трубкой тока. Жидкость, движущаяся внутри трубки тока, образует струйку. Внутри трубки тока в данный момент жидкость течет, не пересекая боковых «стенок», так как скорости потока касательны к линиям тока. Если контур *abcd* ограничивает бесконечно малую площадку, струйка называется элементарной. Если контур *abcd* ограничивает конечную площадку, струйка называется конечной.

Живым сечением струйки называется сечение, нормальное в каждой своей точке к линиям тока. Обозначим площадь живого сечения элементарной струйки через $d\omega$, а конечной струйки — через ω.

В силу малости живого сечения элементарной струйки местные скорости жидкости в его пределах можно считать одинаковыми; для конечных струек равномерность распределения скоростей в пределах живого сечения в общем случае не выполняется.

В общем случае скорости и площади живых сечений по длине струйки могут изменяться.

При установившемся движении струйки жидкости существуют физически, так как непроницаемые для потока трубки тока неизменны во времени. При неустановившемся движении в связи с изменяемостью поля скоростей во времени струйки являются только мгновенными, так как трубки тока непрерывно изменяются.

Расходом Q струйки называют объемное количество жидкости, проходящей через данное живое сечение в единицу времени. Размерность расхода $[L^3T^{-1}]$. Для элементарной струйки с равномерным распределением скоростей u по живому сечению получим

$$dQ = u\,d\omega.$$

Для конечной струйки вводим понятие средней по живому сечению скорости в данном живом сечении площадью

$$v = Q/\omega,$$

и тогда расход можно выразить произведением средней скорости на площадь ω:

$$Q = v\omega.$$

От понятия об элементарной и конечной струйках жидкости в дальнейшем переходят к понятию о потоке жидкости как совокупности струек.

3.2. Движение жидкой частицы. Понятие о вихревом и потенциальном движении

При движении жидкости происходят изменения положения частиц в пространстве и их деформации, т. е. изменения формы и объема.

Рассмотрим жидкую частицу, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда с бесконечно малыми ребрами dx, dy, dz, параллельными координатным осям (рис. 3.3). Пусть в вершине A параллелепипеда с координатами x, y, z в некоторый момент времени t составляющие местной скорости равны u_x, u_y, u_z.

Если точку A выбрать в качестве полюса, поступательное перемещение параллелепипеда как целого за время dt представится проекциями $u_x dt$, $u_y dt$, $u_z dt$ (рис. 3.4, *а*).

Считая скорость непрерывной и дифференцируемой функцией координат, выразим скорости в остальных вершинах параллелепипеда через скорость в вершине A. Для вершин нижней грани параллелепипеда составляющие скорости показаны на рис. 3.3. При таких различных в разных точках составляющих скорости рассматриваемая грань будет не только перемещаться в пространстве, но и деформироваться. В силу малости ребер параллелепипеда можно считать, что в течение малого промежутка времени dt ребра остаются прямыми.

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении других граней

Деформацию параллелепипеда можно представить как сумму объемной и угловых деформаций.

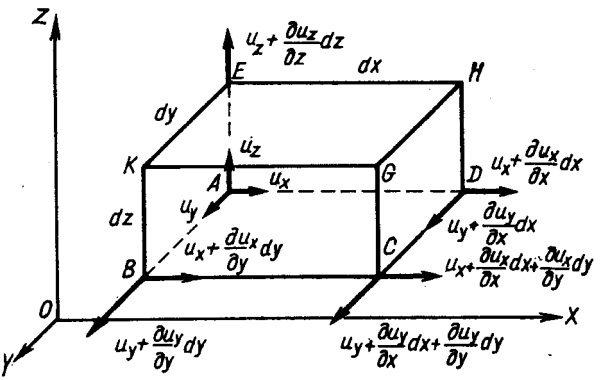


Рис. 3.3

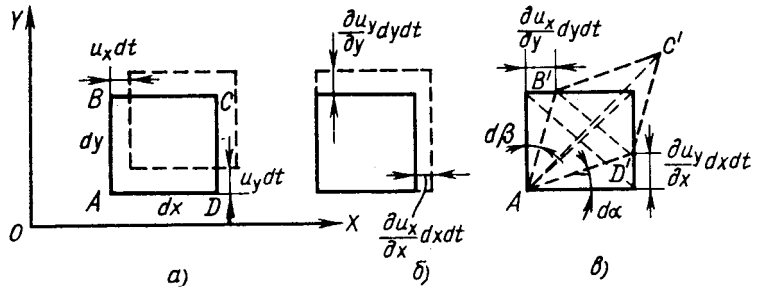


Рис. 3.4

Объемная деформация параллелепипеда может быть охарактеризована удлинениями ребер (рис. 3.4, *б*)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx\, dt; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} dy\, dt; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} dz\, dt.$$

Скорости удлинений отрезков единичной длины равны соответственно

$$\partial u_x / \partial x; \quad \partial u_y / \partial y; \quad \partial u_z / \partial z.$$

Угловая деформация характеризуется изменениями углов. Прямой угол, составленный ребрами параллелепипеда AB и AD в плоскости XOY, при движении жидкости изменяется на сумму углов $d\alpha + d\beta$ (рис. 3.4, *в*).

Угол сдвига между осью OX и ребром AD' найдется как

$$d\alpha \approx \operatorname{tg} d\alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\, dt}{dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt,$$

а угол сдвига между осью OY и стороной AB' равен

$$d\beta \approx \operatorname{tg} d\beta = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy\, dt}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt.$$

Тогда угловая деформация (деформация сдвига)

$$d\alpha + d\beta = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt + \frac{\partial u_x}{\partial y} dt.$$

Скорость угловой деформации в плоскости XOY равна

$$\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Для скоростей угловых деформаций в плоскостях YOZ и XOZ получим соответственно

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Обычно скорости угловых деформаций представляют в виде

$$\left.\begin{aligned}\theta_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right);\\ \theta_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right);\\ \theta_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

Индекс при скорости угловой деформации указывает, что угловая деформация происходит в плоскости, нормальной к данной оси координат.

Если приняты скорости угловых деформаций по соотношениям (3.8), для осуществления истинного перемещения ребер параллелепипеда следует деформированные грани повернуть на некоторые углы. При этом угловая скорость грани $ABCD$ относительно оси OZ найдется как

$$\omega_z = \frac{\frac{1}{2}(d\alpha - d\beta)}{dt} \quad \text{или} \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

Для угловых скоростей граней относительно осей OX, OY и OZ получим выражения

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right);\\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right);\\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

Таким образом, движение рассматриваемой грани представляется в виде суммы поступательного перемещения вместе с полюсом, деформированного движения и вращения относительно некоторой мгновенной оси, проходящей через полюс.

Чтобы установить применимость такого подхода ко всей частице, рассмотрим проекции скорости в двух точках, принадлежащих данной частице.

Пусть одна из этих точек — точка M, которую примем в качестве полюса, а другая — точка G (рис. 3.5). Точки M и G расположены достаточно близко друг от друга — на расстоннии Δl. Разложим в ряд Тейлора мгновенные значения проекций скорости u_x, u_y, u_z в точке G, ограничиваясь линейными членами. Для проекции u_x в точке G имеем

$$u_x = u_{x_M} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u_x}{\partial z}\Delta z,$$

где u_{x_M} — проекция скорости полюса M.

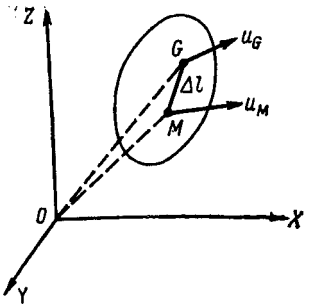


Рис. 3.5

Частные производные $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ представим в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

и

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right).$$

Тогда

$$u_{x_G} = u_{x_M} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\Delta z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\Delta z.$$

Учитывая введенные ранее обозначения, получим

$$u_{x_G} = u_{x_M} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x + (\theta_z\Delta y + \theta_y\Delta z) + (\omega_y\Delta z - \omega_z\Delta y).$$

Для других составляющих скорости найдем

$$u_{y_G} = u_{y_M} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y + (\theta_z\Delta x + \theta_x\Delta z) + (\omega_z\Delta x - \omega_x\Delta z);$$

$$u_{z_G} = u_{z_M} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\Delta z + (\theta_y\Delta x + \theta_x\Delta y) + (\omega_x\Delta y - \omega_y\Delta x),$$

где u_{x_M}, u_{y_M}, u_{z_M} — проекции скорости полюса частицы.

Таким образом, убедились в том, что движение жидкой частицы можно представить в виде суммы поступательного движения, деформационного движения (линейные и угловые деформации) и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.

Поступательное движение характеризуется составляющими скорости

$$u_x;\ u_y;\ u_z.$$

Деформационное движение характеризуется скоростями линейных деформаций

$$\frac{\partial u_x}{\partial x};\quad \frac{\partial u_y}{\partial y};\quad \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

и скоростями угловых деформаций

$$\theta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right);$$

$$\theta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right);$$

$$\theta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right).$$

Угловая скорость жидкой частицы относительно мгновенной оси, проходящей через полюс, характеризуется составляющими (компонентами) угловой скорости ω

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right);$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right).$$

Вектор угловой скорости ω всегда нормален к плоскости, в которой происходит вращение. Индексы у компонентов угловой скорости показывают направление осей вращения.

Угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}\,. \tag{3.10}$$

Удвоенные компоненты угловой скорости ω_x, ω_y, ω_z называются компонентами вектора вихря $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= 2\boldsymbol{\omega};\\ \Omega_x &= 2\omega_x;\\ \Omega_y &= 2\omega_y;\\ \Omega_z &= 2\omega_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Понятие вектора вихря введено для описания движения частиц. Совокупность этих векторов составляет векторное поле.

Вихревая линия — линия, в каждой точке которой вектор угловой скорости совпадает с касательной к этой линии (рис. 3.6). Дифференциальные уравнения вихревых линий

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z, t)}, \tag{3.12}$$

где время t рассматривается как параметр.

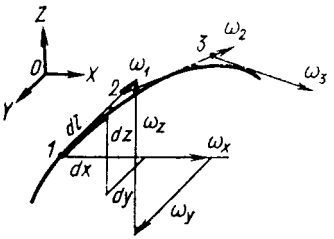


Рис. 3.6

Вихревые линии, так же как и линии тока, при установившемся движении не изменяются во времени. А при неустановившемся движении конфигурация вихревых линий может изменяться во времени.

По характеру движения частиц различают вихревое и потенциальное (безвихревое) движение жидкости.

Движение, при котором частицы жидкости вращаются вокруг мгновенных осей, проходящих через их полюсы, называется вихревым движением.

Движение, при котором такое вращение отсутствует, называется безвихревым (потенциальным) движением. При безвихревом движении

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0. \tag{3.13}$$

Тогда согласно (3.9) получим, что при безвихревом движении

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{3.13а}$$

Из (3.13а) следует, что должна существовать функция Ф, удовлетворяющая условиям

$$u_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \qquad u_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \qquad u_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{3.14}$$

Эта функция называется потенциалом скорости.

Действительно, учитывая, что потенциал скорости является непрерывной функцией от x, y, z, t, и принимая во внимание независимость значений второй производной непрерывной функции от порядка дифференцирования, имеем

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}.$$

Знак минус в (3.14) принят для того, чтобы подчеркнуть, что движение происходит от точек с бо́льшим значением потенциала скорости к точкам с меньшим его значением. В общем случае потенциал скорости может зависеть не только от координат x, y, z,

но и от времени t:

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t).$$

Таким образом, потенциальное движение может быть установившимся и неустановившимся.

3.3. Ускорение жидкой частицы

Ускорение жидкой частицы можно представить в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial u}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Так как $dx/dt = u_x$, $dy/dt = u_y$, $dz/dt = u_z$, то в проекциях на оси координат имеем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z;\\
\frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z}u_z;\\
\frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z}u_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

Частные производные по времени $\partial u_x/\partial t$, $\partial u_y/\partial t$, $\partial u_z/\partial t$ от проекций скорости представляют собой проекции л о к а л ь н о г о (местного) у с к о р е н и я в точке. Они характеризуют закон изменения поля скоростей во времени. Локальное ускорение равно нулю при установившемся движении.

Суммы такого вида

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z$$

называют проекциями к о н в е к т и в н о г о у с к о р е н и я, поскольку оно определяет ускорение частицы при изменении ее положения в поле скоростей (конвекции). Конвективное ускорение характеризует неоднородность поля скоростей в данный момент времени.

Суммы проекций локального и конвективного ускорений называются проекциями с у б с т а н ц и о н а л ь н о г о, или п о л н о г о, у с к о р е н и я du_x/dt, du_y/dt, du_z/dt.

3.4. Уравнение неразрывности жидкости

Как уже отмечалось, будем рассматривать только такие движения, при которых внутри жидкости не возникают пустоты, не появляются разрывы.

Выделим в области, занятой движущейся жидкостью, неподвижный бесконечно малый параллелепипед, у которого ребра dx,

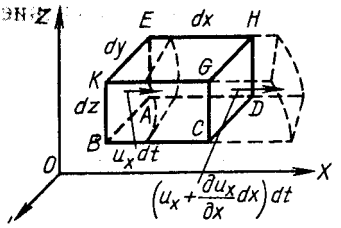


Рис. 3.7

dy и dz параллельны соответственно осям координат (рис. 3.7). Через выделенный параллелепипед течет жидкость. Определим массу жидкости, проходящей через поверхность параллелепипеда за время dt.

Сначала проведем эти расчеты для направления, совпадающего с направлением оси OX. Масса, поступающая в выделенный параллелепипед через грань $ABKE$ за время dt, равна

$$\rho u_x \, dy \, dz \, dt.$$

Считаем плотность и скорость движения жидкости непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и времени, тогда для массы, выходящей за время dt через грань $DCGH$ из параллелепипеда, получим выражение

$$\rho u_x dy \, dz \, dt + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dx \, dy \, dz \, dt.$$

Приращение массы внутри параллелепипеда за счет движения жидкости вдоль оси OX равно разности

$$\rho u_x \, dy \, dz \, dt - \left[\rho u_x + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dx\right] dy \, dz \, dt =$$

$$= -\frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} dx \, dy \, dz \, dt.$$

Определяя аналогично приращения массы в параллелепипеде за счет движения жидкости вдоль осей OY и OZ, получаем соответственно

$$-\frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} dy \, dx \, dz \, dt;$$

$$-\frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} dz \, dy \, dx \, dt.$$

Суммарное изменение массы внутри элементарного параллелепипеда за счет движения жидкости, т. е. за счет разности приносимой потоком в параллелепипед и уносимой из него массы, равно

$$-\left[\frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z}\right] dx \, dy \, dz \, dt. \qquad (3.16)$$

Изменение массы в неизменном объеме должно вызвать изменение плотности

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt.$$

Изменение массы за время dt, выраженное через изменение плотности, равно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, dx\, dy\, dz. \tag{3.17}$$

Приравнивая (3.16) к (3.17), после сокращений получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0. \tag{3.18}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} = \frac{\rho \partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u_x;$$

$$\frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} = \frac{\rho \partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} u_y;$$

$$\frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = \frac{\rho \partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} u_z;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{d\rho}{dt},$$

т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} u_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} u_z,$$

после преобразований получим

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0. \tag{3.19}$$

Полученное уравнение выражает условие неразрывности жидкости и называется уравнением неразрывности. Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и $d\rho/dt = 0$. Поэтому для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности приобретает вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{3.20}$$

Каждый из членов этой суммы характеризует скорость изменения длины единичного отрезка по соответствующему направлению. Сумма этих членов представляет собой скорость относительного изменения элементарного объема жидкости (объемное расширение) и называется дивергенцией или расхождением вектора скорости:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} u.$$

Дивергенция — скалярная величина.

Уравнение неразрывности может быть записано в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} u = 0. \tag{3.19a}$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) имеем

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{3.20a}$$

Для установившегося движения сжимаемой жидкости, когда $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, из (3.18) получим

$$\frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} = 0. \tag{3.18a}$$

Приведем без вывода уравнение неразрывности для струйки сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial (\rho Q)}{\partial l} + \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t} = 0. \tag{3.21}$$

Если рассматривается несжимаемая жидкость ($\rho = \text{const}$), уравнение (3.21) принимает вид

$$\frac{\partial Q}{\partial l} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \tag{3.22}$$

Для установившегося движения имеем $\partial\omega/\partial t = 0$. Частная производная от площади живого сечения по времени может быть равна нулю и при неустановившемся движении несжимаемой жидкости, если площадь живого сечения ω неизменна во времени. Тогда в этих двух случаях при $\partial\omega/\partial t = 0$ уравнение (3.22) обращается в

$$\partial Q/\partial l = 0, \tag{3.23}$$

т. е. расход по длине струйки не изменяется в данный момент времени и имеет одно и то же (idem) значение Q. В другие моменты времени при указанных условиях расход может быть иным, но неизменным по длине элементарной струйки.

При установившемся движении расход жидкости не изменяется как во времени, так и по длине струйки, т. е. $Q = \text{const}$.

3.5. Потоки жидкости

Классификация потоков по характеру границ. Потоком жидкости в гидравлике называют движущуюся массу жидкости, ограниченную направляющими твердыми поверхностями, поверхностями раздела жидкостей или свободными поверхностями. В зависимости от характера и сочетания ограничивающих поток поверхностей потоки делятся на безнапорные и напорные, и гидравлические струи.

Безнапорные потоки ограничены частично твердой, частично свободной поверхностью. Примером таких потоков может служить поток в реке или канале, а также в трубе, работающей неполным сечением.

Напорные потоки ограничены твердыми поверхностями, например поток в трубе, все сечение которой заполнено движущейся жидкостью и стенки которой испытывают давление со стороны потока, отличающееся от давления окружающей среды (в таких случаях говорят, что труба работает полным сечением под напором).

Гидравлические струи ограничены только жидкостью или газовой средой, например струя, вытекающая из сосуда через отверстие в атмосферу, или струя воды, выбрасываемая гидромонитором при подводной разработке грунта.

Живое сечение, гидравлический радиус. Сечение потока, во всех точках которого линии тока, пересекающие эту поверхность, нормальны к ней, называется живым сечением потока. Разбив поток на элементарные струйки, получим, что площадь живого сечения потока равна сумме площадей $d\omega$ живых сечений элементарных струек:

$$\omega = \int_{\omega} d\omega.$$

Смоченный периметр представляет собой длину линии, по которой жидкость в живом сечении соприкасается с твердыми поверхностями, ограничивающими поток. При напорных потоках длина смоченного периметра χ равна длине всего периметра сечения, а в безнапорных потоках смоченный периметр составляет некоторую часть полного периметра.

Гидравлическим радиусом называется отношение площади живого сечения к смоченному периметру в этом сечении:

$$R = \omega/\chi. \qquad (3.24)$$

Как будет показано далее, гидравлический радиус — важная характеристика при определении расхода, проходящего через живое сечение.

В напорном потоке для круглого сечения (диаметр d, радиус r_0) имеем

$$R = \omega/\chi = \pi d^2/(4\pi d) = d/4 \quad \text{или} \quad R = r_0/2.$$

Следовательно, в данном случае гидравлический радиус равен 0,5 геометрического радиуса или 0,25 диаметра.

В безнапорном потоке для прямоугольного живого сечения (ширина по дну b, глубина жидкости h) гидравлический радиус равен

$$R = \omega/\chi = bh/(b+2h) = h/(1+2h/b).$$

В достаточно широких потоках (малые значения отношения h/b) гидравлический радиус принимают равным глубине наполнения.

Расход. Средняя скорость. Объемное количество жидкости, проходящей через живое сечение потока в единицу времени, называется

расходом потока в данном сечении или просто расходом. Расход потока равен сумме расходов элементарных струек, составляющих поток:

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u\, d\omega. \tag{3.25}$$

Важной характеристикой потока является средняя скорость потока в данном сечении, представляющая собой частное от деления расхода Q на площадь живого сечения ω потока:

$$v = Q/\omega. \tag{3.26}$$

В реальных потоках вязкой жидкости местные скорости в различных точках живого сечения будут различными. Как будет показано далее, только в отдельных точках живого сечения местная скорость u будет равна средней скорости v. Введение понятия о средней скорости потока в данном живом сечении позволяет проще решать практические задачи.

Рассматривается некий условный (фиктивный) поток, все точки живого сечения в котором характеризуются одними и теми же местными скоростями, равными средней скорости в данном живом сечении. Тогда, умножив площадь живого сечения ω на среднюю скорость в данном живом сечении v, получим действительный расход Q, проходящий через это живое сечение.

Средняя скорость в сечении представляет собой одинаковую для всех точек сечения воображаемую скорость, при которой через данное живое сечение проходит тот же расход, что и при действительных местных скоростях, разных в различных точках сечения.

По характеру изменения поля скоростей по координатам установившееся движение подразделяется на равномерное и неравномерное.

Равномерное движение характеризуется параллельностью и прямолинейностью линий тока. Размеры и форма живых сечений и средние скорости потока по его длине не изменяются. Местные скорости в соответственных точках всех живых сечений по длине потока также одинаковы. Ускорения при равномерном движении равны нулю. В безнапорном равномерном потоке как следствие вышесказанного и глубины будут неизменными по длине.

Неравномерное движение характеризуется тем, что семейство линий тока уже не представлено параллельными прямыми. Площади живых сечений и средние скорости могут быть переменными по длине потока. Неравномерное движение может быть ускоренным или замедленным.

Среди неравномерных движений выделяют плавно изменяющееся движение, которое характеризуется следующими признаками: линии тока примерно параллельны, кривизна их достаточно мала; живые сечения можно считать плоскими; изменения формы и площади живых сечений по длине потока происходят весьма плавно.

В связи с отмеченными особенностями при расчетах плавно изменяющихся потоков пренебрегают составляющими скоростей (и ускорений) в плоскости живого сечения. Если ось OX совпадает с направлением линий тока, то при плавно изменяющемся движении

$$u_x \approx u; \qquad u_y = 0; \qquad u_z \approx 0.$$

Тогда уравнение неразрывности (3.20) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

т. е. вдоль данной линии тока (вдоль потока) скорость не изменяется. В таком случае движение рассматривают как равномерное прямолинейное.

Неустановившееся (нестационарное) движение по характеру изменения скоростей во времени подразделяется на быстро изменяющееся и медленно изменяющееся. Последний вид движения часто называется также квазиустановившимся (квазистационарным). В переводе с латинского «квази» означает «якобы», «почти», «как бы».

В движущейся жидкости различают продольную составляющую скорости (или продольную скорость) и поперечные составляющие скорости. Обычно направление оси OX совпадает с направлением продольной скорости. Соответственно направление поперечных составляющих скорости совпадает с направлениями осей OY и OZ.

Распределение продольных скоростей по живому сечению или в различных точках вертикали, принадлежащей данному живому сечению, характеризует эпюра скоростей. Для всех точек живого сечения эпюра скоростей — объемная фигура, а эпюра скоростей на данной вертикали — плоская фигура.

Движения также подразделяются на пространственные (трехмерные), плоские и одномерные. В пространственном движении кинематические характеристики зависят от трех координат: x, y, z, например движение на повороте безнапорного потока в канале или на повороте напорного потока в трубопроводе или движение в канале с изменяющимся по длине живым сечением.

Плоским (двухмерным) движением считается такое, при котором кинематические характеристики зависят только от двух координат и не зависят от третьей. Например, если $u_x \neq 0$, $u_z \neq 0$, а $u_y = 0$, движение происходит в плоскостях, параллельных одной плоскости, в данном случае XOZ, и характеристики такого движения одинаковы во всех этих плоскостях. Такое движение происходит в достаточно широком канале: в открытом (безнапорное движение) или в закрытом, полностью заполненном жидкостью (напорное движение), а также при перемещении грунтовых вод

в достаточно широкой подземной области, поперечное сечение которой близко к прямоугольнику.

Одномерным называется движение, в котором скорости зависят только от одной координаты. Такое движение характерно для большинства гидравлических задач, когда достаточно принять в рассмотрение только среднюю скорость [см. (3.26)] и определять ее в зависимости лишь от продольной координаты.

Уравнение неразрывности для потока. От уравнения неразрывности для элементарной струйки несжимаемой жидкости (3.22) можно перейти к уравнению неразрывности для потока. Для потока несжимаемой (капельной) жидкости оно имеет вид

$$Q = v_1\omega_1 = v_2\omega_2 = \ldots = v_i\omega_i = \text{idem}. \qquad (3.27)$$

3.6. Контрольные вопросы и примеры

1. В чем заключаются особенности способов описания жидкости по Лагранжу и по Эйлеру?
2. Что такое линия тока, каково ее уравнение?
3. В чем различие установившегося и неустановившегося движений?
4. Могут ли совпасть линия тока и траектория движения частиц?
5. Что такое трубка тока, элементарная и конечная струйки жидкости?
6. Дайте определение живого сечения струйки, расхода жидкости и средней по живому сечению скорости.
7. В виде какой суммы можно представить движение жидкой частицы? Запишите соответствующие формулы.
8. Каковы различия вихревого и безвихревого (потенциального) движения?
9. Запишите выражение для угловой скорости и для ее компонентов.
10. Что характеризуют локальное и конвективное ускорения? Запишите соответствующие формулы.
11. Напишите уравнение неразрывности для неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Как изменится уравнение, если движение сжимаемой жидкости будет установившееся; если рассматривается установившееся движение, а жидкость несжимаемая? Какой физический закон применительно к жидкости отражает уравнение неразрывности?
12. Как записывается уравнение неразрывности для струйки сжимаемой и несжимаемой жидкости?
13. Каковы особенности безнапорных потоков, напорных потоков и гидравлических струй? Можно ли наблюдать безнапорное движение жидкости в полностью заполненной трубе?
14. Что такое живое сечение потока, смоченный периметр, гидравлический радиус?
15. Каковы характерные признаки равномерного и неравномерного движений? Чем отличается среди других видов неравномерного движения плавно изменяющееся движение? Какие наблюдаются изменения в кинематике плавно изменяющегося движения, если учесть все его особенности?
16. В чем отличия одномерного, плоского (двухмерного) и пространственного (трехмерного) движений?
17. Какова связь значений площадей живых сечений и средних скоростей в различных створах по длине при установившемся движении несжимаемой жидкости?

Пример 3.1. Определить значение гидравлического радиуса гидротехнического туннеля, по которому происходит напорное движение воды. Поперечное сечение туннеля — круглое, диаметр равен 13 м.

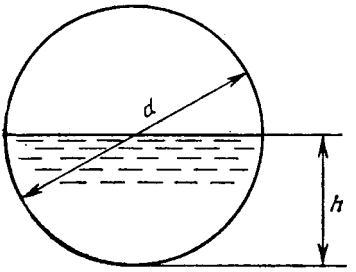


Рис. 3.8

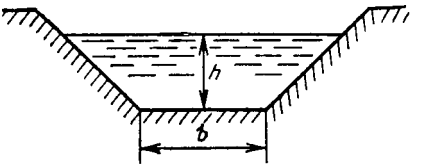


Рис. 3.9

Решение. Так как гидравлический радиус $R = \omega/\chi$ [см. (3.24)], то при напорном движении $R = d/4$ или в данном случае $R = 3{,}25$ м.

Пример 3.2. 1. Найти, чему равен гидравлический радиус в круглой трубе диаметром $d = 0{,}5$ м при напорном движении. 2. Определить, чему равен гидравлический радиус в той же трубе, но в условиях безнапорного движения, если глубина наполнения h равна $d/2$ (рис. 3.8).

Решение. 1. Учитывая, что площадь живого сечения $\omega = \pi d^2/4$, а смоченный периметр $\chi = \pi d$, имеем $R = d/4 = 0{,}125$ м.

2. В этом случае $\omega = \pi d/8$, а $\chi = \pi d/2$. Тогда вновь $R = d/4 = 0{,}125$ м.

Пример 3.3. 1. Определить гидравлический радиус при безнапорном движении жидкости в канале прямоугольного поперечного сечения с шириной по дну $b = 5$ м, глубина жидкости в канале $h = 3$ м.

2. Чему будет равен гидравлический радиус в том же канале в зимних условиях, если нижняя кромка льда (условно считаемая плоской) будет располагаться на расстоянии 3 м от дна, т. е. $h = 3$ м?

Решение. 1. Учитывая, что площадь живого сечения $\omega = bh$, а смоченный периметр $\chi = b + 2h$, имеем

$$R = \frac{h}{1 + 2\dfrac{h}{b}} = \frac{3}{1 + 2 \cdot 0{,}6} = 1{,}36 \text{ м}.$$

2. В данном случае к смоченному периметру добавляется длина (в поперечном сечении) плоской твердой границы, равная $b = 5$ м.

Тогда $\omega = bh$; $\chi = 2(b + h)$ и

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh}{2(b + h)} = \frac{h}{2\left(1 + \dfrac{h}{b}\right)} = \frac{3}{2(1 + 0{,}6)} = 0{,}94 \text{ м}.$$

Как видим, наличие льда (дополнительной длины в смоченном периметре) уменьшает значение гидравлического радиуса.

Пример 3.4. Найти значение гидравлического радиуса в канале с трапецеидальным поперечным сечением (рис. 3.9) с шириной по дну $b = 5$ м при глубине наполнения $h = 3$ м, если острый угол θ между боковым откосом канала и горизонтальной плоскостью составляет 45°.

Решение. Для трапецеидального сечения имеем площадь живого сечения $\omega = (b + h \operatorname{ctg} \theta)\, h$, смоченный периметр $\chi = b + 2h\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta}$.

Так как $\operatorname{ctg} 45° = 1$, то

$$R = \frac{(b + h)\, h}{b + 2h\sqrt{2}} = \frac{(5 + 3) \cdot 3}{5 + 2 \cdot 3 \cdot 1{,}41} = 1{,}78 \text{ м}.$$

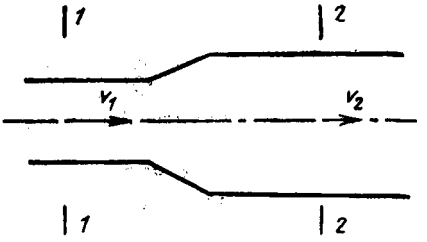


Рис. 3.10

Сравните с результатом примера 3.3.

Пример 3.5. В трубе (рис. 3.10) круглого поперечного сечения с переменным по длине диаметром происходит напорное установившееся движение. Известно, что в сечении *1—1* $d_1 = 0{,}1$ м; $v_1 = 3$ м/с, а в сечении *2—2* диаметр равен 0,25 м. Определить скорость потока в сечении *2—2*, а также расход жидкости.

Решение. Определим расход:

$$Q = v_1\omega_1 = 3 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0235 \text{ м}^3/\text{с} = 23{,}5 \text{ л/с}.$$

Учитывая, что согласно уравнению неразрывности для потока несжимаемой жидкости при установившемся движении $Q = v_1\omega_1 = v_2\omega_2$, имеем $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$, т. е. средние скорости потока в двух сечениях обратно пропорциональны площадям живого сечения или квадратам диаметров (если сечения круглые). Тогда

$$v_2 = v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 3\left(\frac{0{,}1}{0{,}25}\right)^2 = 0{,}48 \text{ м/с}.$$

Глава 4

ДИНАМИКА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

4.1. Напряженное состояние движущейся невязкой жидкости

Динамика жидкости — раздел гидромеханики, который изучает законы движения жидкостей в зависимости от приложенных к ним сил.

При заданных внешних силах задача динамики жидкости сводится к определению напряжений и кинематических параметров движения в каждой точке жидкости в любой момент времени, а также к определению гидродинамических сил воздействия потока на тела.

При движении невязкой жидкости не возникают силы внутреннего трения, а значит, в потоке нет касательных напряжений.

Нормальные напряжения в движущейся невязкой жидкости обладают теми же свойствами, что и в покоящейся жидкости, т. е. в данной точке их значения не зависят от направления действия. Таким образом, напряженное состояние движущейся невязкой жидкости может быть охарактеризовано в каждой точке значением нормального напряжения. Поскольку это значение не зависит от

направления действия, его, как и при равновесии жидкости, называют давлением.

Невязкая жидкость — это модель жидкости, т. е. идеализированная среда, не встречающаяся в природе и технике. Однако изучение законов динамики этой идеализированной среды имеет большое значение. При решении некоторых задач применение законов движения невязкой жидкости для расчета реальных явлений дает результаты, достаточно точно описывающие реальное явление (например, при обтекании тел вытянутой плавной формы — крыла, лопасти рабочего колеса турбины). Кроме того, уравнения динамики невязкой жидкости в некоторых случаях служат исходными для получения уравнений движения вязкой жидкости.

4.2. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости (уравнения Эйлера)

Рассмотрим движущуюся невязкую жидкость, у которой плотность ρ. Выделим в ней элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, параллельными координатным осям (рис. 4.1). На массу жидкости в объеме параллелепипеда, равную $\rho dx\, dy\, dz$, действуют массовые силы, пропорциональные массе, и поверхностные силы давления окружающей жидкости, распределенные по граням параллелепипеда, направленные по внутренним нормалям к граням и пропорциональные площадям соответствующих граней.

Составим уравнения движения выделенной массы в проекциях на координатные оси.

Произведение массы жидкости в параллелепипеде на проекцию ускорения движения его центра масс (полюса) на направление OX равно

$$\rho\, dx\, dy\, dz\, du_x/dt,$$

где u_x — скорость центра масс в направлении X.

Проекция на направление OX массовых сил, действующих на выделенную массу жидкости, равна

$$F_x \rho\, dx\, dy\, dz,$$

где F_x — проекция на ось OX плотности распределения массовой силы.

Чтобы записать проекцию сил давления на ось OX, вспомним, что в сплошной жидкой среде давление есть непрерывная функция координат точек жидкости и времени [$p = p(x, y, z, t)$].

Обозначим p давление в произвольной точке с координатами x, y, z на левой вертикальной грани. В силу сплошности жидкости и непрерывности функции давления $p = f(x, y, z, t)$ на правой грани в точке с координатами $(x + dx, y, z)$ давление равно $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ с точностью до бесконечно малых второго порядка.

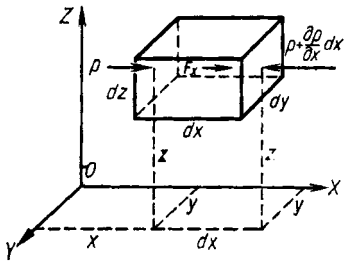


Рис. 4.1

Разность давлений — $\frac{\partial p}{\partial x}\,dx$ будет одинаковой для любой пары выбранных на гранях точек с одинаковыми координатами y и z, при этом проекция на ось OX результирующей силы давления равна

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Записав уравнение движения в направлении OX, получим

$$F_x\rho\,dx\,dy\,dz-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz=\rho\,dx\,dy\,dz\,\frac{du_x}{dt}$$

или после деления на массу $\rho\,dx\,dy\,dz$

$$F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{du_x}{dt}.$$

Аналогично можно получить уравнения движения в проекциях на направления осей OY и OZ:

$$F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{du_y}{dt}\quad\text{и}\quad F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{du_z}{dt}.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений движения невязкой жидкости имеет вид

$$\left.\begin{aligned}F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{du_x}{dt};\\ F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{du_y}{dt};\\ F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{du_z}{dt}.\end{aligned}\right\}\qquad(4.1)$$

Эти дифференциальные уравнения были впервые получены действительным членом Петербургской Академии наук Л. Эйлером в 1755 г.

Учитывая, что для неустановившегося движения компоненты (проекции) скорости u являются функциями времени, можно записать ускорения выделенной массы в развернутом виде:

$$\frac{du_x}{dt}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Так как

$$\frac{dx}{dt}=u_x;\qquad\frac{dy}{dt}=u_y;\qquad\frac{dz}{dt}=u_z,$$

уравнения Эйлера (4.1) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z; \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z}u_z; \\ F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z}u_z. \end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

Для случая покоящейся жидкости ($u_x = u_y = u_z = 0$) уравнения (4.1) совпадут с дифференциальными уравнениями равновесия жидкости (2.4).

Уравнение движения невязкой жидкости вдоль линии тока имеет вид

$$F_l - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \quad (4.3)$$

где F_l — проекция плотности распределения массовых сил на направление касательной к линии тока; $\mathrm{d}u/dt$ — ускорение частицы.

Уравнение (4.3) после преобразований имеет вид

$$F_l - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial l}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial l}$$

или

$$F_l - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} - \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.4)$$

В задачах динамики жидкости массовые силы обычно считаются заданными (известными). Неизвестными являются функции давления $p = p(x, y, z, t)$, проекции скорости $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$ и плотность $\rho(x, y, z, t)$ — всего пять неизвестных функций.

Для определения неизвестных переменных используется система уравнений Эйлера. Поскольку число неизвестных превышает число уравнений, к системе Эйлера добавляют уравнение неразрывности и уравнение состояния среды.

Для несжимаемой жидкости уравнение состояния $\rho = \mathrm{const}$ и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

4.3. Уравнения движения невязкой жидкости в форме Громеки

Профессором Казанского университета И. С. Громекой в 1881 г. уравнения Эйлера были преобразованы и записаны в иной форме.

Рассмотрим уравнения (4.2). В первом из них вместо $\partial u_x/\partial y$ и $\partial u_x/\partial z$ подставим их выражения из (3.9):

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2\omega_z \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + 2\omega_y.$$

Тогда

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_y}{\partial x}u_y + \frac{\partial u_z}{\partial x}u_z\right) +$$

$$+ 2(u_z\omega_y - u_y\omega_z) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) + 2(u_z\omega_y - u_y\omega_z),$$

где

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

Аналогично преобразовав два других уравнения системы (4.2), получим уравнения в форме, данной Громекой:

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 2(u_z\omega_y - u_y\omega_z); \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 2(u_x\omega_z - u_z\omega_x); \\ F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 2(u_y\omega_x - u_x\omega_y). \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

4.4. Уравнения Громеки при действии массовых сил, имеющих потенциал

Если действующие на жидкость массовые силы обладают потенциалом, то проекции плотности распределения массовых сил F_x, F_y, F_z представляются частными производными от потенциальной функции Π:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

откуда

$$-\mathrm{d}\Pi = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z. \quad (4.5а)$$

Подставив значения F_x, F_y, F_z в систему (4.5), получим уравнения движения несжимаемой жидкости под действием сил, имеющих потенциал:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+2(u_z\omega_y-u_y\omega_z)\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+2(u_x\omega_z-u_z\omega_x),\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+2(u_y\omega_x-u_x\omega_y).
\end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

4.5. Уравнение Бернулли для установившегося движения невязкой несжимаемой жидкости при действии массовых сил, имеющих потенциал

При установившемся движении частные производные составляющих скорости по времени равны нулю:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_z}{\partial t}=0.$$

Тогда для рассматриваемого установившегося движения невязкой жидкости уравнения (4.6) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=2(u_z\omega_y-u_y\omega_z);\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=2(u_x\omega_z-u_z\omega_x);\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(-\Pi-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)&=2(u_y\omega_x-u_x\omega_y).
\end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Выбрав на любой линии тока элементарное перемещение dl, получим для его проекций на координатные оси

$$dx=u_x dt; \qquad dy=u_y dt; \qquad dz=u_z dt.$$

Умножив каждое из уравнений (4.6) последовательно на проекции dx, dy, dz элементарного перемещения вдоль линии тока и просуммировав уравнения, получим

$$d\left(\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=-2[(u_z\omega_y-u_y\omega_z)\,dx+(u_x\omega_z-u_z\omega_x)\,dy+$$
$$+(u_y\omega_x-u_x\omega_y)\,dz].$$

Правую часть полученного выражения можно переписать в виде определителя. Тогда

$$d\left(\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=-2\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \qquad (4.8)$$

Если определитель обращается в нуль, то

$$\mathrm{d}\left(\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=0$$

и

$$\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{const}. \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) называется уравнением Бернулли по имени действительного члена Петербургской Академии наук Даниила Бернулли. Впервые термин «гидродинамика» появился в книге Д. Бернулли, опубликованной в 1738 г.

Уравнение Бернулли для линии тока (элементарной струйки) при установившемся движении может быть выведено и другим способом. Умножим обе части уравнений Эйлера (4.1) последовательно на $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ и просуммируем:

$$F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+\frac{du_y}{dt}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z.$$

Так как $\mathrm{d}x=u_x\mathrm{d}t$; $dy=u_y\mathrm{d}t$; $\mathrm{d}z=u_z\mathrm{d}t$, после подстановки этих значений в правую часть уравнения получим

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}u_x\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}u_y\mathrm{d}t+\frac{du_z}{\mathrm{d}t}u_z\mathrm{d}t=u_x\mathrm{d}u_x+$$

$$+u_y\mathrm{d}u_y+u_z\mathrm{d}u_z=\mathrm{d}\left(\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\right)=\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Учитывая (4.5а), — $\mathrm{d}\Pi=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z$ и тот факт, что при $\partial p/\partial t=0$ (установившееся движение) $\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+$ $+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}p$, найдем $\mathrm{d}\left(\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)=0$.

После интегрирования с учетом несжимаемости жидкости приходим к уравнению Бернулли

$$\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=\text{const}.$$

Выясним, в каких случаях установившегося движения невязкой несжимаемой жидкости справедливо уравнение Бернулли или, иначе говоря, в каких случаях определитель в правой части уравнения (4.8) обращается в нуль.

Известно, что определитель равен нулю, если две строки (или два столбца) равны или пропорциональны друг другу или если одна из его строк или один из столбцов равны нулю.

Рассмотрим эти случаи последовательно.

1. Пропорциональны члены первой и третьей строк, т. е. уравнение Бернулли справедливо при выполнении условия

$$dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z.$$

Это условие выполняется на линиях тока (3.7). Таким образом, уравнение Бернулли справедливо вдоль линий тока. Для различных линий тока значение постоянной уравнения (4.9) в общем случае будет различным.

2. Пропорциональны члены первой и второй строк, т. е. уравнение Бернулли справедливо при выполнении условия

$$dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z.$$

Это условие выполняется на вихревых линиях (3.12). Поэтому уравнение Бернулли справедливо вдоль вихревых линий. На каждой вихревой линии константа уравнения (4.9) сохраняет свое значение и может изменяться при переходе с одной линии на другую.

3. Пропорциональны члены второй и третьей строк:

$$\omega_x/u_x = \omega_y/u_y = \omega_z/u_z = a = \text{const}. \qquad (4.10)$$

Тогда

$$\omega_x = u_x a; \qquad \omega_y = u_y a; \qquad \omega_z = u_z a.$$

Подставив полученные выражения в уравнение вихревой линии

$$dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z,$$

получим уравнение линий тока

$$dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае векторы скорости и угловой скорости ω параллельны (их направления совпадают). Такое движение называется винтовым. Частицы при винтовом движении перемещаются по линиям тока (так как движение установившееся, то линии тока и траектории частиц совпадают), а линии тока в то же время являются вихревыми линиями, т. е. частицы еще и вращаются вокруг линии тока.

Из условий (4.10) видно, что равенство определителя нулю в этом случае не зависит от координат. Соответственно постоянство удельной энергии при винтовом движении обеспечивается во всем пространстве, занятом находящейся в винтовом движении жидкостью.

Уравнение Бернулли (4.9)

$$\Pi + p/\rho + u^2/2 = \text{const}$$

при винтовом движении применимо к любой точке жидкости.

4. Условие равенства нулю членов второй строки определителя

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

означает, что движение безвихревое (потенциальное).

Уравнение Бернулли (4.9) действительно для всех точек области потенциального движения.

5. Условие равенства нулю членов третьей строки определителя

$$u_x = u_y = u_z = 0$$

соответствует равновесию жидкости.

4.6. Уравнение Бернулли для частных случаев

Чтобы применить уравнение Бернулли (4.9) для практических расчетов, необходимо определить вид потенциальной функции Π в зависимости от действующих на жидкость массовых сил.

1. На жидкость действует только одна массовая сила тяжести. В этом случае проекции на оси координат плотности распределения массовых сил $F_x = F_y = 0$; $F_z = -g$ (ось OZ направлена вертикально вверх).

Из (4.5а) имеем для данного случая

$$-\mathrm{d}\Pi = -g\,\mathrm{d}z$$

или

$$\Pi = gz + C. \tag{4.11}$$

Подставив полученное значение Π в (4.9), получим уравнение Бернулли для установившегося движения несжимаемой невязкой жидкости при действии одной массовой силы — силы тяжести:

$$gz + p/\rho + u^2/2 = \text{const} \tag{4.12}$$

или

$$z + p/\rho g + u^2/2g = \text{const}. \tag{4.13}$$

Для частицы в двух ее положениях 1 и 2 уравнения Бернулли (4.12) и (4.13) можно записать в виде

$$gz_1 + p_1/\rho + u_1^2/2 = gz_2 + p_2/\rho + u_2^2/2 \tag{4.14}$$

или

$$z_1 + p_1/\rho g + u_1^2/2g = z_2 + p_2/\rho g + u_2^2/2g. \tag{4.15}$$

2. На жидкость действуют массовые силы: сила тяжести, центробежная сила инерции переносного движения и кориолисова сила инерции (случай относительного движения). Такое движение будет наблюдаться, например, в криволинейном канале, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 4.2).

Выберем систему координат: направим ось OZ вдоль оси вращения, а оси OX и OY пусть вращаются вместе с каналом.

Рассмотрим движение жидкости вдоль линии тока (или, что то же, элементарную струйку жидкости). Пусть u — местная скорость

жидкости относительно выбранной вращающейся системы координат.

Отнесенная к единице массы сила тяжести имеет проекции

$$F_{x_1} = F_{y_1} = 0;$$

$$F_{z_1} = -g.$$

Отнесенная к единице массы центробежная сила инерции представляет собой $\omega^2 r$ (r — расстояние рассматриваемой точки от оси вращения).

Ее проекции

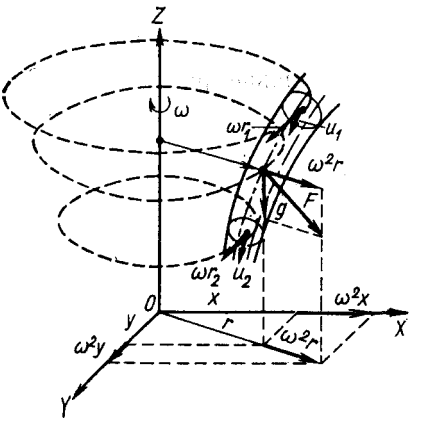


Рис. 4.2

$$F_{x_2} = \omega^2 x; \qquad F_{y_2} = \omega^2 y; \qquad F_{z_2} = 0.$$

Учитывая, что массовые силы имеют потенциал, запишем

$$-\mathrm{d}\Pi = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z \tag{4.16}$$

и получим

$$-\mathrm{d}\Pi = \omega^2 x\,\mathrm{d}x + \omega^2 y\,\mathrm{d}y - g\,\mathrm{d}z.$$

После интегрирования найдем

$$\Pi = -\omega^2 (x^2 + y^2)/2 + gz + C.$$

Так как

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

то

$$\Pi = gz - \omega^2 r^2/2 + C. \tag{4.17}$$

Вектор кориолисовой силы нормален к вектору относительной скорости движения жидкости, поэтому в выражении отсутствуют проекции плотности распределения кориолисовой силы.

Уравнение Бернулли для рассмотренного движения имеет вид

$$gz + p/\rho + u^2/2 - \omega^2 r^2/2 = \mathrm{const} \tag{4.18}$$

или

$$z + p/\rho g + u^2/2g - \omega^2 r^2/2g = \mathrm{const}. \tag{4.19}$$

Для двух сечений элементарной струйки имеем

$$gz_1 + p_1/\rho + u_1^2/2 - \omega^2 r_1^2/2 = gz_2 + p_2/\rho + u_2^2/2 - \omega^2 r_2^2/2, \tag{4.20}$$

или

$$z_1 + p_1/\rho g + u_1^2/2g - \omega^2 r_1^2/2g = z_2 + p_2/\rho g + u_2^2/2g - \omega^2 r_2^2/2g. \tag{4.21}$$

Величина ωr представляет собой переносную скорость.

4.7. Энергетическая интерпретация уравнения Бернулли для установившегося движения

Рассмотрим уравнение Бернулли для установившегося движения невязкой несжимаемой жидкости при действии сил тяжести и сил давления (4.13):

$$z + p/\rho g + u^2/2g = \text{const}.$$

Здесь z представляет собой высоту расположения сечения элементарной струйки над некоторой горизонтальной плоскостью, называемой плоскостью сравнения. Этой высоте легко придать энергетический смысл. Действительно, если принять плоскость сравнения за плоскость нулевой потенциальной энергии, то можно утверждать, что, подняв массу жидкости M на высоту z, ей сообщили потенциальную энергию Mgz. Отсюда следует, что $z = Mgz/Mg$ выражает потенциальную энергию, отнесенную к единице веса, которую называют удельной потенциальной энергией положения.

Величине $p/\rho g$ может быть также придан энергетический смысл. Рассмотрим элементарную струйку с площадью живого сечения $d\omega$, давлением p и скоростью u. Сила давления равна $p\,d\omega$. При перемещении частиц, расположенных в данном сечении, за время dt на расстояние $u\,dt$ сила давления произведет работу на этом пути, равную $p\,d\omega\,u\,dt$. Отнеся эту работу к весу объема вытесненной жидкости $d\omega\,u\,dt$, т. е. разделив $p\,d\omega\,u\,dt$ на $pg\,d\omega u\,dt$, получим, что работа силы давления, отнесенная к единице веса жидкости, равна $p/\rho g$.

Частица с массой M и весом $G = Mg$ при движении со скоростью u имеет кинетическую энергию $Mu^2/2$. Если эту кинетическую энергию разделить на вес частицы, получим удельную (отнесенную к единице веса) кинетическую энергию $u^2/2g$.

Следовательно, каждый член уравнения Бернулли представляет собой удельную потенциальную или кинетическую энергию.

Сумма всех членов уравнения Бернулли представляет собой полную (потенциальную плюс кинетическую) удельную энергию жидкости в сечении потока.

Выше удельная энергия относилась к единице веса жидкости. Энергию можно также отнести к единице массы [см. уравнения (4.12), (4.14), (4.19)] или к единице объема.

Суммарная потенциальная и кинетическая энергия, отнесенная к единице массы, имеет вид

$$gz + p/\rho + u^2/2.$$

Суммарная энергия, отнесенная к единице объема, записывается как

$$\rho gz + p + \rho u^2/2.$$

Далее, говоря об удельной энергии, будем иметь в виду энергию, отнесенную к единице веса.

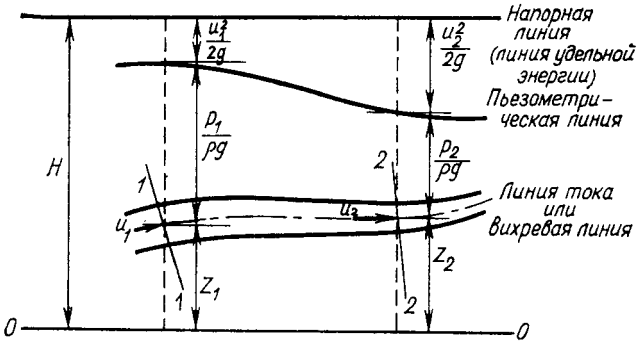


Рис. 4.3

Удельная энергия определяется относительно произвольно выбранной горизонтальной плоскости сравнения.

Трактовка уравнения Бернулли для установившегося движения невязкой несжимаемой жидкости с энергетических позиций такова: при потенциальном и винтовом движении суммарная удельная энергия распределена по потоку равномерно, т. е. одинакова для любой пары точек области, занятой движущейся жидкостью.

При вихревом движении (кроме винтового) удельная энергия различна для различных точек потока и сохраняет постоянное значение только на каждой отдельной линии тока или на вихревой линии.

Для удельной (отнесенной к единице веса) энергии в гидравлике применяется термин «напор»:

$$z + p/\rho g + u^2/2g = H. \qquad (4.22)$$

При этом $z + p/\rho g$ называется пьезометрическим [если в (4.22) $p = p_{изб}$], или гидростатическим, напором; $u^2/2g$ — скоростным напором; H — гидродинамическим напором.

Поскольку члены уравнения Бернулли имеют линейную размерность, их можно интерпретировать как высоты: z — геометрическая высота, или высота положения; $p/\rho g$ — высота, соответствующая давлению, и $u^2/2g$ — скоростная высота.

Откладывая от плоскости сравнения вертикальные отрезки z, $p/\rho g$ и $u^2/2g$, найдем геометрическое место концов сумм этих отрезков, которое расположится на горизонтальной плоскости, поднятой над плоскостью сравнения на высоту H. Эта плоскость называется напорной, на рис. 4.3 ее след представлен верхней горизонтальной линией, которая называется напорной линией, или линией удельной энергии. Соединив концы отрезков $z + p/\rho g$, получим пьезометрическую линию.

Разница между высотой, соответствующей давлению, и высотой, соответствующей избыточному давлению $p_{изб}/\rho g$, составляет $p_{ат}/\rho g$.

Тогда местоположение и напорной, и пьезометрической линии для двух указанных случаев (p или $p_{изб}$) будет отличаться на $p_{ат}/\rho g$.

Обычно под пьезометрической линией понимается линия, соединяющая концы отрезков, представляющих суммы $z + p_{изб}/\rho g$.

Пьезометрическим уклоном $J_п$ называется отнесенное к единице длины изменение пьезометрического напора $z + p/\rho g$ или изменение отметок пьезометрической линии. В общем случае

$$J_п = -\frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\rho g}\right). \qquad (4.23)$$

При потенциальном и винтовом движении для данного потока напорная плоскость одна, а при вихревом движении каждая линия тока и вихревая линия имеют индивидуальные напорные плоскости (их следы на чертеже — напорные линии).

Отметки пьезометрической линии могут уменьшаться по длине $\left[\frac{d}{dl}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)<0\right]$ или увеличиваться $\left[\frac{d}{dl}\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)>0\right]$.

Пьезометрический уклон считается положительным, если по течению струйки пьезометрическая линия понижается.

4.8. Контрольные вопросы

1. Чем отличается модель «невязкая жидкость»?
2. Как замыкается система уравнений Эйлера для движения невязкой жидкости? Какие величины в них известны, а какие нет?
3. Запишите указанные уравнения движения невязкой жидкости для неустановившегося, а затем для установившегося движения.
4. Какой вид имеет уравнение движения невязкой жидкости вдоль линии тока?
5. Каков основной смысл преобразований уравнений Эйлера, выполненных Громекой, и представления этих уравнений в форме, данной Громекой? Запишите уравнения Эйлера—Громеки.
6. Запишите уравнение Бернулли для невязкой несжимаемой жидкости (вдоль линии тока). Каковы условия, при которых это уравнение справедливо?
7. Как записывается уравнение Бернулли, если из массовых сил действует только сила тяжести?
8. Как изменяется уравнение Бернулли по сравнению с предыдущим случаем, если на жидкость помимо силы тяжести действуют и силы инерции?
9. Что такое удельная энергия?
10. Какой физический закон выражает уравнение Бернулли?
11. Что такое пьезометрический, скоростной и гидродинамический напор? Как они изменяются по длине (вдоль направления движения)?
12. Что такое пьезометрическая линия и напорная линия или линия удельной энергии? Как они ориентированы в вертикальной плоскости? Может ли напорная линия при установившемся движении невязкой жидкости быть наклонена вверх (по направлению движения)? Может ли эта линия иметь наклон вниз? Как ориентирована пьезометрическая линия?
13. Дайте определение пьезометрического уклона. Может ли он принимать отрицательные или нулевые значения?

Глава 5

ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

5.1. Напряжения в движущейся вязкой жидкости

При движении вязкой жидкости в ней возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, так как вязкая жидкость обладает способностью оказывать сопротивление относительному сдвигу своих слоев и частиц. Напомним, что при движении невязкой жидкости внутри нее могут возникать только нормальные напряжения. Нормальные и касательные напряжения в вязкой жидкости зависят не только от координат точек жидкости. В данной точке жидкости напряжения зависят от направления действия или, иначе, от ориентации в пространстве площадки, на которую они действуют.

Рассмотрим элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, выделенный в движущейся жидкости (рис. 5.1). Обозначим напряжения на гранях, ближайших к началу координат ($ABKE$, $AEHD$, $ABCD$), p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zy}.

Первый индекс указывает направление оси, которой перпендикулярна данная грань, т. е. направление нормали к граням, второй — направление действия напряжения, т. е. параллельно какой оси координат оно направлено.

Так, касательное напряжение τ_{yx} действует на грани, перпендикулярной оси OY, в направлении оси OX; τ_{zx} действует на грани, перпендикулярной оси OZ, в направлении оси OX и т. д.

Считая напряжения непрерывно изменяющимися по объему жидкости, получим значения напряжений на всех гранях параллелепипеда, пользуясь разложением функций напряжения в ряд Тейлора (табл. 5.1).

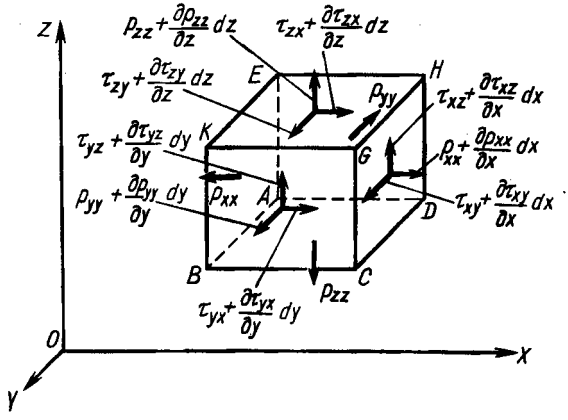


Рис. 5.1

Отметим (без доказательства), что в любой точке потока вязкой жидкости касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках, направленные по нормали к линии пересечения этих площадок, равны друг другу, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Таким образом, напряженное состояние вязкой движущейся жидкости характеризуется шестью независимыми компонентами напряжений

$$p_{xx}; \qquad p_{yy}; \qquad p_{zz}; \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}; \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

5.2. Уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях

Составим уравнения движения массы жидкости, заключенной в элементарном параллелепипеде (рис. 5.1).

Сначала рассмотрим сумму проекций сил на направление оси OX. Эта сумма равна произведению массы параллелепипеда $\rho\, dx\, dy\, dz$ на проекцию ускорения движения его полюса (центра). При составлении проекций принято считать направления нормаль-

Таблица 5.1

Грань	Напряжения	
	нормальные	касательные
$ABKE$	p_{xx}	τ_{xy}, τ_{xz}
$DCGH$	$p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx$	$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$; $\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$
$AEHD$	p_{yy}	τ_{yx}, τ_{yz}
$BKGC$	$p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} dy$	$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$; $\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$
$ABCD$	p_{zz}	τ_{zx}, τ_{zy}
$EKGH$	$p_{zz} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} dz$	$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$; $\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$

ных напряжений совпадающими с направлениями внешних нормалей к граням параллелепипеда.

В проекции на ось OX уравнение движения имеет вид

$$F_x\rho\,dx\,dy\,dz - p_{xx}\,dy\,dz + \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\,dx\right)dy\,dz -$$

$$-\tau_{yx}\,dx\,dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dy\right)dx\,dz -$$

$$-\tau_{zx}\,dx\,dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy =$$

$$= \rho\,dx\,dy\,dz\,\frac{du_x}{dt},$$

где $\rho F_x\,dx\,dy\,dz$ — проекция суммарной массовой силы на ось OX.

После сокращений получим

$$\rho F_x + \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) = \rho\,\frac{du_x}{dt}.$$

Выполнив аналогичные преобразования для проекций сил на направления осей OY и OZ, получим систему дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости в напряжениях:

$$\left.\begin{aligned} F_x + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) &= \frac{du_x}{dt}; \\ F_y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) &= \frac{du_y}{dt}; \\ F_z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right) &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

Если считать заданными проекции плотности распределения массовых сил, в уравнения движения жидкости в напряжениях (5.1) входят десять неизвестных функций: u_x, u_y, u_z, p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, ρ.

Так как уравнений движения всего три, то система уравнений движения вязкой жидкости оказывается незамкнутой. Замыкание этой системы уравнений может быть осуществлено с помощью уравнения неразрывности и других соотношений, устанавливающих связи между неизвестными. Обычно эти соотношения вводятся на основе гипотез и потому обязательно должны быть подтверждены экспериментально.

5.3. Соотношения между напряжениями и скоростями деформаций в движущейся вязкой жидкости

В основу получения соотношений между касательными напряжениями τ и скоростями деформаций жидких частиц положен закон внутреннего трения Ньютона (1.12)

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dn},$$

где μ — динамическая вязкость; du/dn — градиент скорости по нормали к направлению движения.

Закон Ньютона применим только к слоистым потокам. Знак плюс или минус выбирается так, чтобы значение τ было положительным независимо от выбора положительного направления n.

Градиент скорости при слоистом движении жидкости выражает скорость угловой деформации частицы:

$$\frac{du}{dn} = \frac{d\theta}{dt}, \quad \text{т. е} \quad \tau = \pm \mu \frac{d\theta}{dt}.$$

Распространяя закон вязкого трения на трехмерное (пространственное) движение, получаем следующие выражения для касательных напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right); \\ \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right); \\ \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

В каждой точке движущейся вязкой жидкости кроме касательных напряжений есть нормальные напряжения, значения которых зависят от направления действия. Нормальные напряжения обладают следующим свойством: сумма значений нормальных напряжений, действующих на три взаимно перпендикулярные площадки, является инвариантом и не зависит от выбора площадок. Основываясь на этом свойстве, в рассмотрение вводят скалярную величину — давление в движущейся жидкости, которая определяется как среднее арифметическое из нормальных напряжений в данной точке, действующих по трем взаимно перпендикулярным направлениям:

$$p = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

Очевидно, зависимость нормального напряжения от направления действия, наблюдающаяся в вязкой жидкости, является следствием проявления вязкости.

Выразим нормальное напряжение через давление p и некоторые добавочные напряжения, зависящие от вязкости:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + p_{вxx}; \\ p_{yy} &= -p + p_{вyy}; \\ p_{zz} &= -p + p_{вzz}, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

где $p_{вxx}$, $p_{вyy}$, $p_{вzz}$ — добавочные нормальные напряжения от действия сил вязкости. Эти добавочные напряжения не зависят от значения давления, но зависят от направления действия. Знак минус перед давлением p означает, что направление давления p всегда совпадает с внутренними нормалями (внутрь объема) к соответствующим граням выделенного объема. Принято, как уже указывалось, считать значения p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} положительными, если их направления совпадают с соответствующими внешними нормалями к граням.

В вязкой несжимаемой жидкости добавочные напряжения $p_{вxx}$, $p_{вyy}$, $p_{вzz}$ прямо пропорциональны соответствующим скоростям деформаций (скоростям относительных удлинений), причем коэффициент пропорциональности равен 2μ, т. е.

$$p_{вxx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$p_{вyy} = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$p_{вzz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

При положительных значениях частных производных соответствующие добавочные напряжения от действия сил вязкости будут растягивающими, при отрицательных значениях — сжимающими.

Окончательно для нормальных и касательных напряжений в вязкой несжимаемой жидкости имеем

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y};$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right);$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right).$$

Отметим, что у твердого (упругого) тела, как следует из закона Гука, напряжения пропорциональны соответствующим относительным деформациям. Для вязких жидкостей напряжения пропорциональны скоростям деформаций.

Запишем уравнение движения (5.1), объединив в скобках все члены, зависящие от вязкости:

$$\left.\begin{aligned}
F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) &= \frac{du_x}{dt};\\
F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) &= \frac{du_y}{dt};\\
F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{zz}}{\partial z}\right) &= \frac{du_z}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad (5.5)$$

5.4. Уравнения Навье—Стокса

Подставив значения напряжений по (5.3) и (5.4) в (5.5) и произведя необходимые преобразования, получим уравнения движения вязкой несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкости в виде

$$\left.\begin{aligned}
F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) &= \frac{du_x}{dt};\\
F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) &= \frac{du_y}{dt};\\
F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) &= \frac{du_z}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

В (5.6) учтено, что получающаяся при преобразованиях сумма $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ для несжимаемой жидкости по уравнению

неразрывности равна нулю. Уравнения (5.6) можно переписать в сокращенной форме:

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u_x &= \frac{du_x}{dt}; \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 u_y &= \frac{du_y}{dt}; \\ F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 u_z &= \frac{du_z}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Отнесенные к единице массы силы вязкости (внутреннего трения) выражаются в (5.7) проекциями на оси координат $\nu\nabla^2 u_x$, $\nu\nabla^2 u_y$, $\nu\nabla^2 u_z$.

Выразив субстанциональное ускорение через локальное и конвективное, получим еще один вид уравнений движения вязкой жидкости:

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) &= \\ = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z; & \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) &= \\ = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial y}u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z}u_z; & \\ F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) &= \\ = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z}u_z. & \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

Эти уравнения записаны для неустановившегося движения неожимаемой вязкой жидкости.

Динамическая вязкость μ жидкостей в общем случае зависит от давления и температуры. В обычных условиях при соответствующем обосновании можно принять $\mu = \text{const}$.

Составляющие плотности распределения массовых сил F_x, F_y, F_z считаются заданными (известными), а плотность и кинематическая вязкость ν — постоянными.

Полученные уравнения совместно с уравнением неразрывности образуют замкнутую систему: при четырех уравнениях имеем четыре неизвестные функции

$$p,\ u_x,\ u_y,\ u_z.$$

Эти уравнения называются уравнениями Навье—Стокса.

Общее решение нелинейных дифференциальных уравнений Навье—Стокса пока не найдено. Но в ряде случаев получены частные решения. Для получения решения должны быть заданы начальные и граничные условия. Начальными условиями обычно задается распределение скоростей в области движения в некоторый момент времени. Граничными условиями задаются значения скорости или давления на границах потока. Граничные условия зависят от характера границ. На твердой границе используется условие прилипания частиц жидкости к твердому телу. Поэтому граничное условие на неподвижной твердой границе заключается в равенстве нулю скоростей потока. На подвижной твердой границе скорость жидкости совпадает со скоростью границы.

Границей потока может служить свободная поверхность. В качестве граничного условия на свободной поверхности принимается условие: давление во всех точках свободной поверхности одинаково и равно давлению во внешней среде.

Уравнения в форме Громеки (см. § 4.4) для вязкой жидкости при установившемся движении несжимаемой жидкости при действии массовых сил имеют вид

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}(\Pi + p/\rho + u^2/2) + \nu\nabla^2 u_x &= 2(u_z\omega_y - u_y\omega_z);\\ -\frac{\partial}{\partial y}(\Pi + p/\rho + u^2/2) + \nu\nabla^2 u_y &= 2(u_x\omega_z - u_z\omega_x);\\ -\frac{\partial}{\partial z}(\Pi + p/\rho + u^2/2) + \nu\nabla^2 u_z &= 2(u_y\omega_x - u_x\omega_y). \end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

5.5. Уравнение Бернулли для элементарной струйки, [для линии тока] вязкой жидкости при установившемся движении

Умножим уравнения (5.9) на проекции элементарного перемещения dx, dy, dz вдоль линии тока соответственно и просуммируем. Получим

$$d(\Pi + p/\rho + u^2/2) - \nu(\nabla^2 u_x\,dx + \nabla^2 u_y\,dy + \nabla^2 u_z\,dz) = -2\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \qquad (5.10)$$

В (5.10) вычитаемое можно рассматривать как работу сил вязкости на элементарном перемещении вдоль линии тока, отнесенную к единице массы жидкости. Обозначим его

$$dA = -\nu(\nabla^2 u_x\,dx + \nabla^2 u_y\,dy + \nabla^2 u_z\,dz).$$

Тогда получим

$$\mathrm{d}(\Pi + p/\rho + u^2/2 + A) = 0,$$

так как определитель равен нулю из-за пропорциональности первой и третьей строк [см. уравнение линии тока при установившемся движении (3.7)].

После интегрирования (для линии тока) найдем

$$\Pi + p/\rho + u^2/2 + A = \text{const}. \qquad (5.11)$$

Если из массовых сил действует только сила тяжести, (5.11) принимает вид

$$gz + p/\rho + u^2/2 + A = \text{const}. \qquad (5.12)$$

Здесь все члены уравнения отнесены к единице массы.

Для двух точек одной и той же линии тока, относя члены уравнения к единице веса, имеем

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + \frac{A_1}{g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + \frac{A_2}{g}.$$

На практике в большинстве случаев $A_2 > A_1$. Обозначим $(A_2 - A_1)/g = h_{\text{тр}}$.

Окончательно имеем уравнение Бернулли для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости (вдоль линии тока)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{\text{тр}}. \qquad (5.13)$$

Используя рассуждения, аналогичные приводящимся для невязкой жидкости, укажем, что полученное уравнение (5.13) можно рассматривать как уравнение для элементарной струйки вязкой несжимаемой жидкости при установившемся движении в поле тяжести Земли.

Здесь $h_{\text{тр}}$ — потери напора (потери удельной энергии) на участке между сечениями 1—1 и 2—2.

Напомним, что, как и ранее, удельной называем энергию, отнесенную к единице веса.

Затраченная на работу сил вязкости часть энергии превращается из механической в тепловую, причем этот процесс необратим. Он называется диссипацией энергии.

Из (5.13) очевидно, что $h_{\text{тр}}$ представляет собой разность удельной энергии жидкости в положениях 1 и 2 на одной и той же линии тока.

5.6. Уравнение Бернулли для потока при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости

Полученное уравнение Бернулли для струйки вязкой несжимаемой жидкости при установившемся движении (5.13) является основой, от которой перейдем к уравнению Бернулли для потока.

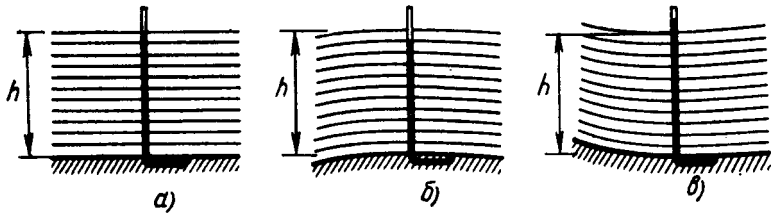


Рис. 5.2

Сначала необходимо решить вопрос о распространении уравнения Бернулли на поток в целом. Рассмотрим отдельно удельную потенциальную и кинетическую энергию.

Удельная потенциальная энергия потока. В плавно изменяющемся установившемся потоке

$$u_x \approx u;\quad u_y \approx 0;\quad u_z \approx 0;\quad \partial u/\partial t = 0.$$

Уравнения движения для плавно изменяющегося установившегося потока имеют вид

$$\left.\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2};\\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0;\\ F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

Два последних уравнения аналогичны уравнениям Эйлера для покоящейся жидкости (2.4). Отсюда можно сделать вывод, что при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости давление по живому сечению распределяется по гидростатическому закону, т. е.

$$z + p/\rho g = \text{const}.$$

Теперь можем определить в уравнении Бернулли для потока удельную потенциальную энергию применительно к любой выбранной в данном живом сечении точке. Сумма $z + p/\rho g$ для всех точек живого сечения при рассматриваемом движении будет одинаковой.

Если поле скоростей потока имеет искривленные линии тока, то частицы жидкости движутся по криволинейным траекториям, при этом нарушается гидростатический закон распределения давления в живом сечении. Если линии тока обращены выпуклостью вниз, то давление нарастает по вертикали более интенсивно, чем при гидростатическом законе. (На рис. 5.2, *а—в*, показаны безнапорные потоки с различной кривизной линий тока, пьезометры присоединены к дну).

Удельная кинетическая энергия потока. Удельная кинетическая энергия массы жидкости, протекающей через живое сечение в единицу времени, вычисленная по местным скоростям потока и отнесенная к единице веса,

$$E_{ku}=\frac{\int\limits_{\omega}\rho u\,d\omega\,\frac{u^2}{2}}{\rho g Q}=\frac{1}{2gQ}\int\limits_{\omega}u^3\,d\omega. \qquad (5.15)$$

Числитель представляет собой кинетическую энергию массы жидкости, протекающей в единицу времени через живое сечение, найденную по элементарным массам, проходящим через площадки $d\omega$ со скоростью u.

Вычисление E_{ku} по местным скоростям u потока весьма затруднительно, так как функция $u=u(x, y, z)$ для живого сечения потока не всегда известна. Целесообразно вычислять E_k не по местным скоростям, а по средней скорости потока в живом сечении $v=Q/\omega$. При расходе Q и средней скорости v удельная кинетическая энергия, вычисленная по средней скорости, равна

$$E_{kv}=\frac{\rho Q v^2/2}{\rho g Q}=\frac{v^2}{2g}.$$

Обозначим отношение E_{ku} и E_{kv} через α:

$$\alpha=\frac{E_{ku}}{E_{kv}}=\frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega}\left(\frac{u}{v}\right)^3 d\omega \qquad (5.16)$$

или

$$E_{ku}=\alpha E_{kv}.$$

Коэффициент α называется коэффициентом кинетической энергии или коэффициентом Кориолиса.

Запишем местную скорость u через среднюю скорость и некоторую знакопеременную добавку Δu:

$$u=v+\Delta u.$$

Получим по (5.16)

$$\alpha=\frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega}\left(\frac{v+\Delta u}{v}\right)^3 d\omega=\frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega}\left(1+\frac{\Delta u}{v}\right)^3 d\omega.$$

Далее

$$\alpha=\frac{1}{\omega}\int\limits_{\omega}\left[1+3\left(\frac{\Delta u}{v}\right)^2+3\,\frac{\Delta u}{v}+\left(\frac{\Delta u}{v}\right)^3\right]d\omega.$$

Из

$$Q=\int\limits_{\omega}(v+\Delta u)\,d\omega=\int\limits_{\omega}v\,d\omega+\int\limits_{\omega}\Delta u\,d\omega=Q+\int\limits_{\omega}\Delta u\,d\omega$$

следует, что $\int\limits_{\omega}\Delta u\,d\omega=0$.

Далее в силу знакопеременности Δu

$$\int_{\omega}\left(\frac{\Delta u}{v}\right)^3 d\omega \approx 0.$$

Таким образом,

$$\alpha = 1 + \frac{3}{\omega}\int_{\omega}\left(\frac{\Delta u}{v}\right)^2 d\omega \qquad (5.17)$$

или

$$\alpha = 1 + \frac{3}{\omega v^2}\int_{\omega}(\Delta u)^2 d\omega .$$

Из (5.17) ясно, что $\alpha > 1$.

Таким образом, удельная кинетическая энергия потока в данном сечении может быть определена по средней скорости в этом сечении, если известно значение коэффициента кинетической энергии

$$E_к = \alpha v^2/2g. \qquad (5.18)$$

В таком виде удельная кинетическая энергия входит в уравнение Бернулли для потока.

Коэффициент кинетической энергии α равен отношению действительной кинетической энергии массы жидкости, протекающей через живое сечение ($E_{ки}$), к кинетической энергии $E_{кv}$, вычисленной в предположении, что во всех точках живого сечения местные скорости равны средней скорости.

Обычно при прямолинейном турбулентном движении в трубах $\alpha \approx 1{,}05 \div 1{,}1$, при таком же движении в земляных каналах $\alpha \approx 1{,}1 \div 1{,}25$, при прямолинейном ламинарном движении в трубах $\alpha = 2$. В ряде случаев турбулентного движения, происходящего в сложных условиях (например, в криволинейных потоках), коэффициент α может быть существенно бóльшим.

Значения коэффициента α определяют экспериментально. Для этого сечение разбивают на малые площадки $\Delta\omega_i$ и измеряют скорости в центрах этих площадок. Затем, считая скорость постоянной в пределах площадок, определяют коэффициент кинетической энергии по соотношению

$$\alpha = \frac{1}{\omega v^3}\sum u_i^3 \Delta\omega_i. \qquad (5.19)$$

По полученным данным затем предлагают рекомендации о значениях α для использования в расчетах.

Уравнение Бернулли для потока. Распространим на поток жидкости, ограниченный неподвижными границами (канал, река, трубопровод), уравнение Бернулли, выведенное для струйки. В сечениях, выделенных по длине потока (рис. 5.3), движение должно быть плавно изменяющимся. Тогда для любой точки данного жи-

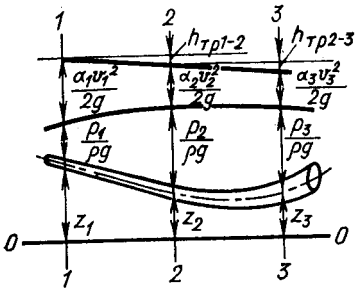


Рис. 5.3

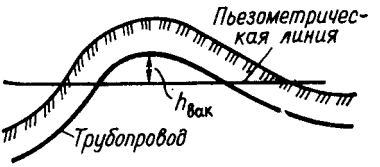


Рис. 5.4

вого сечения удельная потенциальная энергия $E_п = z + p/\rho g$ имеет одно и то же значение. Удельная кинетическая энергия будет равна $E_к = \alpha v^2/2g$.

Тогда в сечении, например, 1—1 удельная энергия потока равна

$$E_1 = E_{п1} + E_{к1} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}, \qquad (5.20)$$

где z_1 — высота произвольно выбранной в рассматриваемом сечении точки относительно любой горизонтальной плоскости сравнения (на рис. 5.3 она обозначена *0—0*).

Для потока вязкой жидкости сумма удельной потенциальной и удельной кинетической энергии

$$H = z + p/\rho g + \alpha v^2/2g$$

называется гидродинамическим напором (см. также § 4.7).

Потери удельной энергии на преодоление сопротивлений движению жидкости (на преодоление трения) на пути от сечения 1—1 до рассматриваемого сечения, например 2—2 или 3—3, оцениваются значением $h_{тр}$, т. е. частью механической энергии, необратимо переходящей в тепловую.

Уравнение Бернулли для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости между двумя сечениями, в которых движение является плавно изменяющимся, имеет вид

$$z_1 + p_1/\rho g + \alpha_1 v_1^2/2g = z_2 + p_2/\rho g + \alpha_2 v_2^2/2g + h_{тр}, \qquad (5.21)$$

где z_1 и z_2 — высоты положения произвольных точек, выбранных в двух сечениях потока; p_1 и p_2 — давления в этих же точках; v_1 и v_2 — средние скорости в рассматриваемых сечениях 1—1 и 2—2; α_1 и α_2 — коэффициенты кинетической энергии (коэффициенты Кориолиса) в сечениях: $h_{тр}$ — потери удельной энергии напора на участке между рассматриваемыми сечениями.

Подчеркнем, что движение должно удовлетворять условиям плавной изменяемости только в сечениях, к которым применяется

уравнение Бернулли. На участке между сечениями движение может и не быть плавно изменяющимся.

Все члены уравнения Бернулли (5.21) имеют линейную размерность и могут быть представлены графически.

При движении вязкой жидкости линия удельной энергии (напорная линия) не горизонтальна, как при движении невязкой жидкости, а представляет собой наклонную линию, так как удельная энергия потока (гидродинамический напор) $E = H = z + p/\rho g + \alpha v^2/2g$ при движении вязкой жидкости уменьшается в направлении движения. Пьезометрический напор (удельная потенциальная энергия) $z + p/\rho g$ в направлении движения может и уменьшаться, и увеличиваться в зависимости от конкретных условий. Если в напорном потоке в трубе при построении пьезометрической линии, соответствующей избыточному давлению, окажется, что на некотором участке она опустилась ниже точек оси трубы (рис. 5.4). значит в потоке на этом участке давление ниже атмосферного (вакуум). Разность между ординатами рассматриваемой точки сечения и пьезометрической линии на данной вертикали соответствует

$$h_{\text{вак}} = p_{\text{вак}}/\rho g.$$

Гидравлическим уклоном называют отношение потерь напора $h_{\text{тр}}$ к длине участка l, на котором эти потери происходят. При равномерном уменьшении отметок напорной линии

$$J = \frac{h_{\text{тр}}}{l} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha^2 v_2^2}{2g}\right)}{l}. \quad (5.22)$$

В общем виде

$$J = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right). \quad (5.23)$$

Из (5.23) имеем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right) + J = 0. \quad (5.24)$$

Пьезометрический уклон по (4.23) равен

$$J_{\text{п}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(z + \frac{p}{\rho g}\right).$$

При равномерном движении средняя скорость по длине не изменяется. Следовательно, линия удельной энергии расположена выше пьезометрической линии на значение скоростного напора $\alpha v^2/2g$. В безнапорном потоке пьезометрическая линия совпадает со свободной поверхностью, а линия удельной энергии проходит параллельно ей и выше на $\alpha v^2/2g$. При равномерном движении в от-

крытом русле уклон дна i, пьезометрический $J_п$ и гидравлический J уклоны равны между собой:

$$J = J_п = i = h_{тр}/l.$$

Количество движения потока. Подсчитанное по местным скоростям количество движения потока запишется в виде

$$(КД)_u = \int_\omega \rho u \, d\omega u = \rho \int_\omega u^2 \, d\omega.$$

По аналогии с изложенным выше для кинетической энергии имеем выражение количества движения для потока, полученное при допущении, что во всех точках живого сечения скорости одинаковы и равны средней скорости:

$$(КД)_v = \rho v^2 \omega.$$

Тогда коэффициент количества движения (коэффициент Буссинеска) равен

$$\alpha' = \frac{(КД)_u}{(КД)_v} = \frac{1}{\omega} \int_\omega \left(\frac{u}{v}\right)^2 d\omega \qquad (5.25)$$

или $(КД)_u = \alpha' (КД)_v$, т. е.

$$\int_\omega u^2 \, d\omega = \alpha' v^2 \omega. \qquad (5.25а)$$

Найдем α', вновь приняв $u = v + \Delta u$ (Δu — знакопеременная величина):

$$\alpha' = \frac{1}{\omega} \int_\omega \left(\frac{v + \Delta u}{v}\right)^2 d\omega = \frac{1}{\omega} \int_\omega \left(1 + \frac{\Delta u}{v}\right)^2 d\omega$$

или

$$\alpha' = \frac{1}{\omega} \int_\omega \left[1 + 2\frac{\Delta u}{v} + \left(\frac{\Delta u}{v}\right)^2\right] d\omega.$$

Так как по вышеизложенному $\int_\omega \Delta u \, d\omega = 0$, то

$$\alpha' = 1 + \frac{1}{\omega} \int_\omega \left(\frac{\Delta u}{v}\right)^2 d\omega. \qquad (5.26)$$

Очевидно, что коэффициент количества движения α' меньше, чем коэффициент кинетической энергии α, на $\frac{2}{\omega} \int_\omega \left(\frac{\Delta u}{v}\right)^2 d\omega$ [ср. (5.17) и (5.26)].

5.7. Уравнение Бернулли для неустановившегося движения вязкой жидкости

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса в форме Громеки для неустановившегося движения несжимаемой вязкой жидкости при условии, что массовые силы имеют потенциал Π:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial u_x}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)+\nu\nabla^2 u_x=2(u_z\omega_y-u_y\omega_z);\\
-\frac{\partial u_y}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)+\nu\nabla^2 u_y=2(u_x\omega_z-u_z\omega_x);\\
-\frac{\partial u_z}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)+\nu\nabla^2 u_z=2(u_y\omega_x-u_x\omega_y).
\end{aligned}\right\} \quad (5.27)$$

Умножив уравнения соответственно на dx, dy, dz, взятые на линии тока, а затем сложив их, получим

$$-\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}dx+\frac{\partial u_y}{\partial t}dy+\frac{\partial u_z}{\partial t}dz\right)-d\left(\Pi+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+A\right)=$$
$$=2\begin{vmatrix} dx & dy & dz\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}.$$

Рассмотрим движение вдоль линии тока. В этом случае определитель равен нулю. Далее, так как $dx=u_x dt$, $dy=u_y dt$, $dz=u_z dt$, то

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}dx+\frac{\partial u_y}{\partial t}dy+\frac{\partial u_z}{\partial t}dz=\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}u_x+\frac{\partial u_y}{\partial t}u_y+\frac{\partial u_z}{\partial t}u_z\right)dt=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right)dt=\frac{\partial u}{\partial t}dl,$$

где dl — элементарный отрезок на линии тока. Здесь учтено, что $u\,dt=dl$.

Проинтегрировав в данный момент времени вдоль линии тока в пределах от l_1 до l_2, получим

$$\left(\Pi_2+\frac{p_2}{\rho}+\frac{u_2^2}{2}+A_2\right)-\left(\Pi_1+\frac{p_1}{\rho}+\frac{u_1^2}{2}+A_1\right)=$$
$$=-\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial u}{\partial t}dl. \quad (5.28)$$

В (5.26) учтена и работа сил вязкости A, затраченная при элементарном перемещении единицы массы жидкости по линии тока.

Если из массовых сил действует только сила тяжести ($\Pi=$

$= gz + \text{const}$), то, относя все члены (5.26) к единице веса жидкости, найдем

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{\text{тр. н}} + h_{\text{ин}}, \qquad (5.29)$$

причем

$$h'_{\text{ин}} = \frac{1}{g} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial u}{\partial t} \, \mathrm{d}l.$$

Здесь $h'_{\text{ин}}$ — инерционный напор. Штрих при $h'_{\text{ин}}$ означает, что рассматривается элементарная струйка. Инерционный напор определяет изменения во времени удельной кинетической энергии жидкости на участке линии тока от l_1 до l_2. Это изменение кинетической энергии обусловлено локальными ускорениями. Инерционный напор имеет линейную размерность.

Потери удельной энергии (напора) при неустановившемся движении обозначены $h_{\text{тр. н}}$.

При неустановившемся движении сила инерции, отнесенная к единице веса жидкости, равна

$$\frac{\rho \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}l \, \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{\rho g \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}l} = \frac{1}{g} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial l} \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t},$$

имеем для силы инерции, отнесенной к единице веса жидкости,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{u^2}{2} \right).$$

Первый член представляет собой локальную силу инерции, а второй — конвективную. Таким образом, конвективное ускорение представлено в (5.27) скоростным напором.

Полученное уравнение (5.27) называется уравнением Бернулли для элементарной струйки вязкой несжимаемой жидкости при неустановившемся движении.

При переходе к уравнению Бернулли для потока при неустановившемся движении вязкой несжимаемой жидкости условимся рассматривать только такие случаи неустановившегося движения, при которых форма линий тока во времени не изменяется (а значения скоростей переменны во времени). По сути дела это потоки, ограниченные недеформируемыми стенками.

Для перехода к уравнению Бернулли для потока необходимо осреднить по живому сечению все члены полученного уравнения Бернулли для элементарной струйки (для линии тока) при неустановившемся движении. При этом инерционный напор для элементарной струйки $h'_{ин}$ и инерционный напор для потока $h_{ин}$ отнесем к единице веса жидкости:

$$h_{ин} = \frac{1}{\rho g Q}\int_{\omega} h'_{ин}\rho g u \, d\omega = \frac{1}{Q}\int_{\omega} u \, d\omega \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial u}{\partial t} \, dl.$$

В данный момент времени в связи с принятой выше неизменностью линий тока и несжимаемостью жидкости расход $dQ = u \, d\omega$ по длине струйки не изменяется, т. е. не зависит от длины.

С учетом коэффициента количества движения α' (см. § 5.6) запишем

$$h_{ин} = \frac{1}{gQ}\int_{l_1}^{l_2} dl \int_{\omega} u \frac{\partial u}{\partial t} \, d\omega = \frac{1}{gQ}\int_{l_1}^{l_2} dl \frac{\partial}{\partial t}\int_{\omega} \frac{u^2}{2} \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2gQ}\int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha' v^2 \omega) \, dl = \frac{1}{2gQ}\int_{l_1}^{l_2} 2\alpha' \omega v \frac{\partial v}{\partial t} \, dl,$$

где α'.— коэффициент количества движения (коэффициент Буссинеска); v — средняя скорость в живом сечении.

Так как средняя скорость и расход зависят только от времени и не зависят от продольной координаты, то $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$ и $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dt}$. Тогда

$$h_{ин} = \frac{1}{g}\int_{l_1}^{l_2} \alpha' \frac{\partial v}{\partial t} \, dl.$$

Считая, что коэффициент α' не зависит от времени, получаем

$$h_{ин} = \alpha' \frac{l}{g}\frac{\partial v}{\partial t},$$

где l — расстояние между выбранными сечениями.

Поскольку распределение скоростей по живому сечению при неустановившемся движении, строго говоря, не соответствует распределению скоростей при установившемся движении со средней скоростью v, выражение для инерционного напора $h_{ин}$ с учетом того, что при неустановившемся движении и коэффициент количества движения изменяется во времени, примет вид

$$h_{ин} = \alpha' \frac{l}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{l}{g}\frac{\partial \alpha'}{\partial t} = \frac{l}{g}\left(\alpha' \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right).$$

Без учета изменения α' во времени получим, что для движения в прямолинейной цилиндрической трубе ($\omega = \text{const}$, а средняя скорость v является функцией только времени и не изменяется по длине)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Тогда средний по живому сечению инерционный напор

$$h_{\text{ин}} = \alpha' \frac{l}{g} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

или

$$h_{\text{ин}} = \frac{\alpha'}{g} \frac{l}{\omega} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Уравнение Бернулли для потока несжимаемой жидкости при неустановившемся движении в прямолинейной цилиндрической трубе имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{\text{тр. н}} + h_{\text{ин}}, \qquad (5.30)$$

где

$$h_{\text{ин}} = \frac{\alpha' l}{g} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Важно отметить, что инерционный напор $h_{\text{ин}}$ может быть и положительным, и отрицательным. Если движение ускоренное ($\mathrm{d}v/\mathrm{d}t > 0$), то $h_{\text{ин}} > 0$. Если движение замедленное ($\mathrm{d}v/\mathrm{d}t < 0$), то и $h_{\text{ин}} < 0$. Инерционный напор не является мерой дополнительных потерь энергии, он выражает обратимые преобразования энергии. Полученное уравнение Бернулли для неустановившегося движения можно представить графически. При этом надо помнить, что уравнение выражает соотношение между параметрами потока только для данного момента времени.

При ускоренном движении линия удельной энергии понижается в направлении движения. Но при замедляющемся движении ($h_{\text{ин}} < 0$) на пути от первого до второго сечения будет происходить восстановление кинетической энергии и переход ее в потенциальную. Если при этом $h_{\text{тр.н}}$ меньше, чем $h_{\text{ин}}$, то полная удельная энергия по длине возрастает, т. е. отметки линии удельной энергии будут по длине увеличиваться. Такое положение линии удельной энергии невозможно при установившемся движении.

В практических расчетах обычно принимают потери удельной энергии при установившемся ($h_{\text{тр}}$) и неустановившемся ($h_{\text{тр. н}}$) движении равными. Такое допущение связано с недостаточным объемом исследований, посвященных гидравлическому сопротивлению неу-

становившегося движения жидкости, и несогласованностью (а иногда и противоречивостью) имеющихся данных о влиянии ускорений на потери удельной энергии.

5.8. Контрольные вопросы и примеры

1. Каково напряженное состояние движущейся вязкой жидкости? В чем его отличие от напряженного состояния движущейся невязкой жидкости?
2. Справедливо ли свойство парности касательных напряжений для движущейся вязкой жидкости?
3. Запишите уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях. Замкнута ли система этих уравнений, сколько в ней неизвестных?
4. Как записываются нормальные и касательные напряжения в движущейся вязкой несжимаемой жидкости? Чему они пропорциональны?
5. Запишите уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях, выделив все члены, зависящие от вязкости.
6. Запишите уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнения Навье—Стокса).
7. При каких условиях система уравнений Навье—Стокса считается замкнутой?
8. Перечислите граничные и начальные условия, необходимые для получения частных решений уравнений Навье—Стокса.
9. Запишите уравнение Бернулли для элементарной струйки (для линии тока) вязкой жидкости при установившемся движении. Как при их выводе учитывались те члены уравнений движения, которые явно связаны с вязкостью?
10. При каких условиях можно распространить запись удельной потенциальной энергии, сделанную для элементарной струйки вязкой жидкости, на поток той же жидкости?
11. Какие особенности установившегося плавно изменяющегося движения вязкой жидкости позволяют сделать переход, указанный в предыдущем вопросе?
12. Как осуществляется переход от записи удельной кинетической энергии для элементарной струйки к удельной кинетической энергии применительно к рассматриваемому движению?
13. Может ли коэффициент Кориолиса (коэффициент кинетической энергии) быть меньше единицы; равен единице? Запишите формулу для коэффициента кинетической энергии.
14. Запишите уравнение Бернулли для потока при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости.
15. Какова размерность членов уравнения Бернулли? Как интерпретируются члены уравнения Бернулли с геометрической и энергетической точек зрения?
16. Что такое гидравлический уклон для потока? Запишите выражения для гидравлического уклона.
17. Изменяется ли удельная энергия потока по длине при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости (увеличивается, уменьшается или остается постоянной)?
18. В рассматриваемом движении могут ли напорная линия (линия удельной энергии) и пьезометрическая линия по длине потока располагаться параллельно друг другу? В каких случаях пьезометрическая линия по длине потока понижается или поднимается? Может ли пьезометрическая линия быть горизонтальной?
19. Чем отличаются уравнения Бернулли для установившегося и неустановившегося движения вязкой жидкости?
20. Запишите выражение для инерционного напора, входящее в уравнение Бернулли для неустановившегося движения элементарной струйки вязкой несжимаемой жидкости.

21. Чему равен коэффициент количества движения (коэффициент Буссинеска), как он соотносится с коэффициентом кинетической энергии (коэффициентом Кориолиса)?

22. Запишите уравнение Бернулли для потока несжимаемой вязкой жидкости при неустановившемся движении в прямолинейной цилиндрической трубе.

23. Запишите выражение для инерционного напора при неустановившемся движении вязкой несжимаемой жидкости. Может ли инерционный напор быть больше нуля? Меньше нуля? Что означает равенство инерционного напора нулю?

Пример 5.1. Определить расход воды Q с помощью водомера Вентури, если известны: разность показаний пьезометров $h = 0{,}25$ м, диаметр трубопровода $d_1 = 0{,}2$ м, диаметр горловины $d_2 = 0{,}1$ м (рис. 5.5). При решении задачи пренебречь потерями напора и сжатием струи в горловине.

Решение. Составляем уравнение Бернулли для сечений *1—1* и *2—2* относительно произвольной горизонтальной плоскости сравнения *0—0* (рис. 5.5):

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{тр}.$$

В соответствии с условием задачи $h_{тр} = 0$. Допустим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Тогда

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Имеем $\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = h$ (рис 5.5). При этом

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}.$$

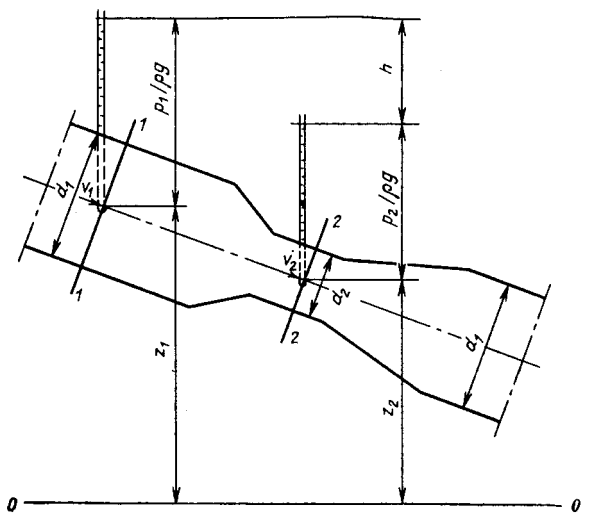


Рис. 5.5

В данном уравнении два неизвестных: v_1 и v_2. Для исключения одного из них применяем уравнение неразрывности (3.27), из которого следует $v_1\omega_1 = v_2\omega_2$ и $v_1 = \omega_2 v_2/\omega_1$.

Тогда

$$h = \frac{v_2^2}{2g} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right].$$

Преобразуя это уравнение, определим среднюю скорость v_2 в сечении *2—2*:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}} \sqrt{2gh}\,.$$

В соответствии с (3.27) получим

$$Q = v_2\omega_2 = \frac{\omega_2\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}} \sqrt{h} = A\sqrt{h}\,,$$

где постоянная водомера

$$A = \frac{\omega_2\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}}\,.$$

Далее вычисляем:

$$A = \frac{0{,}00785 \cdot 4{,}43}{\sqrt{1 - 0{,}25^2}} = 0{,}037 \text{ м}^{2{,}5}/\text{с}; \quad \omega_1 = 0{,}785 d_1^2 = 0{,}0314 \text{ м}^2;$$

$$\omega_2 = 0{,}785 d_2^2 = 0{,}00785 \text{ м}^2;$$

$$Q = A\sqrt{h} = 0{,}037\sqrt{0{,}25} = 0{,}0185 \text{ м}^3/\text{с} = 18{,}5 \text{ л/с}.$$

Фактический расход будет несколько меньше вычисленного, так как при расчете не учтены потери напора. При выполнении практических расчетов и измерении расхода с помощью водомера Вентури принимается

$$Q = \mu A\sqrt{h}\,,$$

где μ — коэффициент расхода водомера, определяемый экспериментально, обычно считают, что $0{,}9 < \mu < 1$.

Если $\mu = 0{,}95$, получим $Q = \mu A\sqrt{h} = 0{,}95 \cdot 0{,}0185 = 0{,}0175$ м³/с = = 17,5 л/с.

Пример 5.2. Определить высоту h, на которую вода из сосуда поднимается по трубке (рис. 5.6), при следующих исходных данных: диаметр трубопровода $d_1 = 0{,}15$ м = 150 мм, диаметр горловины $d_2 = 0{,}075$ м = 75 мм, расход $Q = 0{,}020$ м³/с = 20 л/с, избыточное давление в сечении *1—1* $p_{и1} = 2 \cdot 10^3$ Па. При расчете потерями напора пренебречь.

Решение. Проводим произвольную горизонтальную плоскость сравнения *0—0* по оси трубопровода и составляем уравнение Бернулли для сечений *1—1* и *2—2*, пренебрегая потерями напора.

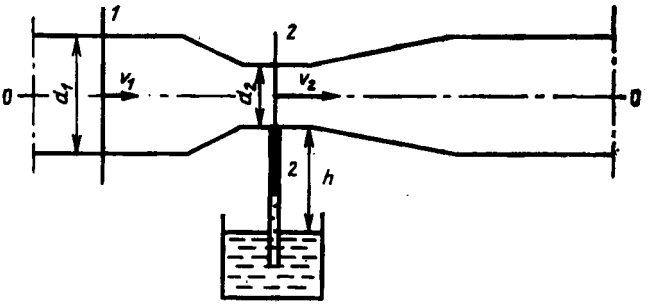


Рис. 5.6

В данном случае имеем $z_1 = z_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $p_1 = p_{ат} + p_{и1}$. Тогда получим

$$\frac{p_{и1}}{\rho g} + \frac{p_{ат}}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g},$$

откуда находим

$$h_{вак} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{p_{и1}}{\rho g},$$

где $h_{вак} = \dfrac{p_{ат} - p_2}{\rho g}$ — разрежение (вакуум) в сечении *2—2*.

Далее, рассмотрев условие равновесия воды в трубке, имеем $p_2 + \rho g h = p_{ат}$, а также $h = h_{вак}$. Вычисляем значения $\omega_1 = 0{,}785\ d_1^2 = 0{,}0177$ м²; $\omega_2 = 0{,}785\ d_2^2 = 0{,}0044$ м²;

$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{0{,}02}{0{,}0177} = 1{,}13 \text{ м/с}; \quad v_2 = \frac{0{,}02}{0{,}0044} = 4{,}55 \text{ м/с};$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = 0{,}065 \text{ м}; \quad \frac{v_2^2}{2g} = 1{,}055 \text{ м}.$$

Тогда получим

$$h = h_{вак} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{p_{и1}}{\rho g} = 1{,}055 - 0{,}065 - \frac{2000}{1000 \cdot 9{,}81} = 0{,}786 \text{ м}.$$

Пример 5.3. Вода течет по трубопроводу диаметром $d = 0{,}1$ м $= 100$ мм со скоростью $v = 5$ м/с. Внизу вода растекается во все стороны по радиусу между двумя круглыми параллельными пластинками диаметром $D = 1$ м, расположенным на расстоянии $a = 0{,}05$ м одна от другой (рис. 5.7). Пренебрегая потерями напора, определить давление p_B в точках B, отстоящих на расстоянии $D/4$ от центра A. Вода вытекает в атмосферу.

Решение. Определяем расход $Q = v\omega = 5 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0392$ м³/с $=$ $= 39{,}2$ л/с.

Проводим произвольную горизонтальную плоскость сравнения *0—0* на расстоянии $a/2$ от нижней круглой пластинки (рис. 5.7) и составляем уравнение Бернулли для сечений *1—1* и *2—2*, пренебрегая потерями напора.

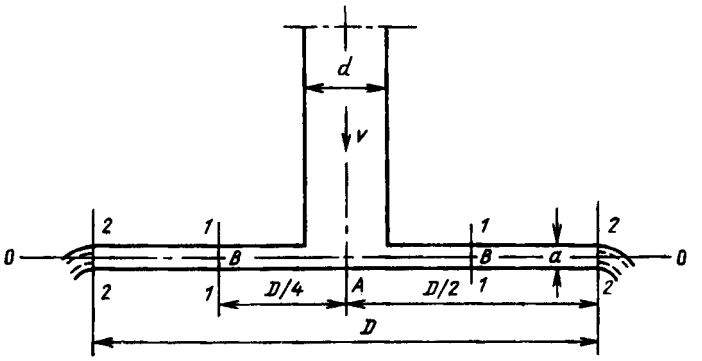


Рис. 5.7

В данном случае имеем $z_1 = z_2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $p_1 = p_B$, $p_2 = p_{ат}$. Тогда получим

$$\frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{ат}}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g},$$

откуда находим

$$p_B = \rho g \left(\frac{p_{ат}}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right).$$

Вычисляем площади живых сечений, представляющих собой боковые поверхности цилиндров с высотой a:

$$\omega_1 = \pi \frac{D}{4} a = \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 0{,}05}{4} = 0{,}0392 \text{ м}^2;$$

$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = 1 \text{ м/с}; \quad \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}051 \text{ м};$$

$$\omega_2 = \pi D a = 3{,}14 \cdot 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}157 \text{ м}^2; \quad v_2 = \frac{Q}{\omega_2} = \frac{0{,}0392}{0{,}157} =$$

$$= 0{,}25 \text{ м/с}; \quad \frac{v_2^2}{2g} = 0{,}003 \text{ м}.$$

Тогда получим $p_B = 1000 \cdot 9{,}81 \, (10 + 0{,}003 - 0{,}157) = 96\,589$ Па $=$ $= 96{,}59$ кПа.

Глава 6

РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА

6.1. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Число Рейнольдса и его критическое значение

Многочисленные экспериментальные исследования показали, что потери энергии при движении жидкости существенно зависят от характера движения частиц жидкости в потоке, о т р е ж и м а д в и ж е н и я ж и д к о с т и.

Впервые различия ламинарного и турбулентного режимов движения жидкости наблюдались Хагеном в 1839 г. В 1880 г. Д. И. Менделеев в работе «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании» показал, что различные виды движения жидкости отличаются друг от друга характером зависимостей сил трения от скорости движения. Более подробно эти виды движения жидкостей были изучены английским физиком О. Рейнольдсом в 1883 г.

Наглядно особенности режимов движения можно наблюдать на специальной опытной установке, схема которой показана на рис. 6.1. К баку $Б$ достаточно больших размеров, наполненному жидкостью, присоединена стеклянная труба T; вход в трубу сделан плавным; в конце трубы установлен кран K для регулирования расхода потока. Измерение расхода выполняется с помощью мерного бака M и секундомера.

Над баком $Б$ расположен сосуд C, наполненный раствором краски, плотность которого близка к плотности жидкости в потоке. По трубке T_1 краска вводится в жидкость, движущуюся по трубе T. Расход краски регулируется краном P.

При открытом кране K в трубе T установится некоторая скорость потока (высота уровня жидкости в баке поддерживается постоянной). Если открыть кран P, то в трубу T начнет поступать краска. При малой скорости v потока в трубе T краска образует прямолинейную и резко выделяющуюся не смешивающуюся с окружающей жидкостью струйку. Заметного обмена частицами между окрашенной струйкой и окружающей ее жидкостью не происходит. Если ввести в жидкость краску несколькими струйками, все они будут двигаться, не смешиваясь с остальной массой жидкости. Это свидетельствует о том, что в прямой стеклянной трубе T при данном открытии крана жидкость движется отдельными не перемешивающимися между собой слоями. Линии тока при этом п р я м о л и н е й н ы и у с т о й ч и в ы (рис. 6.2, *а*).

При некотором большем открытии крана (увеличении скорости v) окрашенная струйка начинает искривляться и становится волнообразной. Это может происходить только в результате изменений во времени (пульсации) векторов местных скоростей в потоке.

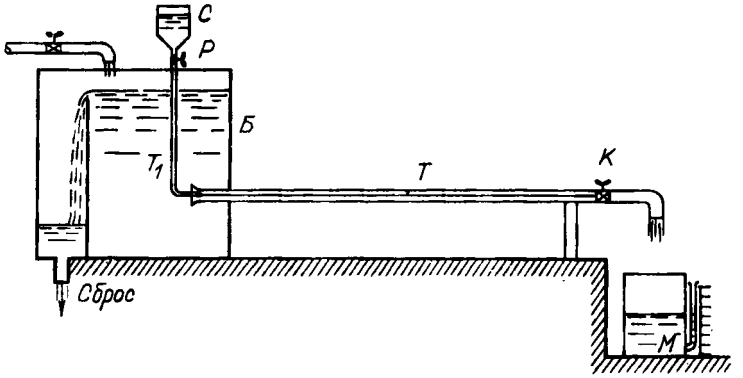


Рис. 6.1

При дальнейшем увеличении скорости потока в трубе T струйка распадается на отдельные хорошо видные вихри, происходит перемешивание окрашенной струйки со всей массой текущей жидкости (рис. 6.2, *б*).

Движение жидкости, при котором отсутствуют изменения (пульсации) местных скоростей, приводящие к перемешиванию жидкости, называют ламинарным (от латинского слова lamina — слой).

Движение жидкости, при котором происходят изменения (пульсации) местных скоростей, приводящие к перемешиванию жидкости, называют турбулентным (от латинского слова turbulentus — беспорядочный).

Применяются также термины «ламинарный режим движения», «турбулентный режим движения».

При постепенном закрывании крана явление повторяется в обратном порядке. Однако переход от турбулентного режима к ламинарному происходит при скорости, меньшей той, при которой наблюдается переход от ламинарного движения к турбулентному. Скорость потока, при которой происходит смена режима движения жидкости, называется критической. О. Рейнольдсом было обнаружено существование двух критических скоростей: одной — при переходе ламинарного режима движения в турбулентный режим, она называется верхней критической скоростью $v_{в.кр}$, другой — при переходе турбулентного режима движения в ламинарный режим, она называется нижней критической скоростью $v_{н.кр}$. Опытным путем доказано, что значение верхней критической скорости зависит от внешних условий опыта: постоянства температуры, уровня вибрации установки и т. д. Нижняя критическая скорость в широком диапазоне изменения внешних условий остается практически неизменной. В опытах было показано, что нижняя критическая скорость для

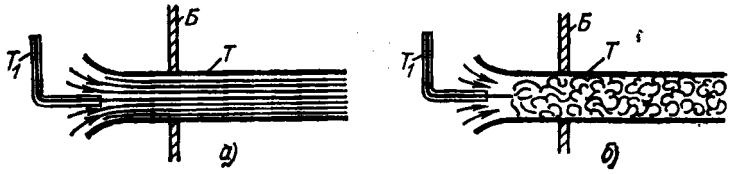


Рис. 6.2

потока в цилиндрической трубе круглого сечения пропорциональна кинематической вязкости ν и обратно пропорциональна диаметру трубы d:

$$v_{\text{н. кр}} = k\nu/d.$$

Коэффициент пропорциональности k оказался одинаковым для различных ν и d:

$$k = v_{\text{н. кр}} d/\nu = 2320.$$

В честь Рейнольдса этот коэффициент был назван критическим числом Рейнольдса и обозначен $\text{Re}_{\text{кр}}$.

Для любого потока по известным v, d, ν можно составить и вычислить число Рейнольдса $\text{Re} = vd/\nu$ и сравнить его с критическим значением $\text{Re}_{\text{кр}}$. Если $\text{Re} < \text{Re}_{\text{кр}}$, режим движения жидкости ламинарный и $v < v_{\text{н. кр}}$. Если $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$, режим движения, как правило, турбулентный и $v > v_{\text{н. кр}}$. Однако создание специальных условий движения жидкости (плавный вход в трубу, изоляция от динамических воздействий и т. п.) позволяло в лабораторных условиях получать и наблюдать ламинарное движение в трубах при числах Re, доходивших до $(40 \div 50) \cdot 10^3$ и более. Но такое ламинарное движение очень неустойчиво, и достаточно воздействия малого возмущения, чтобы произошел переход в турбулентное движение.

В общем случае режим движения жидкости определяется безразмерным комплексом

$$\frac{vl}{\mu/\rho} = \frac{vl}{\nu}, \qquad (6.1)$$

составленным из четырех величин: динамической вязкости μ, плотности жидкости ρ, характерного геометрического размера живого сечения l и средней скорости потока v.

Этот комплекс также называется числом Рейнольдса и обозначается символом Re.

Число Рейнольдса характеризует отношение сил инерции к силам трения (вязкости).

Отнесенные к единице объема силы инерции, действующие в установившемся потоке, имеют порядок $\rho v^2/l$; силы трения, также от-

несенные к единице объема,— порядок $\rho v v / l^2$. Очевидно, что отношение указанных сил и дает число $\mathrm{Re} = vl/\nu$, где l — характерный поперечный размер живого сечения.

Поскольку характерный размер живого сечения выбирается произвольно, число Рейнольдса имеет индекс, указывающий выбранную характерную линейную величину. Чаще всего в качестве характерных линейных величин принимают диаметр трубы d, гидравлический радиус R или глубину жидкости в открытом русле (канале) h.

Тогда

$$\mathrm{Re}_d = vd/\nu; \quad \mathrm{Re}_R = vR/\nu; \quad \mathrm{Re}_h = vh/\nu.$$

Число Re_d в дальнейшем будем обозначать Re без индекса.

В расчетах обычно принимают для цилиндрических круглых труб $\mathrm{Re}_{кр} = 2320$.

На конфузорных (сужающихся) участках труб $\mathrm{Re}_{кр} > 2320$, а на расширяющихся участках (диффузор) $\mathrm{Re}_{кр} < 2320$.

Для открытых русл

$$\mathrm{Re}_{кр} = vR/\nu = 580.$$

В опытах Рейнольдса было обнаружено, что переход ламинарного движения в турбулентное происходит не мгновенно и не одновременно по всей длине трубы. При числах Re, близких к $\mathrm{Re}_{кр}$ (но меньших $\mathrm{Re}_{кр}$), на отдельных участках трубы периодически возникают турбулентные области («пробки»), которые сносятся вниз по направлению движения. На месте возникновения «пробки» вновь восстанавливается ламинарное движение. Происходит так называемая перемежающаяся смена ламинарного и турбулентного движений в данном сечении. При дальнейшем увеличении числа Re участки турбулентного движения полностью заполняют трубу.

Характеризует перемежающуюся смену движений коэффициент перемежаемости β, равный отношению времени, в течение которого в данном сечении наблюдалось турбулентное движение, ко всему времени наблюдений. Если $\beta = 0$, движение ламинарное, если $\beta = 1$, движение полностью турбулентное.

При $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{кр} = 2320$ движение становится полностью турбулентным ($\beta = 1$) на длине более тысячи диаметров от входа в трубу.

В природе и технике турбулентное движение жидкости наблюдается чаще, чем ламинарное. Области ламинарного движения — движение вязких жидкостей типа масел по трубам и в механизмах, движение грунтовых вод (но оно может также быть и турбулентным), движение в капиллярах (в том числе и движение крови в живых организмах).

6.2. Турбулентные потоки. Осредненные скорости и напряжения. Пульсационные составляющие

Измерения местных скоростей турбулентного потока показали, что поле скоростей такого потока изменяется беспорядочно, хаотично, однако изменение местных скоростей носит ярко выраженный пульсационный характер — значения составляющих скорости «пульсируют» около некоторых осредненных значений.

Рейнольдс предложил рассматривать мгновенные значения параметров турбулентного движения в виде суммы осредненных (во времени) значений и пульсационных составляющих (добавок).

При этом мгновенные значения проекций скорости и напряжений записывают в виде

$$\left.\begin{aligned} &u_x=\bar{u}_x+u_x';\quad u_y=\bar{u}_y+u_y';\quad u_z=\bar{u}_z+u_z';\\ &p=\bar{p}+p';\quad \tau=\bar{\tau}+\tau'. \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

Все параметры с чертой наверху представляют собой осредненные по времени их значения

$$\bar{u}_i=\frac{1}{T}\int_0^T u_i dt;\quad \bar{p}=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt;\quad \bar{\tau}=\frac{1}{T}\int_0^T \tau\,dt,$$

где T — интервал времени осреднения.

Пульсационные составляющие проекций скорости и напряжений (их называют также пульсационными добавками, пульсационными скоростями и напряжениями) определяются следующим образом:

$$u_x'=u_x-\bar{u}_x;\quad u_y'=u_y-\bar{u}_y;\quad u_z'=u_z-\bar{u}_z;$$

$$p'=p-\bar{p};\quad \tau'=\tau-\bar{\tau}.$$

При турбулентном движении пульсационными являются не только составляющие (проекции) скорости, но и нормальные напряжения p, и касательные напряжения τ.

Значения осредненных во времени пульсационных добавок скорости и напряжений равны нулю:

$$\bar{u}_x'=\frac{1}{T}\int_0^T u_x'\,dt=0;$$

$$\bar{u}_y'=\frac{1}{T}\int_0^T u_y'\,dt=0;\quad \bar{u}_z'=\frac{1}{T}\int_0^T u_z'\,dt=0;$$

$$\bar{p}'=\frac{1}{T}\int_0^T p'\,dt=0;\quad \bar{\tau}'=\frac{1}{T}\int_0^T \tau'\,dt=0.$$

Понятно, что записанные (для краткости) без индексов значения нормальных и касательных напряжений и их пульсационные составляющие (добавки) в каждом конкретном случае имеют не-

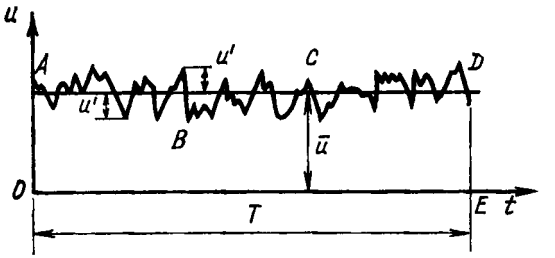


Рис. 6.3

обходимые индексы, характеризующие направления действия и площадки, к которым эти напряжения приложены.

При рассмотрении турбулентного движения принимается, что интервал времени осреднения T достаточно велик, вследствие чего осредненное значение пульсирующей составляющей не изменяется, если выполнить повторное осреднение.

Пульсации мгновенных значений кинематических и динамических параметров обусловливают то обстоятельство, что в строгом понимании турбулентное движение является неустановившимся (даже если осредненные характеристики его не изменяются во времени).

При турбулентном движении местные осредненные скорости могут не зависеть от времени [установившееся осредненное турбулентное движение (рис. 6.3)] или зависеть от времени [неустановившееся осредненное турбулентное движение (рис. 6.4)], но в обоих случаях мгновенные значения местных скоростей в точках отличаются от осредненных, т. е. пульсируют.

Если изменение во времени какого-либо параметра, например горизонтальной составляющей скорости u_x в данной точке при установившемся осредненном турбулентном движении, изобразить графически (рис. 6.3), интеграл $\int_0^T u_x \, dt$ будет равен

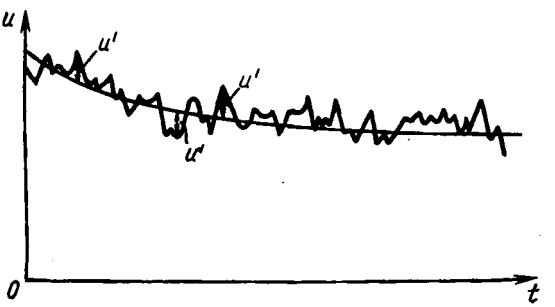


Рис. 6.4

площади фигуры $OABCDE$, заключенной между кривой $u_x = f(t)$, т. е. $ABCD$, осью абсцисс OE и ординатами OA и ED, отвечающими началу и концу назначенного интервала времени T.

Осредненное (по времени) значение $\overline{u}_x$ при установившемся осредненном турбулентном движении отсюда будет равно указанному ранее:

$$\overline{u}_x = \frac{1}{T}\int_0^T u_x \, dt.$$

Необходимо четко различать осредненную (по времени, в данной точке) и среднюю в данном живом сечении скорость $v = Q/\omega$ (Q — расход, ω — площадь живого сечения).

Для оценки пульсационных составляющих (добавок) скорости вводится стандарт, равный среднеквадратичному отклонению пульсационных добавок:

$$\sigma_{u_y} = \sqrt{\overline{(u_y')^2}}; \quad \sigma_{u_z} = \sqrt{\overline{(u_z')^2}};$$

$$\sigma_{u_x} = \sqrt{\overline{(u_x')^2}}; \quad \sigma_p = \sqrt{\overline{(p')^2}}; \quad \sigma_\tau = \sqrt{\overline{(\tau')^2}}.$$

Степенью (интенсивностью) турбулентности ε называют отношение среднеквадратичного отклонения пульсационной составляющей (добавки) скорости к характерной скорости потока (к осредненной местной скорости в данной точке, к средней по вертикали, к средней по живому сечению, к максимальной скорости). Обычно за характерную скорость принимают среднюю скорость потока, осредненную местную скорость в данной точке или динамическую скорость

$$u_* = \sqrt{gRJ},$$

где R — гидравлический радиус; J — гидравлический уклон.

Отнеся среднеквадратичное отклонение к средней скорости потока, имеем соответственно σ_{u_x}/v; σ_{u_y}/v; σ_{u_z}/v.

Исследования показывают, что наиболее общие результаты для описания пульсирующих скоростей при турбулентном движении получаются, если в качестве масштаба скоростей принять динамическую скорость u_*, т. е. находить отношения $\varepsilon_x = \sigma_{u_x}/u_*$; $\varepsilon_y = \sigma_{u_y}/u_*$; $\varepsilon_z = \sigma_{u_z}/u_*$, при этом получаются универсальные кривые распределения ε_x, ε_y, ε_z по радиусу трубы или по глубине открытого потока. Такое нормирование по u_* применяется только для турбулентных потоков, распространяющихся вдоль твердой границы (стенки).

Турбулентность характеризуется также частотой пульсаций скорости. Опыты показывают, что при турбулентном движении наблюдаются довольно широкие спектры частот.

В большинстве процессов, происходящих при турбулентном напорном (в трубопроводах) и безнапорном (в каналах и реках) движении, определяющими являются низкочастотные пульсации.

6.3. Двухслойная модель турбулентного потока

Основной особенностью турбулентного режима движения является интенсивное перемешивание частиц жидкости (молей). Подчеркнем, что имеется в виду перемешивание именно молей, а не молекул жидкости. Интенсивность процесса перемешивания растет с увеличением числа Рейнольдса.

Рассмотрим поток жидкости в прямолинейной цилиндрической трубе круглого сечения (осесимметричный поток).

Исследованиями установлено, что процессы турбулентного перемешивания происходят по-разному в различных частях поперечного сечения трубы. Современные представления о структуре потока в трубе при турбулентном режиме движения представим в виде приближенной двухслойной схемы (модели) (рис. 6.5).

На твердой стенке (внутренняя поверхность трубы) скорости, в том числе и пульсационные, равны нулю. Вблизи твердой стенки находится весьма тонкий слой, толщину его обозначим $\delta_в$ (на рис. 6.5 размер $\delta_в$ непропорционально увеличен). В этом слое преимущественное влияние имеют касательные напряжения, рассчитываемые по закону вязкого трения Ньютона (1.12). Поэтому рассматриваемый слой назван *вязким подслоем потока*.

В пределах вязкого подслоя скорость линейно увеличивается от нуля на стенке до некоторого значения $u_в$ на границе слоя.

Раньше считали, что в пределах этого тонкого слоя движение полностью ламинарное, пульсации в нем отсутствуют, и поэтому рассматриваемый слой называли *ламинарной пленкой*. Однако теперь установлено, что пульсации скорости, давления и касательного напряжения передаются и в вязкий подслой, так что говорить о полностью ламинарном характере движения в вязком подслое не следует.

Интенсивность пульсаций продольной скорости в нем может достигать 0,3 (это весьма большое значение для данного случая).

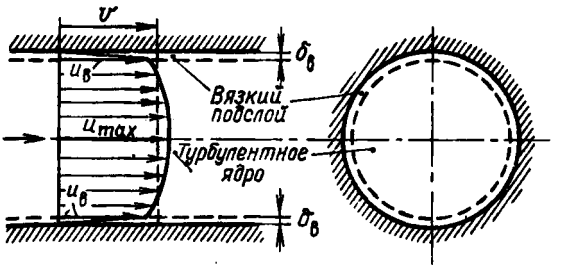


Рис. 6.5

Остальная часть поперечного сечения трубы занята турбулентным ядром потока, где и происходят интенсивные пульсации скорости и перемешивание частиц. Подчеркнем, что описанная двухслойная модель турбулентного потока — приближенная.

Определение толщины вязкого подслоя будет рассмотрено в гл. 8.

6.4. Уравнения Рейнольдса

Как уже указывалось, турбулентное движение жидкости характеризуется хаотичным беспорядочным случайным изменением скоростей и других гидродинамических параметров. Эти изменения носят характер нерегулируемых пульсаций и потому допускают осреднение и представление поля любого гидродинамического параметра в виде суммы двух полей: поля осредненного параметра и поля пульсаций параметра.

Пользуясь таким представлением, запишем по (6.2) проекции действительных местных скоростей u_x, u_y, u_z через их осредненные значения $\bar{u}_x$, $\bar{u}_y$ и $\bar{u}_z$ и пульсационные добавки u_x', u_y', u_z': $u_x = \bar{u}_x + u_x'$; $u_y = \bar{u}_y + u_y'$; $u_z = \bar{u}_z + u_z'$, так же поступим и с давлением $p = \bar{p} + p'$. При этом учтем, что осредненные во времени пульсационные составляющие местных скоростей и давление равны нулю: $\overline{u_x'} = 0$; $\overline{u_y'} = 0$; $\overline{u_z'} = 0$; $\overline{p'} = 0$, так как пульсационные составляющие — знакопеременные величины с равной вероятностью как положительных, так и отрицательных их значений.

Рейнольдс предложил, выполняя осреднение, придерживаться определенных правил. Если f и p — осредняемые зависимые переменные, а s — одна из четырех независимых переменных x, y, z, t, то $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$; $\overline{f + p} = \bar{f} + \bar{p}$; $\overline{\bar{f}p} = \bar{f}\bar{p}$; $\overline{\partial f/\partial s} = \partial\bar{f}/\partial s$; $\overline{\int f \mathrm{d}s} = \int \bar{f} \mathrm{d}s$, где повторное осреднение обозначено двумя чертами над осредняемой переменной.

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса (5.8), сначала только первое из этих уравнений

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z.$$

Рассмотрим три последних члена в правой части, выражающих конвективное ускорение:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z = \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)u_x.$$

Так как для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

то

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y}u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z}u_z = \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z).$$

Выполнив аналогичные преобразования для конвективных членов в двух других уравнениях Навье—Стокса (5.8), получим уравнения Навье—Стокса в виде

$$\left.\begin{aligned}
&F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) = \\
&= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_x u_z); \\
&F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) = \\
&= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_y u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_y u_z); \\
&F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) = \\
&= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_z u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_z u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z u_z).
\end{aligned}\right\} \quad (6.3)$$

Выполнив операции осреднения членов уравнений, получим

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\bar{u}_x = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_x u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_x u_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_x u_z});$$

$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2\bar{u}_y = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_y u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_y u_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_y u_z});$$

$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu\nabla^2\bar{u}_z = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u_z u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u_z u_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u_z u_z}).$$

$$\overline{\partial f}/\partial s = \partial\bar{f}/\partial s; \quad \overline{\int f\,\mathrm{d}\,s} = \int\bar{f}\,\mathrm{d}\,s,$$

При дальнейших преобразованиях учтем, что

$$\overline{u_x u_x} = \overline{(\bar{u}_x + u_x')(\bar{u}_x u_x')} = \bar{u}_x^2 + 2\bar{u}_x\overline{u_x'} + \overline{u_x'^2};$$

$$\overline{u_x u_y} = \overline{(\bar{u}_x + u_x')(\bar{u}_y + u_y')} = \bar{u}_x\bar{u}_y + \bar{u}_x\overline{u_y'} + \bar{u}_y\overline{u_x'} + \overline{u_x' u_y'};$$

$$\overline{u_x u_z} = \overline{(\bar{u}_x + u_x')(\bar{u}_z + u_z')} = \bar{u}_x\bar{u}_z + \bar{u}_x\overline{u_z'} + \bar{u}_z\overline{u_x'} + \overline{u_x' u_z'}$$

и т. д.

Так как $\overline{u_x'} = \overline{u_y'} = \overline{u_z'} = 0$, то получим

$$\overline{u_x u_x} = \bar{u}_x^2 + \overline{u_x'^2}; \quad \overline{u_x u_z} = \bar{u}_x\bar{u}_z + \overline{u_x' u_z'};$$

$\overline{u_x u_y} = \bar{u}_x\bar{u}_y + \overline{u_x' u_y'}$ и т. д.

Для осредненного установившегося $\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} = 0\right)$

турбулентного движения получаем три уравнения Рейнольдса:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\bar{u}_x = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}\bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}\bar{u}_z +$$

$$+ \frac{\partial\left(\overline{u_x' u_x'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\overline{u_x' u_y'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\overline{u_x' u_z'}\right)}{\partial z};$$

$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2\bar{u}_y = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x}\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}\bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z}\bar{u}_z +$$

$$+ \frac{\partial\left(\overline{u_y' u_x'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\overline{u_y' u_y'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\overline{u_y' u_z'}\right)}{\partial z};$$

$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu\nabla^2\bar{u}_z = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y}\bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\bar{u}_z +$$

$$+ \frac{\partial\left(\overline{u_z' u_x'}\right)}{\partial z} + \frac{\partial\left(\overline{u_z' u_y'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\overline{u_z' u_z'}\right)}{\partial z}.$$

Уравнение неразрывности является четвертым уравнением, входящим в систему уравнений осредненного установившегося турбулентного движения вместе с уравнениями Рейнольдса.

После осреднения уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0.$$

Каждый из членов, содержащих пульсационные составляющие скорости, можно записать в ином виде:

$$\frac{\partial\left(\overline{u_x' u_x'}\right)}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho u_x' u_x'}\right);$$

$$\frac{\partial\left(\overline{u_x' u_z'}\right)}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho u_x' u_z'}\right); \qquad \frac{\partial\left(\overline{u_x' u_y'}\right)}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho u_x' u_y'}\right).$$

Перепишем уравнения Рейнольдса, изменив форму записи членов с пульсационными скоростями:

$$\left.\begin{aligned}
&F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\bar{u}_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\rho u_x' u_x')} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\overline{(\rho u_x' u_y')} - \\
&- \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\overline{(\rho u_x' u_z')} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}\bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}\bar{u}_z; \\
&F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2\bar{u}_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\rho u_y' u_x')} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\overline{(\rho u_y' u_z')} - \\
&- \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\overline{(\rho u_y' u_z')} = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x}\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}\bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z}\bar{u}_z; \\
&F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu\nabla^2\bar{u}_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\rho u_z' u_x')} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\overline{(\rho u_z' u_y')} - \\
&- \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\overline{(\rho u_z' u_z')} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y}\bar{u}_y + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\bar{u}_z.
\end{aligned}\right\} \quad (6.4)$$

Члены вида $\overline{\rho u_x' u_x'}$, $\overline{\rho u_x' u_y'}$, $\overline{\rho u_x' u_z'}$ имеют размерность напряжений. Таким образом; в левой части уравнений имеются члены как отражающие действия чисто вязкостных напряжений

$$\nu\nabla^2\bar{u}_x = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\bar{u}_x; \quad \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\bar{u}_y; \quad \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\bar{u}_z;$$

так и содержащие напряжения, связанные с пульсациями скоростей, т. е. появляющиеся только при турбулентном режиме движения, например

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\rho u_x' u_x')}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\overline{(\rho u_x' u_y')};$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\overline{(\rho u_x' u_z')}.$$

Члены $\overline{\rho u_x' u_x'}$, $\overline{\rho u_y' u_y'}$, $\overline{\rho u_z' u_z'}$ представляют собой нормальные турбулентные напряжения на площадках, перпендикулярных соответствующим осям, а $\overline{\rho u_x' u_y'}$, $\overline{\rho u_x' u_z'}$, $\overline{\rho u_y' u_z'}$ — касательные турбулентные напряжения на тех же площадках.

Следует обратить внимание на знаки минус перед турбулентными напряжениями в уравнениях Рейнольдса. Касательные напряжения — положительные, а пульсации скорости, в них входящие, разноименны. При положительном значении, например, u_x' добавка u_z', действующая на рассматриваемый элементарный объем (на частицу жидкости), будет отрицательной вследствие неизменности массы в этом объеме. Произведения $u_x' u_z'$ (и других разноименных пульсационных составляющих скорости) — всегда отрицательные.

Таким образом, при турбулентном движении касательные напряжения могут быть представлены суммой вязкостных напряжений $\tau_{лам}$ и касательных напряжений, появляющихся вследствие турбулентных пульсаций $\tau_{турб}$:

$$\tau = \tau_{лам} + \tau_{турб}. \qquad (6.5)$$

Турбулентные касательные напряжения выражаются формулой

$$\tau_{турб_{ik}} = -\rho\overline{u_i' u_k'}, \qquad (6.6)$$

при этом они подчиняются свойству взаимности: $\tau_{ik} = \tau_{ki}$.

Полученная система является незамкнутой. Для того чтобы с помощью уравнений Рейнольдса можно было получить определенные результаты, необходимо замкнуть систему введением в нее дополнительных соотношений, устанавливающих связи между переменными и не использованных при составлении системы уравнений движения. Проблема замыканий уравнений Рейнольдса в общем виде не решена.

Обычно в качестве дополнительных соотношений используют зависимости между турбулентными касательными напряжениями и осредненными скоростями турбулентных потоков.

6.5. Различные теории турбулентности

В настоящее время существует несколько гипотез, позволяющих получить зависимости между турбулентными касательными напряжениями и осредненными скоростями турбулентных потоков. Эти гипотезы получили название *теорий турбулентности*.

Одной из наиболее распространенных теорий турбулентности является полуэмпирическая теория Л. Прандтля, предложенная им в 1925 г. Она основана на представлении о том, что при турбулентном перемешивании количество движения массы, переносимой в потоке за счет поперечной пульсационной составляющей скорости, остается неизменным на некотором пути, а затем изменяется скачком. Длина этого пути — так называемая *длина пути перемешивания* l. Предполагается, что это расстояние моль жидкости проходит, не взаимодействуя с другими молями и сохраняя постоянным свое осредненное количество движения. После прохождения этого пути моль жидкости смешивается с жидкостью другого слоя, отдавая ей разницу количества движения. Длина пути перемешивания имеет аналог в виде длины свободного пробега молекулы в молекулярно-кинетической теории. Но при этом средняя длина пробега молекул мала по сравнению с размерами поперечного сечения, а размеры турбулентных вихрей (образований) могут быть сопоставимы с размерами сечения.

Длина перемешивания — геометрическая величина, которая характеризует внутреннюю структуру потока при турбулентном движении, ее рассматривают как один из масштабов турбулентности.

Рассмотрим турбулентный установившийся поток (рис. 6.6). Ось OX совпадает с направлением осредненного движения.

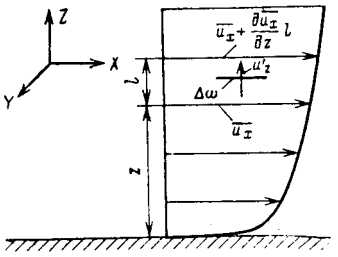


Рис. 6.6

Через площадку $\Delta\omega$, выбранную в потоке нормально к оси OZ, переносится жидкость со скоростью u'_z. Масса перенесенной за время Δt жидкости

$$\Delta m = \rho u'_z \Delta\omega \Delta t.$$

Если продольная скорость этой массы до пересечения границы $\bar{u}_x$, а количество движения $\rho u'_z \Delta\omega \Delta t \bar{u}_x$, то согласно гипотезе Прандтля значения этих величин остаются неизменными на пути l, а затем изменяются. В теории Прандтля l предполагается малой. На расстоянии l от площадки $\Delta\omega$ осредненная скорость потока равна $\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} l$, а количество движения массы равно $\rho u'_z \Delta\omega \Delta t \left(\bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} l\right)$.

Применив теорему о количестве движения, придем к выводу, что на пути l на перемещающуюся массу действовала продольная сила $\Delta T_{\text{турб}}$:

$$\Delta T_{\text{турб}} \Delta t = \rho u'_z \Delta\omega \Delta t \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} l \quad \text{или} \quad \Delta T_{\text{турб}} = \rho u'_z \Delta\omega \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} l.$$

Эту силу называют силой турбулентного трения.

Модуль касательного напряжения

$$\tau_{\text{турб}} = \frac{\Delta T_{\text{турб}}}{\Delta\omega} = \rho u'_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} l.$$

Для двухмерных равномерных потоков (рис. 6.6) $\bar{u}_x = \bar{u}_x(z)$; $\bar{u}_y = 0$; $\bar{u}_z = 0$. В этом случае $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z}$. Допуская, что $\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z} l \approx u'_x$, и подставляя u'_x в предыдущее выражение для $\tau_{\text{турб}}$ с учетом разноименности u'_x и u'_z (см. § 6.4), имеем

$$\tau_{\text{турб}} = -\rho u'_x u'_z.$$

Таким образом, теория Прандтля объясняет происхождение турбулентных касательных напряжений в уравнениях Рейнольдса обменом количества движения при перемешивании масс.

Осредненное значение $\tau_{\text{турб}}$ имеет вид

$$\bar{\tau}_{\text{турб}} = -\overline{\rho u'_x u'_z}. \tag{6.7}$$

т. е. мы вновь получили выражение для $\tau_{\text{турб}}$, аналогичное (6.6) из уравнений Рейнольдса (см. § 6.4).

Далее Прандтль предположил, что величины u_x' и u_z' — одного порядка.

Так как $u_x' \approx l \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z}$, то

$$\tau_{\text{турб}} = \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z}\right)^2. \tag{6.8}$$

Общее касательное напряжение при турбулентном режиме движения равно сумме чисто вязкостного напряжения $\tau_{\text{лам}}$ и $\tau_{\text{турб}}$, при этом $\tau_{\text{лам}}$ определяется по (1.12). Тогда

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}z} + \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z}\right)^2. \tag{6.9}$$

Знак плюс в первом члене соответствует увеличению скоростей при возрастании расстояния z, отсчитываемого от стенки.

При ламинарном движении нет перемешивания в жидкости и

$$\tau_{\text{лам}} = \mu \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z}. \tag{6.10}$$

При развитом турбулентном движении, когда происходит интенсивное перемешивание в жидкости, второй член в (6.9) существенно больше, чем первый, и $\mu\, \mathrm{d}\bar{u}_x/\mathrm{d}z$ можно пренебречь. Тогда по (6.8)

$$\tau = \tau_{\text{турб}} = \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z}\right)^2.$$

Так как каждая из пульсационных составляющих скорости приближенно пропорциональна средней скорости, то для развитого турбулентного движения касательные напряжения растут пропорционально квадрату средней скорости (квадратичная область сопротивления) и обозначаются $\tau_{\text{кв}}$:

$$\tau_{\text{кв}} = \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z}\right)^2. \tag{6.11}$$

Когда значения $\tau_{\text{лам}}$ сопоставимы со значениями $\tau_{\text{турб}}$, общее касательное напряжение определяется по (6.9) и зависит от средней скорости в степени, меньшей чем вторая.

Предлагались и другие гипотезы для определения касательного напряжения $\tau_{\text{турб}}$. Буссинеск в 1877 г. предложил записывать турбулентное касательное напряжение по аналогии с вязкостным касательным напряжением $\tau_{\text{лам}} = \mu \mathrm{d}\bar{u}_x/\mathrm{d}z$ в виде

$$\tau_{\text{турб}} = \mu_{\text{турб}} \frac{\mathrm{d}\bar{u}_x}{\mathrm{d}z}, \tag{6.8а}$$

где $\mu_{турб} = \rho\nu_{турб}$ — коэффициент турбулентного обмена, называемый также виртуальной (кажущейся) вязкостью по аналогии с динамической вязкостью μ; $\nu_{турб}$ — кинематическая турбулентная вязкость [в отличие от кинематической (молекулярной) вязкости ν].

Очевидно, что исходя из (6.8а) $\nu_{турб}$ должна иметь вид

$$\nu_{турб} = l^2 \frac{d\bar{u}_x}{dz}.$$

Как кинематическая вязкость $\nu_{турб}$, так и динамическая турбулентная вязкость $\mu_{турб} = \rho\nu_{турб}$ характеризуют статистические свойства турбулентности и зависят от механизма турбулентного перемешивания. Величины $\mu_{турб}$ и $\nu_{турб}$ существенно изменяются в пределах живого сечения как в трубах, так и в открытых потоках: $\nu_{турб} > \nu$.

Сведения о кинематической турбулентной вязкости важны при рассмотрении распределения взвешенных частиц (наносов) в потоке, а также при изучении других вопросов.

Академик М. Д. Миллионщиков предложил рассматривать турбулентную кинематическую вязкость состоящей из трех слагаемых:

$$\nu_{турб} = \nu + \nu_{турб1} + \nu_{турб2},$$

при этом

$$\frac{\tau_{турб}}{\rho} = \nu_{турб} \frac{d\bar{u}_x}{dz}.$$

Составляющая $\nu_{турб1}$ равна

$$\nu_{турб1} = \varkappa (z - \delta_в) u_*,$$

где $\delta_в$ — толщина вязкого подслоя.

Составляющая $\nu_{турб2}$ равна

$$\nu_{турб2} = \varkappa_1 (k_ш - \delta_в) u_*,$$

где $\varkappa$ и $\varkappa_1$ — коэффициенты; $K_ш$ — параметр, определяющий характерную высоту шероховатости.

Исходя из этой гипотезы М. Д. Миллионщиковым получены формулы для распределения скоростей и для коэффициента Дарси λ, хорошо согласующиеся с опытом.

По мнению акад. А. Н. Колмогорова в связи с проявлениями неустойчивости осредненного движения возникают турбулентные возмущения (вихри) первого порядка, т. е. самые крупные в данных условиях. Распад вследствие неустойчивости этих вихрей приводит к появлению более мелких вихрей, от которых появляются еще более мелкие вихри. И так вплоть до вихрей самого малого размера, в которых и происходит гашение энергии путем перехода ее во внутреннюю тепловую энергию (в теплоту). Меньше последних вихри не могут образоваться вследствие влияния вязкости. Такая картина структуры существует, если турбулентные вихри первого порядка (самые крупные) получают энергию из осредненного движения, а вихри последующих порядков получают энергию по каскаду друг от друга — от более крупных к более мелким соседним и так далее. Частота пульсации скорости для самых крупных вихрей — наименьшая, в более мелких вихрях частота пульсаций увеличивается по мере уменьшения их размеров.

А. Н. Колмогоровым получено выражение для внутреннего масштаба турбулентности, характеризующего размеры тех вихрей, где энергия потока переходит непосредственно в тепловую вследствие действия сил вязкости.

Внутренний масштаб равен

$$\eta = \nu^{3/4}/e^{1/4},$$

где ν — кинематическая вязкость; e — рассеиваемая (переходящая в теплоту в единицу времени) удельная энергия, отнесенная к единице массы.

В безнапорных и напорных потоках вихри первого порядка сопоставимы с глубиной потока или диаметром (радиусом) трубы, которые принимают в этих случаях за внешний масштаб турбулентности.

Так как турбулентное движение является *случайным* процессом, то его можно описать рядом *статистических характеристик*. Обычно используют корреляционные моменты, коэффициенты корреляции, спектральные функции, коэффициенты вариации (интенсивности турбулентности), коэффициенты эксцесса и т. д. Упрощенный анализ ограничивается сведениями о стандартах пульсаций, их интенсивности, частотах, законах распределения вероятностей пульсаций и о масштабах турбулентности.

Укажем, что теоретические работы (А. Н. Колмогорова и других авторов) пока еще не приводят к рекомендациям для технических расчетов, хотя успешно объясняют закономерности механизма турбулентного движения. Поэтому здесь в технических приложениях используем решения, основанные на гипотезе Прандтля.

6.6. Контрольные вопросы и примеры

1. Каковы основные особенности ламинарного и турбулентного режимов движения жидкости?
2. Какова структура числа Рейнольдса? Какой смысл имеют верхняя и нижняя критические скорости? Что такое критическое число Рейнольдса? Какие формы записи числа Рейнольдса применяются?
3. Что такое пульсационные скорости и пульсационные напряжения? Чему равны их осредненные во времени значения?
4. В чем различие осредненной местной скорости и средней в данном живом сечении скорости?
5. Какими величинами обычно характеризуют пульсационные составляющие местных скоростей давления?
6. Чему равна динамическая скорость?
7. В чем основные характерные черты двухслойной модели турбулентного потока?
8. Какие правила осреднения были приняты при выводе уравнений Рейнольдса?
9. Какой вид имеют члены уравнений Рейнольдса, отражающие действие чисто вязкостных напряжений?
10. Какой вид имеют члены уравнений Рейнольдса, представляющие нормальные и касательные напряжения?
11. Запишите выражения для касательных напряжений в турбулентном потоке, учитывающие наличие как чисто вязкостных касательных напряжений, так и касательных напряжений, связанных с наличием пульсации скоростей. В каких случаях применяются те или иные формулы для касательных напряжений?

Пример 6.1. Определить значение числа Рейнольдса при напорном движении воды с температурой 14 °С в круглой трубе диаметром 0,2 м со средней скоростью $v = 1{,}2$ м/с.

Решение. При $t = 14$ °С кинематическая вязкость воды (по табл. 1.6) равна $\nu = 0{,}0118 \cdot 10^{-4}$ м^2/с или $\nu = 0{,}0118$ см^2/с. Тогда, подставляя все значения в единой системе единиц измерения, имеем

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{120 \cdot 20}{0{,}0118} = 2{,}034 \cdot 10^5.$$

Так как данное значение $\mathrm{Re} = 2{,}03 \cdot 10^5 > \mathrm{Re}_{кр} = 2320$, то режим движения в трубе в этих условиях — турбулентный.

Пример 6.2. Определить режим напорного движения воды в туннеле круглого поперечного сечения. При этом средняя скорость потока $v = 0{,}7$ м/с, гидравлический радиус $R = 3{,}2$ м. Температура воды 20 °С.

Решение. Согласно табл. 1.6 для указанной температуры воды $\nu = 0{,}0101$ см^2/с. Тогда $\mathrm{Re}_R = \frac{vR}{\nu} = \frac{70 \cdot 320}{0{,}0101} = 2{,}218 \cdot 10^6$.

Получим $\mathrm{Re}_R \gg \mathrm{Re}_{R_{кр}} = 580$. Следовательно, режим движения — турбулентный.

Пример 6.3. Определить, каков будет режим движения воды в трубе круглого поперечного сечения с $d = 0{,}025$ м при температуре воды $t = 10$ °С и средней скорости, равной 0,06 м/с.

Решение. По табл. 1.6 $\nu = 1{,}31 \cdot 10^{-6}$ м^2/с или $\nu = 0{,}0131$ см^2/с. Тогда $\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{6 \cdot 2{,}5}{0{,}0131} = 1145 < \mathrm{Re}_{кр} = 2320$. Следовательно, режим движения в трубе — ламинарный.

Глава 7

ПОТЕРИ НАПОРА (УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ)

7.1. Классификация потерь напора

Потери удельной энергии (напора), затрачиваемой на преодоление сопротивлений движению вязкой жидкости (гидравлических сопротивлений), слагаются из потерь двух видов:

1) потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений по длине, пропорциональных длине участков русла или трубы, по которым движется жидкость,— потерь по длине $h_{дл}$;

2) потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений в пределах коротких участков в непосредственной близости к тем или иным местным конструктивным устройствам труб, каналов (вход, выход, расширение, сужение, поворот, трубопроводная арматура, фасонные части и т. п.) — местных потерь напора $h_м$.

Принимается, что общие потери напора в системе труб или русл равны сумме потерь напора по длине отдельных участков и всех местных потерь напора:

$$h_{тр} = \Sigma h_{дл} + \Sigma h_м. \qquad (7.1)$$

Эти потери энергии (в данном случае удельной) обусловлены переходом механической энергии потока в тепловую. Процесс этот необратим.

Наличие гидравлических сопротивлений при движении вязкой жидкости связано с работой сил трения внутри жидкости. Только благодаря силам трения механическая энергия может перейти в теплоту.

Механизм действия сил сопротивления очень сложен. Аналитически пока не удалось получить универсальные соотношения для их вычисления. Потери напора по длине различны для разных видов движения. Поэтому при расчетах потерь напора используют, как правило, эмпирические зависимости.

Приведем классификацию движений по характеру поля скоростей (ограничимся здесь только установившимся движением):

1) равномерное движение с постоянными по длине средней скоростью и эпюрой скоростей: ламинарное и турбулентное;

2) неравномерное движение с постоянной по длине средней скоростью и изменяющейся по длине эпюрой скоростей (участки стабилизации эпюры скоростей): ламинарное и турбулентное;

3) неравномерное плавно изменяющееся движение (см. гл. 3): ламинарное и турбулентное;

4) неравномерное движение с изменением средней скорости и эпюры скоростей в пределах коротких участков, обычно называемых местными сопротивлениями: ламинарное и турбулентное.

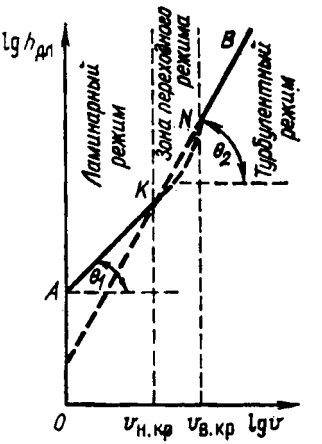


Рис. 7.1

Различие кинематической структуры для каждого из перечисленных видов движения определяет различие в расчетных зависимостях для потерь напора по длине. Для турбулентного движения в указанных выше случаях рассматриваются обычно эпюры осредненных скоростей.

1. Равномерное движение. Различие в характере поля скоростей при ламинарном и турбулентном движении сказывается и на виде зависимости потерь напора по длине от средней скорости. Исследования потерь напора по длине при равномерном движении в прямолинейных трубопроводах показывают, что зависимость $h_{дл}$ от средней скорости v в логарифмических координатах на графике предстает в виде отрезков прямых линий (рис. 7.1), уравнения которых имеют вид

$$\lg h_{дл} = \lg b + m \lg v.$$

При этом в общем виде эта зависимость будет выглядеть так:

$$h_{дл} = bv^m,$$

где b учитывает влияние размеров трубы и шероховатости ее стенок и вида жидкости; m — показатель степени.

На рис. 7.1 отрезок AK, соответствующий ламинарному движению, образует с осью абсцисс угол $\theta_1 = 45°$, $m_1 = \operatorname{tg} \theta_1 = 1$. Точка K на графике соответствует скорости $v_{н.кр}$. При ламинарном режиме движения потери удельной энергии по длине пропорциональны первой степени скорости.

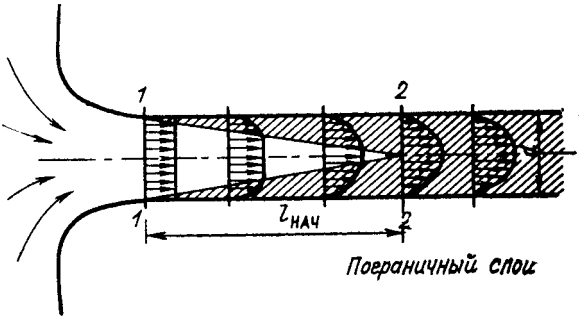


Рис. 7.2

При турбулентном режиме движения отрезок NB на графике составляет с осью абсцисс угол θ_2, $\operatorname{tg}\theta_2 = 1{,}75 \div 2$. Точка N соответствует скорости $v_{в.\,кр}$. Следовательно, при турбулентном режиме движения потери удельной энергии пропорциональны средней скорости в степени от 1,75 до 2.

При значении средней скорости v, заключенном в пределах $v_{н.\,кр} < v < v_{в.\,кр}$, зависимость $h_{дл} = f(v)$ определяется конкретными условиями, в которых происходит движение.

2. Неравномерное движение с постоянной по длине средней скоростью (но с изменяющимся по длине распределением продольных составляющих местных скоростей по живому сечению, т. е. с изменяющейся по длине эпюрой скоростей) наблюдается в напорных трубопроводах на начальных участках.

При турбулентном режиме движения рассматривается распределение по живому сечению (эпюра) продольных осредненных скоростей и пульсационных добавок. На начальном участке, расположенном непосредственно за входом в трубу или канал, происходит изменение местных скоростей потока от начального (на входе) их распределения по живому сечению до распределения, соответствующего равномерному движению.

При плавном криволинейном входе из достаточно большого резервуара в трубу эпюра местных осредненных скоростей в поперечных сечениях в створе *1—1* будет весьма близкой к равномерной (коэффициент Кориолиса $\alpha \approx 1$). Скорость непосредственно на стенке равна нулю. Тормозящее влияние сил вязкости приводит к трансформации эпюры скоростей (рис. 7.2). В начале трубы вблизи стенок образуется пограничный, симметричный относительно оси слой, в котором скорости при удалении от стенки увеличиваются. На длине начального участка в средней части поперечного сечения сохраняются практически постоянные скорости. Постепенно (вниз по течению) область постоянных скоростей уменьшается, а толщина пограничного слоя растет. Наконец, пограничн-

ный слой смыкается на оси трубы. Длину участка от сечения 1—1 до сечения 2—2, где это происходит, называют *длиной начального участка* $l_{нач}$. Далее по длине потока распределение скоростей остается почти неизменным.

Толщина пограничного слоя в месте смыкания при симметричном движении равна $d/2$ (d — диаметр трубы). Строго говоря, распределение скоростей приближается к распределению, соответствующему равномерному движению, асимптотически.

В условиях, когда в трубе режим движения ламинарный, на всем протяжении начального участка поток будет ламинарным.

Если интенсивность турбулентности на входе в трубу мала, сначала образуется ламинарный пограничный слой, затем сравнительно небольшой участок с перемежающимся движением и, наконец, турбулентный пограничный слой. При сильно турбулизированном потоке на входе (например, за центробежным насосом, на входе с острой кромкой или за установленной на входе решеткой или сеткой) длина начального участка меньше, чем при ламинарном потоке.

Распределение каждого из параметров потока (осредненные скорости, турбулентные пульсации скорости, касательные напряжения) принимает вид, соответствующий равномерному потоку, на участках разной длины. Кроме того, различные параметры поразному зависят от числа Рейнольдса, формы входа и поперечного сечения, шероховатости стенок, начальной интенсивности турбулентности потока на входе и т. д.

Иногда движение, при котором распределение осредненных скоростей не изменяется по длине трубы (рис. 7.3, *а*), называют также *стабилизированным* или *полностью развитым (ламинарным или турбулентным) движением*. Длина стабилизации осредненных скоростей на начальном участке при напорном турбулентном движении в трубе составляет $(30 \div 35)\ d$, если стабилизацию считать законченной

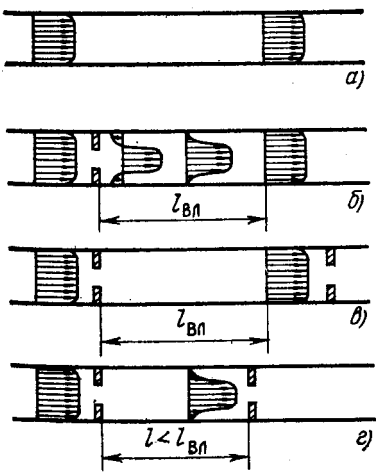


Рис. 7.3

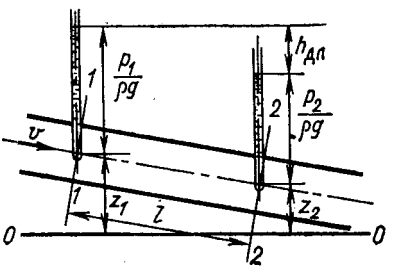


Рис. 7.4

в сечении, где отношение u_{max}/v на 3 % превышает значение такого же отношения при равномерном движении.

Стабилизация распределения по живому сечению пульсационных составляющих скорости при турбулентном напорном движении в трубе заканчивается на расстоянии приблизительно 80 d.

Таким образом, при расчетах и исследованиях длина начального участка принимается в зависимости от того, какие параметры и с какой степенью приближения к параметрам равномерного движения нас интересуют.

3. Неравномерное плавно изменяющееся движение характеризуется признаками, приведенными в гл. 3. При этом виде движения потери удельной энергии (напора) по длине часто рассчитывают по тем же формулам, что и потери по длине при равномерном движении (см. далее, гл. 7 и 8).

4. Неравномерное движение с неплавным изменением средней скорости на коротких участках возникает обычно при протекании жидкости через конструктивные элементы.

При движении жидкости через конструктивные элементы труб и каналов (местные сопротивления) изменяются кинематические характеристики (как осредненные, так и пульсационные, если рассматривается турбулентное движение) по сравнению с движением, не возмущенным наличием местных конструктивных элементов в трубе (канале) (рис. 7.3, *б—г*).

Если режим движения турбулентный, за местным возмущающим поток элементом отмечается повышенная пульсация скоростей и более интенсивное перемешивание частиц жидкости; могут произойти отрывы потока от ограничивающих поверхностей (стенок) и образоваться водоворотные зоны с циркуляционным движением жидкости. Особенности такого движения будут рассмотрены в гл. 9.

По мере удаления вниз по направлению движения от возмущающих поток конструктивных элементов кинематическая структура потока постепенно стабилизируется и приходит к виду, характерному для невозмущенного равномерного движения (рис. 7.3, *б*).

Длиной зоны влияния данного конструктивного элемента (препятствия) называют длину участка, за пределами которого кинематические характеристики потока (в том числе и пульсационные) принимают вид, характерный для невозмущенного потока. Длина зоны влияния на рис. 7.3, *б—г* обозначена $l_{вл}$. Ее также называют длиной участка стабилизации эпюры скоростей.

При развитом турбулентном напорном движении в трубах приближенно принимают в зависимости от конкретных условий длину зоны влияния конструктивного элемента $(30 \div 60)\,d$, где d — диаметр трубы.

Равномерное (стабилизированное или полностью развитое) движение имеет место за пределами начального участка ниже по на-

правлению движения или за пределами зоны влияния конструктивных элементов или устройств. При этом движении не изменяются по длине не только скорости, но и распределение местных осредненных и пульсационных скоростей по живому сечению.

В дополнение к сказанному выше отметим, что при равномерном движении также неизменны по длине гидравлический уклон и касательные напряжения на стенке.

Следует иметь в виду, что суммирование потерь напора по (7.1) может давать приемлемые по точности результаты лишь тогда, когда рассматриваемые конструктивные элементы отстоят друг от друга на расстоянии, не меньшем длины зоны влияния, т. е. между местными сопротивлениями, возмущающими поток, должны иметься участки со стабилизированным движением (рис. 7.3, *в*). В противном случае (рис. 7.3, *г*) распределение скоростей на подходе к местному препятствию не соответствует равномерному движению и расчеты по (7.1) могут привести к ошибкам.

Потери напора по длине экспериментально определяются следующим образом.

В сечениях, где движение равномерное (т. е. за пределами начального участка или зоны влияния), к отверстиям в стенках русла (трубопровода) присоединяются (рис. 7.4) пьезометры. Из уравнения Бернулли, составленного для этих сечений, следует, что

$$h_{тр} = (z_1 + p_1/\rho g + \alpha_1 v_1^2/2g) - (z_2 + p_2/\rho g + \alpha_2 v_2^2/2g). \qquad (7.2)$$

При равномерном движении ($v_1 = v_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$) имеем

$$h_{тр} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right)$$

или

$$h_{тр} = \Delta H_п,$$

где $\Delta H_п$ — разность пьезометрических напоров.

В горизонтальной прямолинейной трубе ($z_1 = z_2$) при равномерном движении потери напора определяются так:

$$h_{тр} = p_1/\rho g - p_2/\rho g = \Delta p/\rho g. \qquad (7.3)$$

В этом случае $h_{тр} = h_{дл}$.

Обычно потери напора выражают через скоростной напор:

$$h_{тр} = \zeta v^2/2g, \qquad (7.4)$$

где ζ — коэффициент сопротивления (коэффициент потерь), показывающий, какому количеству скоростных напоров (или долей скоростного напора) соответствует потеря напора, затрачиваемого на преодоление данного сопротивления.

В форме (7.4) выражаются как потери по длине

$$h_{дл} = \zeta_{дл} v^2/2g, \qquad (7.5)$$

так и местные потери напора

$$h_м = \zeta_м v^2/2g \qquad (7.6)$$

(формула Вейсбаха), где $\zeta_{дл}$ — коэффициент сопротивления по длине; $\zeta_м$ — коэффициент местного сопротивления.

Большинство коэффициентов сопротивления, приводимых в справочниках, найдены экспериментально. Экспериментальное определение местных потерь напора будет описано в гл. 9.

7.2. Зависимость потерь напора от параметров потока

В инженерных задачах о движении вязкой жидкости необходимо рассчитать динамические (перепад давления Δp или сила сопротивления тела, на которое набегает поток) или кинематические (обычно средняя скорость потока v) параметры потока.

Для определения вида зависимости потерь напора на трение (по длине) от различных влияющих на потери факторов применим метод размерностей.

Важно отметить, что составление полного и правильного перечня величин, характеризующих изучаемый процесс,— крайне ответственный этап для получения расчетных формул с помощью метода размерностей. Здесь необходимы представления о физической картине процесса, которые основаны на накопленном опыте гидравлических исследований.

При установившемся движении в поле сил тяжести перепад давления (или сила сопротивления тела, обтекаемого жидкостью) и средняя скорость зависят от следующих параметров:

1) геометрических параметров русла или трубопровода. К ним относятся форма и характерные размеры живого сечения l_1 и l_2; длина по направлению движения l; углы, ограничивающие живое сечение; форма, взаимное расположение и размеры выступов шероховатости стенок; Δ — высота выступа и l_Δ — характерный продольный размер выступа шероховатости;

2) физических свойств жидкости: ρ — плотности, μ — динамической вязкости, σ — поверхностного натяжения и E_0 — модуля упругости;

3) степени турбулизации потока, которая характеризуется в первую очередь среднеквадратичными значениями пульсационных составляющих σ_u.

При неустановившемся движении, кроме того, к перечисленным параметрам добавляется время t.

Согласно π-теореме уравнение, выражающее некоторую физическую закономерность и содержащее k размерных величин (из которых n величин имеют независимые размерности), может быть преобразовано в уравнение, связывающее $(k—n)$ независимых безразмерных комплексов. Эти безразмерные комплексы составлены из указанных k величин.

Независимыми называются комплексы, которые не могут быть получены в виде степенной функции остальных комплексов.

В гидравлике в качестве параметров с независимыми размерностями принимают базовые физические величины: характерный линейный размер, скорость и плотность. Размерность любой другой величины в приведенном выше перечне может быть выражена через размерности базовых физических величин. В качестве линейного размера, характеризующего живое сечение, примем l_1 — характерный размер живого сечения. В различных задачах это будет или R — гидравлический радиус, или h — глубина жидкости, или d — диаметр трубы и т. д.

Если произвольную из указанных размерных величин, не входящую в состав параметров с независимыми размерностями, обозначить через N_i, безразмерный комплекс, характеризующий влияние данной размерной величины N_i на движение жидкости (π-член), выражается как

$$\pi_i = \frac{l_1^x v^y \rho^z}{N_i} = L^0 M^0 T^0. \tag{7.7}$$

Могут быть применены и π-члены в виде $\pi_i' = \pi_i^{-1}$.

Напомним размерности базовых физических величин:

$$[l_1] = L; \quad [v] = LT^{-1}; \quad [\rho] = ML^{-3}.$$

В общем виде взаимосвязь между указанными параметрами, включая и ускорение свободного падения g, имеет вид

$$f(l,\ l_1,\ l_2,\ \Delta,\ l_\Delta,\ \Delta p,\ v,\ \rho,\ \mu,\ g,\ \sigma,\ E_0,\ \sigma_u,\ t) = 0, \tag{7.8}$$

всего имеем $k = 14$ размерных параметров. Так как из них величин с независимыми размерностями $n = 3$, то в результате должны получить $k-n = 11$ безразмерных комплексов (π-членов).

Рассмотрим применение метода размерностей для размерных Δp, μ, g и Δ. Применим (7.7) к перепаду давления Δp.

Имеем

$$\frac{[l_1]^x [v]^y [\rho]^z}{[\Delta p]} = L^0 M^0 T^0$$

или

$$L^x \left(\frac{L}{T}\right)^y \left(\frac{M}{L^3}\right)^z \left(\frac{M}{T^2 L}\right)^{-1} = L^0 M^0 T^0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x + y - 3z + 1 &= 0; \\ z - 1 &= 0; \\ -y + 2 &= 0; \\ x = 0; \quad y = 2; \quad z &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\pi_{\Delta p} = \rho v^2 / \Delta p \quad \text{или} \quad \pi_{\Delta p}' = \Delta p / \rho v^2. \tag{7.9}$$

Безразмерный комплекс $\Delta p/\rho v^2$ называется числом Эйлера Eu.

Запишем (7.7) для динамической вязкости μ, размерность которой $\left[\frac{M}{LT}\right]$:

$$\frac{[l_1]^x\,[v]^y\,[\rho]^z}{[\mu]} = L^0M^0T^0,$$

отсюда

$$L^x\left(\frac{L}{T}\right)^y\left(\frac{M}{L^3}\right)^z\left(\frac{M}{LT}\right)^{-1} = L^0M^0T^0.$$

Сравнивая показатели степени при одноименных размерностях в правой и левой частях, получаем

$$\begin{aligned} x+y-3z+1&=0;\\ -y+1&=0;\\ z-1&=0; \end{aligned}$$

тогда $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Подставляем эти значения в (7.7) и получаем

$$\pi_\mu = l_1 v\rho/\mu.$$

Учитывая, что $\mu/\rho = \nu$ — кинематическая вязкость, находим, что влияние вязкости отражается безразмерным комплексом π_μ, т. е. известным числом Рейнольдса

$$\pi_\mu = \mathrm{Re} = vl_1/\nu. \tag{7.10}$$

Для размерного члена Δ получим, применяя аналогичный прием,

$$\frac{[l_1]^x\,[v]^y\,[\rho]^z}{[\Delta]} = L^0M^0T^0$$

или

$$L^x\left(\frac{L}{}\right)^y\left(\frac{M}{L^3}\right)^z(L)^{-1} = L^0M^0T^0,$$

откуда

$$x+y-3z-1=0;\quad z=0;\quad -y=0 \text{ и } x=1;\quad y=0;\quad z=0.$$

Таким образом, π-член, отражающий влияние высоты выступов шероховатости, представится в виде

$$\pi_\Delta = l_1/\Delta \text{ или } \pi'_\Delta = \Delta/l_1. \tag{7.11}$$

Следовательно, на движение жидкости оказывает влияние не абсолютное значение высоты выступа шероховатости, а безразмерный параметр — относительная шероховатость Δ/l_1. Как уже указывалось, l_1 — линейная величина, характеризующая живое сечение русла или трубы. Это может быть диаметр d или радиус трубы r_0, гидравлический радиус R, глубина безнапорного потока h.

Величина, обратная относительной шероховатости, т. е. l_1/Δ, называется относительной гладкостью.

Определим π-член, отражающий влияние силы тяжести, представленной в (7.8) ускорением g. Снова применим (7.7):

$$\frac{[l_1]^x [v]^y [\rho]^z}{[g]} = L^0 M^0 T^0;$$

$$L^x \left(\frac{L}{T}\right)^y \left(\frac{M}{L^3}\right)^z \left(\frac{L}{T^2}\right)^{-1} = L^0 M^0 T^0.$$

Тогда

$$x + y - 3z - 1 = 0; \quad z = 0; \quad -y + 2 = 0;$$

$$x = -1; \quad y = 2; \quad z = 0.$$

Отсюда π-член, отражающий влияние силы тяжести на движение жидкости, равен

$$\pi_g = \mathrm{Fr} = v^2/gl_1. \tag{7.12}$$

Этот безразмерный комплекс называется числом Фруда. В литературе (особенно в зарубежной) применяют число Фруда в форме

$$\mathrm{Fr} = \sqrt{\pi_g} = v/\sqrt{gl_1}.$$

Выполнив анализ размерностей и для других членов уравнения (7.8), найдем соответствующие π-члены:

$$\pi_{l_2} = l_2/l_1; \quad \pi_{l_\Delta} = l_1/l_\Delta;$$

$$\pi_\sigma = v^2 l_1 \rho/\sigma; \quad \pi_{E_0} = v^2\rho/E_0; \quad \pi_{\sigma_u} = \sigma_u/v;$$

$$\pi_t = l_1/vt.$$

Укажем названия и обозначения ряда безразмерных комплексов, отражающих:

поверхностное натяжение — число Вебера

$$\mathrm{We} = v^2 l_1 \rho/\sigma;$$

упругость жидкости — число Коши

$$\mathrm{Ca} = v^2\rho/E_0;$$

время (при неустановившемся движении) — число Струхаля

$$\mathrm{Sh} = l_1/vt;$$

турбулентность — число Кармана

$$\mathrm{Ka} = \sigma_u/v.$$

Геометрическое соотношение, характеризующее живое сечение, представлено π-членом $\pi_{l_2} = l_2/l_1$.

Относительная длина элементов (выступов) шероховатости (в направлении движения) представлена π-членом $\pi_{l_\Delta} = l_\Delta/l_1$.

Из приведенного перечня факторов, влияющих на потери напора при движении жидкости, конечно, не во всех случаях, могут присутствовать все факторы. В большинстве случаев гидротехнической практики можно не учитывать влияние поверхностного натяжения и сжимаемости. Укажем, что число Коши представляет собой отношение скорости потока к скорости звука в данной жидкости и играет роль в случаях движения, когда скорость v сопоставима со скоростью звука.

Найдя π-члены, перепишем (7.8) в виде

$$f_1\left(l/l_1;\ \ l_2/l_1;\ \ \Delta/l_1;\ \ l_\Delta/l_1;\ \ \mathrm{Eu},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{Fr},\ \mathrm{We},\ \mathrm{Ca},\ \mathrm{Ka},\ \mathrm{Sh}\right)=0 \tag{7.13}$$

и получим уравнение, связывающее $k—n = 11$ безразмерных комплексов.

Учитывая, что $h_{\text{тр}} = \Delta p/\rho g$, и имея в виду расчет потерь напора, выразим число Эйлера $\mathrm{Eu} = \Delta p/\rho v^2$ как функцию от остальных безразмерных комплексов.

Если движение установившееся, то число Струхаля, отражающее влияние неустановившегося характера движения, исчезает (выпадает) из (7.13).

С учетом указанных ограничений имеем

$$\Delta p/\rho v^2 = f_2\left(l/l_1;\ \ l_2/l_1;\ \ \Delta/l_1;\ \ l_\Delta/l_1;\ \ \mathrm{Re},\ \mathrm{Fr},\ \mathrm{Ka}\right). \tag{7.14}$$

Определение функции f_2 является одной из основных задач гидравлики.

Отметим, что безразмерные комплексы — числа Рейнольдса, Фруда, Эйлера и Струхаля — можно получить из уравнений, Навье—Стокса (см. гл. 5), приведя их к безразмерному виду.

Иногда в гидравлических исследованиях и расчетах применяют не только выведенные здесь π-члены, но и их комбинации, например l_Δ/Δ, $\mathrm{Ga} = \mathrm{Fr}/\mathrm{Re}^2 = \nu^2/gl^3$ — число Галилея и др. Кроме рассмотренных применяются также и другие параметры. При необходимости в последующих главах будем привлекать безразмерные комплексы, не вошедшие в (7.13).

Отметим, что число Рейнольдса характеризует отношение силы инерции к силе вязкости, число Фруда пропорционально отношению силы инерции к силе тяжести, число Эйлера есть отношение силы давления к силе инерции.

7.3. Общая формула коэффициента сопротивлений (потерь напора) по длине при равномерном движении

Как известно, при равномерном движении форма и площадь живого сечения, средняя скорость и эпюра скоростей по длине не изменяются. Составив уравнение Бернулли для двух сечений, из (7.2) при $v_1 = v_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $z_1 = z_2$, а также учитывая отсутствие $h_{\text{м}}$, получим по (7.3), что $h_{\text{дл}} = \Delta p/\rho g$.

Опыты показывают, что потери напора по длине $h_{дл}$ прямо пропорциональны длине участка трубы или русла, на которой эти потери определяются. Тогда для напорного движения в круглой трубе живое сечение может быть охарактеризовано одним линейным параметром l_1, например диаметром d. Учитывая, что $d = 4R$ (см. § 3.5), получим для характерного линейного элемента $l_1 = d = 4R$.

Подставляя эти данные в (7.14), получаем с учетом пропорциональности Δp длине участка l

$$\Delta p/\rho v^2 = f_3\,(\Delta/4R;\quad l_\Delta/4R;\quad \mathrm{Re};\quad \mathrm{Fr};\quad \mathrm{Ka})\; l/4R.$$

Длина участка, на котором определяются потери напора, обозначена, как и выше в тексте, l (без индекса).

Так как $h_{тр} = \Delta p/\rho g$, а здесь рассчитываются только потери напора по длине (местные потери напора отсутствуют), то имеем

$$h_{дл} = 2\,\frac{\Delta p}{\rho}\,\frac{1}{2g}$$

или

$$h_{дл} = 2f_3\,(\Delta/4R;\quad l_\Delta/4R;\quad \mathrm{Re};\quad \mathrm{Fr};\quad \mathrm{Ka})\,\frac{l}{4R}\,\frac{v^2}{2g}. \qquad (7.15)$$

Обозначим безразмерный параметр

$$2f_3\,(\Delta/4R;\quad l_\Delta/4R;\quad \mathrm{Re};\quad \mathrm{Fr};\quad \mathrm{Ka}) = \lambda. \qquad (7.16)$$

Безразмерный параметр λ называется коэффициентом гидравлического трения, или коэффициентом Дарси.

При напорном движении в трубах влияние силы тяжести (число Фруда) исключается из рассмотрения. Тогда для напорного движения в круглых трубах

$$\lambda = f_4\,(\Delta/d;\quad l_\Delta/d;\quad \mathrm{Re};\quad \mathrm{Ka}). \qquad (7.17)$$

Отметим, что вопрос о влиянии числа Fr на λ в открытых руслах является дискуссионным.

Общая формула для потерь напора по длине имеет вид

$$h_{дл} = \lambda\,\frac{l}{4R}\,\frac{v^2}{2g}. \qquad (7.18)$$

Для круглых труб

$$h_{дл} = \lambda\,\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g}. \qquad (7.18а)$$

Эта формула была установлена экспериментально и называется формулой Дарси—Вейсбаха.

Сравнивая формулы (7.18) и (7.5), видим, что коэффициент сопротивлений (потерь) по длине $\zeta_{дл}$ равен

$$\zeta_{дл} = \lambda\,\frac{l}{d} = \lambda\,\frac{l}{4R}.$$

Конкретный вид зависимостей коэффициента Дарси λ от определяющих его безразмерных параметров будет подробно рассматриваться в последующих главах.

7.4. Средняя скорость и расход потока при равномерном движении жидкости

При равномерном движении жидкости средняя скорость потока, не изменяющаяся по длине, будет равна согласно (7.18)

$$v = \sqrt{\frac{8gR}{\lambda}\frac{h_{дл}}{l}}. \tag{7.19}$$

Обозначим

$$\sqrt{8g/\lambda} = C.$$

Коэффициент C называется коэффициентом Шези. Введя в (7.19) коэффициент Шези и гидравлический уклон, получим формулу Шези для средней скорости при равномерном движении:

$$v = C\sqrt{RJ}. \tag{7.20}$$

Вместо (7.18) потери по длине при равномерном движении можно выразить следующей формулой:

$$h_{дл} = \frac{v^2 l}{C^2 R}.$$

Коэффициент Шези C в отличие от безразмерного коэффициента Дарси λ имеет размерность

$$[C] = L^{0,5}T^{-1}.$$

Зная формулу для средней скорости потока, получим формулу Шези для расхода при равномерном движении:

$$Q = \omega v = \omega C\sqrt{RJ}. \tag{7.21}$$

Запишем формулу Шези (7.20) в таком виде:

$$v = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}\sqrt{gRJ}, \tag{7.22}$$

где $\sqrt{gRJ}$ называется динамической скоростью u_* (см. § 6.2) и определяется по формуле

$$u_* = \sqrt{gRJ}. \tag{7.23}$$

Из (7.22) имеем

$$\frac{v}{\sqrt{gRJ}} = v/u_* = \sqrt{8/\lambda}\,, \tag{7.24}$$

а для коэффициента Дарси

$$\lambda = 8\,(u_*/v)^2. \tag{7.25}$$

Динамическая скорость u_* — важная характеристика движения и в каждом конкретном случае равномерного движения сохраняется постоянной.

7.5. Касательные напряжения и их распределение при равномерном движении

Рассмотрим равномерное напорное движение жидкости в прямолинейной наклонной трубе радиусом r_0 с площадью живого сечения ω и смоченным периметром χ. Выделим отсек длиной l и составим уравнение равномерного движения (рис. 7.5) массы жидкости, заключенной в отсеке.

При равномерном движении сумма проекций на направление движения (на ось трубы) внешних сил, действующих на жидкость в выделенном отсеке, должна быть равна нулю ($P—T + G\cos\theta=0$). Здесь P — равнодействующая сила давления в сечениях *1—1* и *2—2*; T — направленная против течения равнодействующая сил трения, действующих на боковой поверхности отсека χl; G — вес жидкости в выделенном отсеке. Тогда

$$(p_1 - p_2)\,\omega - \tau_0 \chi l + \rho g \omega l \cos\theta = 0,$$

где τ_0 — касательное напряжение на стенке трубы; p_1 и p_2 — давления, действующие в центрах тяжести торцевых сечений отсека $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; z_1 и z_2 — координаты центров тяжести этих сечений.

Учитывая, что $l\cos\theta = z_1 - z_2$, имеем

$$(p_1 - p_2)\,\omega - \tau_0 \chi l + \rho g \omega\,(z_1 - z_2) = 0. \tag{7.26}$$

Разделив все члены уравнения на $\rho g\omega$, получим

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 + p_2}{\rho g} = \frac{\tau_0 \chi l}{\rho g \omega}\,. \tag{7.27}$$

При равномерном движении

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = h_{дл}.$$

Тогда касательные напряжения на стенке трубы

$$\tau_0 = \rho g \frac{\omega}{\chi} \frac{h_{дл}}{l}\,.$$

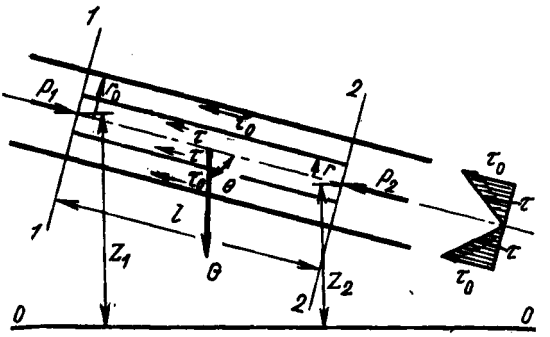


Рис. 7.5

Так как $\omega/\chi = R$ — гидравлический радиус, а $h_{дл}/l = J$ — гидравлический уклон, то

$$\tau_0 = \rho g R J \tag{7.28}$$

или

$$\tau_0 = \rho g \frac{r_0}{2} J; \tag{7.29}$$

$$\tau_0/\rho = gRJ = u_*^2. \tag{7.30}$$

Распределение касательных напряжений по сечению трубы может быть выяснено следующим образом. Выделим в потоке цилиндрический отсек жидкости, боковая поверхность которого отстоит от оси трубы на размер r, меньший радиуса трубы r_0. Тогда для трубы получим

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} J, \tag{7.31}$$

где τ — касательное напряжение, действующее на боковой поверхности выделенного в жидкости цилиндра с радиусом поперечного сечения r.

Сравнивая (7.29) и (7.31), видим, что

$$\tau/\tau_0 = r/r_0 \text{ и } \tau = \tau_0 r/r_0. \tag{7.32}$$

Так как $r = r_0 - z$, где z — расстояние по нормали от стенки трубы до рассматриваемой боковой поверхности отсека, то имеем

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \tau_0 (r_0 - z)/r_0 \\ \text{или} \\ \tau &= \tau_0 (1 - z/r_0). \end{aligned}\right\} \tag{7.33}$$

Следовательно, при равномерном движении касательное напряжение по радиусу трубы распределено по линейному закону. Согласно (7.33) касательное напряжение на стенке (при $z = 0$) имеет максимальное значение, равное τ_0. На оси трубы касательное напряжение равно нулю.

Приведем другую формулу для $h_{дл}$. По (7.25) $\lambda = 8\,(u_*/v)^2$, а по (7.30) $u_* = \tau_0/\rho$. Тогда можно записать

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8}\rho v^2 \quad \text{или} \quad \lambda = 8\frac{\tau_0}{\rho v^2}.$$

Подставив в (7.18) найденное значение λ, можно получить следующее выражение для потерь напора по длине:

$$h_{дл} = \frac{\tau_0 l}{\rho g R}. \tag{7.34}$$

Таким образом, видно, что при равномерном движении потери напора по длине в данных условиях (l, ρ, g, R) можно определять через касательное напряжение на стенке.

7.6. Контрольные вопросы и примеры

1. Поясните основные особенности следующих видов установившегося движения: равномерного, на участках стабилизации эпюры скоростей, плавно изменяющегося, в пределах так называемых местных сопротивлений.
2. Как экспериментально определить потери напора (потери удельной энергии)?
3. Какой вид имеют формулы Вейсбаха и Дарси—Вейсбаха?
4. Какие параметры жидкости, русла (или трубопровода), потока влияют на потери напора?
5. Какие безразмерные комплексы отражают влияние на потери напора?
6. Опишите (в общем виде) различные случаи зависимости коэффициента Дарси от определяющих безразмерных комплексов.
7. Запишите формулы Шези для средней скорости и расхода при равномерном движении. Какова размерность коэффициентов Дарси и Шези?
8. Запишите зависимость, связывающую среднюю и динамическую скорость.
9. Как распределяются касательные напряжения по сечению цилиндрической трубы при равномерном движении?

Пример 7.1. Определить значение динамической скорости при равномерном безнапорном движении в бетонном канале прямоугольного сечения, если потери удельной энергии (напора) составили $h_{дл} = 0{,}5$ м при расстоянии между створами измерений, равном $l = 800$ м. Ширина канала $b = 10$ м, глубина воды $h = 2$ м.

Решение. Определим значение гидравлического радиуса:

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{bh}{b + 2h} = 1{,}43 \text{ м}.$$

При этом гидравлический уклон $J = h_{дл}/l = 0{,}5/800 = 0{,}000625$. Тогда $u_* = \sqrt{gRJ} = \sqrt{9{,}81 \cdot 1{,}43 \cdot 0{,}000625} = 0{,}094$ м/с.

Пример 7.2. При данных примера 7.1 найти среднюю скорость потока, если расход воды равен 40 м³/с. Определить значения коэффициента Дарси и коэффициента Шези в данных условиях.

Решение. Средняя скорость потока $v = Q/\omega = 2$ м/с. Коэффициент Дарси согласно (7.25) равен $\lambda = 8\,(u_*/v)^2 = 8\left(\frac{0{,}094}{2}\right)^2 = 0{,}0176$. Соответственно коэффициент Шези $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} = 66{,}78$ м^{0,5}/с.

Глава 8

ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

А. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ

8.1. Распределение местных скоростей. Расход. Средняя скорость

Цилиндрические трубы круглого сечения. Распределение местных скоростей. Рассмотрим равномерное ламинарное напорное движение в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения радиусом r_0 (рис. 8.1). Движение — осесимметричное. Такое движение целесообразно рассматривать в системе координат (x, r), где ось OX направлена вдоль оси трубы, а r — радиус точки в нормальном к оси сечении.

При равномерном ламинарном движении жидкости в трубе

$$u_x = u; \quad u_r = 0. \tag{8.1}$$

Движение можно представить как совокупность бесконечно тонких кольцевых концентрических слоев, перемещающихся относительно друг друга.

Возникающие между слоями жидкости касательные напряжения по Ньютону [см. (1.12)]

$$\tau = -\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}. \tag{8.2}$$

С ростом r (от оси к стенке трубы) скорость u уменьшается, поэтому градиент скорости $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r < 0$. Поскольку касательное напряжение τ имеет положительное значение, в (8.2) вводится знак минус.

Для касательного напряжения ранее было получено соотношение (7.31)

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} J,$$

где J — гидравлический уклон.

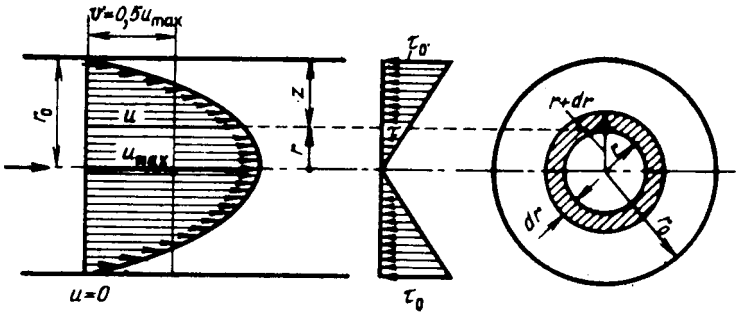


Рис. 8.1

Приравняв (7.31) и (8.2), получим

$$\rho g \frac{r}{2} J = -\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}, \tag{8.3}$$

откуда

$$\mathrm{d}u = -\frac{\rho g J}{2\mu} r\,\mathrm{d}r = -\frac{gJ}{2\nu} r\,\mathrm{d}r.$$

Полагая, что ν не изменяется в пределах живого сечения [$\nu \neq f(r)$], и учитывая, что J не зависит от r, получаем

$$\int \mathrm{d}u = -\frac{gJ}{2\nu} \int r\,\mathrm{d}r.$$

После интегрирования

$$u = -\frac{gJ}{4\nu} r^2 + C.$$

Находим постоянную интегрирования C из условия «прилипания» жидкости к стенке. При $r = r_0$ скорость $u = 0$, поэтому

$$C = \frac{gJ}{4\nu} r_0^2.$$

Тогда для местной скорости в точке живого сечения, расположенной на расстоянии r от оси трубы, имеем

$$u = \frac{gJ}{4\nu} (r_0^2 - r^2). \tag{8.4}$$

Таким образом, при ламинарном движении жидкости в цилиндрической трубе круглого сечения (напорный поток) распределение местных скоростей по радиусу имеет параболический характер (рис. 8.1). Плоская эпюра скорости — парабола.

Из (8.4) следует, что максимальная скорость имеет место на оси трубы, т. е. при $r = 0$:

$$u_{max} = \frac{gJ}{4\nu} r_0^2.$$

Выразим местную скорость u через u_{max}:

$$u = u_{max}[1 - (r/r_0)^2]. \tag{8.5}$$

Безразмерная местная скорость

$$u/u_{max} = 1 - (r/r_0)^2. \tag{8.6}$$

Следовательно, эпюры безразмерных местных скоростей при ламинарном движении жидкости в трубах одинаковы и их можно представить параболой (8.6).

Р а с х о д. Для определения расхода в одном из поперечных сечений трубы выделим на расстоянии r от оси трубы элементарную площадку в виде кольца толщиной dr (рис. 8.1). Площадь кольца $d\omega = 2\pi r\, dr$. Расход через площадку определится по соотношению $dQ = u\, 2\pi r\, dr$. Расход через сечение

$$Q = \int_0^{r_0} u\, d\omega = 2\pi \int_0^{r_0} ur\, dr.$$

Подставив значение u из (8.5) и помня замечание о независимости ν от r, получим

$$Q = \frac{2\pi u_{max}}{r_0^2} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r\, dr = \frac{\pi r_0^2}{2} u_{max} \tag{8.7}$$

или

$$Q = \frac{\pi g J}{128\nu} d^4. \tag{8.8}$$

Важно отметить, что при заданном J расход в трубе в условиях напорного ламинарного движения пропорционален ч е т в е р т о й степени диаметра.

С р е д н я я с к о р о с т ь. Учитывая, что $v = Q/\omega$, найдем выражение для средней скорости:

$$v = \frac{gJ}{32\nu} d^2 = \frac{gJ}{8\nu} r_0^2. \tag{8.9}$$

Сравнивая формулы для u_{max} и v, видим, что

$$v = 0{,}5 u_{max}, \tag{8.10}$$

т. е. средняя скорость в сечении напорного ламинарного потока в цилиндрической трубе круглого сечения равна половине максимальной скорости.

Коэффициент кинетической энергии равен

$$\alpha = \frac{1}{\omega}\int_{\omega}\left(\frac{u}{v}\right)^3 d\omega = \frac{\int_0^{r_0}\left[\frac{gJ}{4\nu}\left(r_0^2 - r^2\right)\right]^3 2\pi r\, dr}{\pi r_0^2\left(\frac{gJr_0^2}{8\nu}\right)^3} = 2.$$

Градиент местной скорости $\frac{du}{dr} = -\frac{gJ}{2\nu}r$, т. е. изменяется прямо пропорционально расстоянию r данной точки (данного слоя) от оси трубы. Градиент $\frac{du}{dr} < 0$.

Касательные напряжения линейно увеличиваются от нуля на оси трубы до $\tau_0 = \rho g\frac{r_0}{2}J$ на стенке (рис. 8.1). Действительно, $\tau = -\mu\frac{du}{dr}$, а $\frac{du}{dr} = -\frac{gJ}{2\nu}r$, откуда $\tau = \rho g\frac{r}{2}J$, что совпадает с (7.31).

Открытые безнапорные ламинарные потоки. Такие потоки могут возникать, например, при стекании дождевых вод по склону.

Распределение местных скоростей. Рассмотрим плоский (см. § 3.5) ламинарный безнапорный поток с углом наклона дна θ. Выделим в потоке отсек $ABCD$ длиной l, высотой $h-z$, шириной, равной единице (рис. 8.2).

Направим ось OX вдоль потока параллельно поверхности потока и дну (при равномерном движении в открытом потоке они параллельны), ось OZ направлена по внешней нормали к дну.

Спроектировав на OX все действующие на массу жидкости в отсеке $ABCD$ силы и приравняв нулю их сумму, получим уравнение равномерного движения выделенной массы.

Проекция силы тяжести $ABCD$ равна $\rho g\,(h-z)\cdot l\cdot 1\cdot\sin\theta$. Проекция силы трения по нижней поверхности BC равна $\tau l\cdot 1$. Уравнение равномерного движения массы жидкости в выделенном отсеке

$$\tau = \rho g\,(h-z)\sin\theta.$$

Но

$$\tau = \mu\frac{du}{dz}.$$

Подставив это значение τ в предыдущее соотношение, получим

$$\mu = \frac{du}{dz} = \rho g\,(h-z)\sin\theta$$

или

$$du = \frac{\rho g\,(h-z)\sin\theta\, dz}{\mu} = \frac{g\sin\theta\,(h-z)\,dz}{\nu}.$$

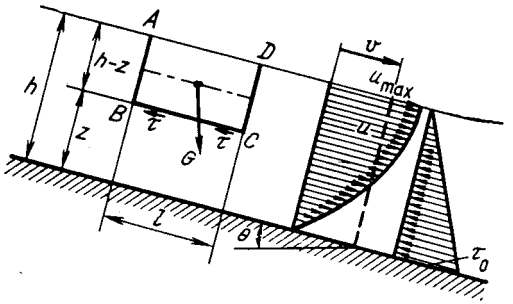


Рис. 8.2

При малых углах $\sin\theta = \operatorname{tg}\theta = i$, где i — уклон дна. Тогда

$$du = \frac{gi}{\nu}(h - z)\,dz\ .$$

Проинтегрировав в пределах от 0 до h, получим

$$u = \frac{gi}{2\nu} z\,(2h - z) + C.$$

При $z = 0$ скорость $u = 0$, следовательно, постоянная интегрирования $C = 0$, тогда для распределения скоростей в открытом потоке

$$u = \frac{gi}{2\nu} z\,(2h - z)\,. \tag{8.11}$$

Таким образом, скорости распределяются по глубине рассматриваемого потока по параболе. Максимальная скорость в данном случае будет иметь место на поверхности:

$$u_{max} = \frac{gi}{2\nu} h^2. \tag{8.12}$$

Расход

$$Q = \int_0^h u\,dz \cdot 1 = \int_0^h \frac{gi}{2\nu} z\,(2h - z)\,dz = \frac{gi}{3\nu} h^3.$$

Средняя скорость

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{gih^3}{3\nu h} = \frac{gi}{3\nu} h^2 = \frac{2}{3} u_{max}. \tag{8.13}$$

Касательные напряжения изменяются по линейному закону и принимают значения от 0 у поверхности до $\tau_0 = \rho ghi$ у дна.

8.2. Коэффициент Дарси при ламинарном напорном движении в трубе

Из (8.9) можно записать выражение для гидравлического уклона

$$J = \frac{h_{дл}}{l} = \frac{32\nu v}{gd^2}. \tag{8.9а}$$

Таблица 8.1

Форма сечения	$d_г$	A
Круг диаметром d	d	64
Квадрат со стороной a	a	57
Равносторонний треугольник со стороной a	$0{,}58a$	53
Кольцевой зазор размером a между соосными цилиндрами	$2a$	96
Прямоугольник со сторонами a и b:		
$a/b = 0{,}1$	$1{,}81a$	85
$a/b = 0{,}2$	$1{,}67a$	76
$a/b = 0{,}25$	$1{,}6a$	73
$a/b = 0{,}33$	$1{,}5a$	69
$a/b = 0{,}5$	$1{,}33a$	62

Тогда имеем

$$h_{дл} = \frac{32\nu l v}{g d^2}. \qquad (8.9б)$$

Учитывая, что общее выражение для потерь напора по длине труб (7.18а)

$$h_{дл} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

и приравняв его к (8.9б), получим

$$\frac{\lambda v^2}{d \cdot 2g} = \frac{32\nu v}{g d^2}.$$

Отсюда коэффициент Дарси

$$\lambda = \frac{64\nu}{vd}$$

или

$$\lambda = 64/\mathrm{Re}. \qquad (8.14)$$

Здесь число Рейнольдса $\mathrm{Re} = vd/\nu$.

Если выразить число Re через гидравлический радиус R, тогда

$$\lambda = 16/\mathrm{Re}_R. \qquad (8.15)$$

Потери напора по длине трубы круглого сечения при равномерном ламинарном движении пропорциональны средней скорости потока в первой степени. Это следует из (7.19), если подставить в эту формулу $\lambda = 64\ \nu/(vd)$ и $h_{дл}$ из (8.9б). Опытные данные подтверждают установленную зависимость $h_{дл}$ от v в первой степени.

При ламинарном режиме движения жидкости в трубах некруглого сечения коэффициент Дарси также зависит от числа Re^{-1},

но по сравнению с трубами круглого сечения изменяется численное значение коэффициента A в формуле

$$\lambda = A/\mathrm{Re}_{d_\Gamma},$$

где, как указывалось выше, $d_\Gamma = 4R$. Значения A для труб с разными формами поперечного сечения приводятся в табл. 8.1.

8.3. Линии тока и вихревые линии при ламинарном движении в круглой трубе

При установившемся ламинарном движении линии тока и траектории частиц совпадают, это — прямые, параллельные направлению движения.

Если направить ось OX вдоль оси трубы, то

$$u_x = \frac{gJ}{4\nu}\left[r_0^2 - r^2\right]; \quad u_y = 0; \quad u_z = 0,$$

где $r^2 = y^2 + z^2$.

Таким образом, единственная отличная от нуля проекция скорости не зависит от координаты x.

Найдем по (3.9) компоненты угловой скорости:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0; \\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = -\frac{gJ}{4\nu} z; \\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{gJ}{4\nu} y. \end{aligned}\right\} \qquad (8.16)$$

Дифференциальное уравнение вихревой линии (3.12)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\omega_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\omega_y} = \frac{\mathrm{d}z}{\omega_z}$$

после подставок в соответствии с (8.16) ω_y и ω_z примет вид

$$y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = 0,$$

а после интегрирования $y^2 + z^2 = C$.

Таким образом, вихревые линии в этом случае представляют собой концентрические окружности с центрами на оси трубы.

Угловая скорость частиц жидкости

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{gJ}{4\nu}\sqrt{z^2 + y^2} = \frac{gJ}{4\nu} r, \qquad (8.17)$$

или, учитывая, что по (8.9)

$$gJ/4\nu = 2v/r_0^2,$$

получим

$$\omega = 2vr/r_0^2. \qquad (8.18)$$

Угловая скорость частиц при ламинарном движении в трубе тем больше, чем больше средняя скорость и чем дальше расположена точка от оси трубы.

На оси ($r = 0$) $\omega = 0$, а у стенок

$$\omega_{max} = 2v/r_0. \tag{8.19}$$

Сопоставив (8.18) и (8.19), получим

$$\omega = \omega_{max} r/r_0, \tag{8.20}$$

т. е. эпюра угловых скоростей частиц аналогична эпюре касательных напряжений.

Б. ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ ДВИЖЕНИЯ

8.4. Логарифмический закон распределения осредненных скоростей в турбулентном потоке

Рассмотрим плоское равномерное турбулентное движение вдоль твердой границы в системе координат x, y, z. Направление оси OX совпадает с направлением линий тока осредненного движения, которые представляют собой параллельные прямые. Тогда $\bar{u}_x = \bar{u}_x(z)$; $\bar{u}_y = 0$; $\bar{u}_z = 0$ (см. § 6.5), где z — расстояние данной точки от стенки по нормали.

Согласно (6.9) касательное напряжение в турбулентном потоке

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}_x}{dz} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz}\right)^2.$$

Если поток сильно турбулизирован, то первый член пренебрежимо мал и тогда

$$\tau = \tau_{турб} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{dz}\right)^2.$$

Для вывода закона распределения скоростей при турбулентном движении сначала введем предположения относительно длины пути перемешивания l. Для определения длины пути перемешивания существует несколько формул, наиболее простой из них является формула Прандтля, согласно которой в безграничном потоке, движущемся вдоль плоской твердой стенки, $l = \varkappa z$, где $\varkappa$ — коэффициент, который обычно называют постоянной Кармана (см. ниже).

Измерения показывают, что вблизи стенки трубы при $\delta_в < z < \sim 0{,}1\ r_0$ можно принять $l = 0{,}4\ z$, где $\delta_в$ — толщина вязкого подслоя. Однако при удалении от стенки эта зависимость становится не соответствующей данным измерений и должна быть уточнена.

Примем по А. А. Саткевичу для трубы

$$l = \varkappa z \sqrt{1 - z/r_0}. \tag{8.21}$$

Согласно (8.21) l приобретает наибольшее значение при $z = \frac{2}{3} r_0$, а на стенке и на оси трубы длина перемешивания $l = 0$.

Численные значения коэффициента $\varkappa$ зависят от числа Re, коэффициент $\varkappa$ изменяется при переходе от одних точек к другим в пределах живого сечения. Если поток взвесенесущий или аэрированный, то $\varkappa$ зависит от концентрации твердых частиц или воздуха в жидкости: с увеличением концентрации наносов и воздуха $\varkappa$ уменьшается.

Для турбулентных потоков в трубах $\varkappa$ приближенно можно принять равным 0,4. Это значение получено Никурадзе по данным опытов при турбулентном режиме движения в круглых цилиндрических трубах с искусственно созданной равнозернистой шероховатостью. Для зоны живого сечения, в которой можно вследствие интенсивного перемешивания пренебречь чисто вязкостными напряжениями, т. е. в турбулентном ядре, можно принимать по (6.8)

$$\tau_{\text{турб}} = \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)^2.$$

Здесь и далее обозначаем $\bar{u}_x = u$.

Подставив в эту формулу значение l из (8.21), получим

$$\tau_{\text{турб}} = \rho \varkappa^2 z^2 \left(1 - \frac{z}{r_0}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)^2.$$

Так как по (7.33) $\tau = \tau_0\ (1 - z/r_0)$, то

$$\tau_{0\,\text{турб}} = \rho \varkappa^2 z^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)^2.$$

Но по (7.30) $\tau_0/\rho = u_*^2$, и тогда

$$\mathrm{d}u = \frac{u_*}{\varkappa}\frac{\mathrm{d}z}{z}. \qquad (8.22)$$

Здесь можно принять $\varkappa$ не зависящим от местоположения рассматриваемой точки по отношению к стенке трубы, т. е. от z. Тогда, вынеся $u_*/\varkappa$ за знак интеграла, получим

$$u = \frac{u_*}{\varkappa} \ln z + \text{const}, \qquad (8.23)$$

т. е. логарифмический закон распределения скоростей в турбулентном потоке.

Отметим, что хотя измерение длины пути перемешивания l нельзя осуществить, можно сопоставить измеренные в опыте значения скоростей (это легко сделать) с вычисленными по формуле распределения скоростей. Их полное или удовлетворительное совпадение будет свидетельствовать о правильности принятой формулы для l как функции z (т. е. в зависимости от удаления от стенки).

Логарифмический закон распределения скоростей вполне удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными для труб и открытых потоков, за исключением области вблизи стенок. Это и понятно, так как формула (6.8), на основе которой получена

формула (8.23), соответствует условиям, имеющимся при развитой турбулентности, т. е. в ядре турбулентного потока. В пристенной области нельзя пренебречь вязкостными напряжениями, ибо здесь касательные напряжения должны определяться по (6.9).

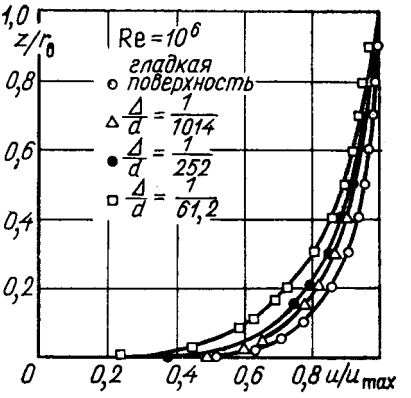


Рис. 8.3

При турбулентном движении перемешивание частиц жидкости и происходящий при этом обмен количеством движения приводят к выравниванию осредненных скоростей в различных точках живого сечения. Особенно это заметно при сравнении распределения осредненных скоростей в трубе при ламинарном (рис. 8.1) и турбулентном (рис. 8.3) движении. При ламинарном движении $v/u_{max} = 0{,}5$, а при турбулентном движении это отношение переменное и увеличивается с увеличением числа Рейнольдса.

Для распределения местных осредненных скоростей по сечению турбулентного потока применяется формула

$$\frac{u}{u_{\max}} = \eta^{1/m},$$

где $\eta = z/h$ или $\eta = z/r_0$ — относительное расстояние от дна открытого потока или стенки трубы.

Хотя эта формула менее точна, чем логарифмическая (8.23), ее иногда применяют для описания осредненных скоростей на достаточном удалении от стенки трубы или дна. Показатель $1/m$ зависит от значений $\varkappa$ и коэффициента Дарси λ. В экспериментах было найдено, что показатель степени $1/m$ в трубах зависит от числа Re и уменьшается от 1/6 при $Re = 4 \cdot 10^3$ до 1/10 при $Re = 3{,}2 \cdot 10^6$.

8.5. Связь между местной, средней и максимальной скоростями в трубах

Установим связи между местной, средней и максимальной осредненными скоростями при турбулентном режиме движения жидкости в трубе в виде безразмерных отношений $(u_{max} - u)/u_*$, $(u_{max} - v)/u_*$, $(v - u)/u_*$. Такие выражения называются относительными дефицитами скорости.

Относительный дефицит местной скорости от максимальной $(u_{max} - u)/u_*$ определим, найдя сначала u_{max} из (8.23) при $z = r_0$.

Тогда

$$\frac{u_{max} - u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{r_0}{z}. \qquad (8.24)$$

Перейдя к десятичным логарифмам, получим

$$\frac{u_{max}-u}{u_*}=\frac{2{,}3}{\varkappa}\lg\frac{r_0}{z}$$

или

$$\frac{u_{max}-u}{u_*}=A'\lg\frac{r_0}{z},$$

где $A'=2{,}3/\varkappa$.

При $\varkappa=0{,}4$ $A'=5{,}75$, тогда

$$\frac{u_{max}-u}{u_*}=5{,}75\lg\frac{r_0}{z}.$$

Относительный дефицит средней скорости от максимальной. Найдем расход в круглой трубе, записав его сначала в виде расхода через кольцо толщиной $\mathrm{d}r$, отстоящее от оси на расстоянии r ($\mathrm{d}Q=u\,\mathrm{d}\omega$), а затем проинтегрировав по площади живого сечения:

$$Q=\int u\,\mathrm{d}\omega=\int_0^{r_0}u2\pi r\,\mathrm{d}r.$$

Заменяя $r=r_0-z$ и интегрируя от 0 до r_0, т. е. по всему сечению, подставив из (8.24)

$$u=u_{max}-\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{r_0}{z},$$

получим

$$Q=2\pi\int_0^{r_0}\left(u_{max}-\frac{u_*}{\varkappa}\ln\frac{z_0}{z}\right)(r_0-z)\,\mathrm{d}z=\pi r_0^2\left(u_{max}-\frac{3}{2\varkappa}u^*\right).$$

Тогда

$$v=\frac{Q}{\omega}=u_{max}-\frac{3}{2\varkappa}u_*.$$

При постоянном $\varkappa$ значение сомножителя $3/(2\varkappa)$ также является постоянным и обозначается $D=3/(2\varkappa)$.

Относительный дефицит средней скорости от максимальной имеет постоянное значение, равное

$$\frac{u_{max}-v}{u_*}=\frac{3}{2\varkappa}=D. \qquad (8.25)$$

Относительная максимальная скорость определяется как

$$\frac{u_{max}}{u_*}=\frac{v}{u_*}+D$$

или с учетом (7.24), где $v/u_*=\sqrt{8/\lambda}$,

$$\frac{u_{max}}{u_*}=\sqrt{8/\lambda}+D.$$

Относительный дефицит местной скорости от средней найдем, использовав полученное по (8.25) $u_{max} = v + Du_*$ и подставив это выражение в (8.24):

$$\frac{v-u}{u_*} = \frac{2{,}3}{\varkappa} \lg \frac{r_0}{z} - D.$$

При $\varkappa = 0{,}4$ имеем $D = 3{,}75$ и

$$\frac{v-u}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{r_0}{z} - 3{,}75.$$

Для того чтобы найти относительную местную скорость u/v, преобразуем

$$\frac{v-u}{u_*} = \frac{v}{u^*}\left(1 - \frac{u}{v}\right) = \frac{2{,}3}{\varkappa} \lg \frac{r_0}{z} - D$$

и получим

$$1 - \frac{u}{v} = \frac{u_*}{v}\left(\frac{2{,}3}{\varkappa} \lg \frac{r_0}{z} - D\right).$$

Подставляя по (7.24) $u_*/v = \sqrt{\lambda/8}$, получаем

$$\frac{u}{v} = 1 + \sqrt{\frac{\lambda}{8}}\left(D - A' \lg \frac{r_0}{z}\right).$$

Приняв, как и ранее, $\varkappa = 0{,}4$, получим

$$\frac{u}{v} = 1 + \sqrt{\lambda}\left(1{,}33 - 2{,}03 \lg \frac{r_0}{z}\right). \qquad (8.26)$$

На оси трубы

$$\frac{u_{max}}{v} = 1 + 1{,}33\sqrt{\lambda}.$$

При $u/v = 1$ (8.26) принимает вид

$$\sqrt{\lambda}\left(1{,}33 - 2{,}03 \lg \frac{r_0}{z_v}\right) = 0,$$

где z_v — расстояние от стенки трубы до точки, в которой $u = v$. Поскольку $\sqrt{\lambda} \neq 0$, то $z_v = 0{,}223\ r_0$.

Опыты Ф. А. Шевелева показали, что в трубопроводах промышленного изготовления расстояние от стенки трубы до точки, где местная скорость равна средней скорости ($u = v$), $z_v \approx 0{,}24\ r_0$, в трубах из гидрофобного материала это расстояние меньше.

Коэффициенты кинетической энергии (коэффициент Кориолиса) α и количества движения (коэффициент Буссинеска) α' для

турбулентного движения. Из выражений соответственно (5.16) и (5.28)

$$\alpha = \frac{1}{\omega}\int_{\omega}\left(\frac{u}{v}\right)^3 d\omega;$$

$$\alpha' = \frac{1}{\omega}\int_{\omega}\left(\frac{u}{v}\right)^2 d\omega,$$

с учетом (8.26) при $\varkappa = 0{,}4$ и $D = 3{,}75$ нами были получены уравнения

$$\alpha = 1 + 2{,}97\lambda - 1{,}48\lambda^{1{,}5};$$

$$\alpha' = 1 + 0{,}976\lambda \approx 1 + \lambda.$$

Для λ, найденного из $C = \sqrt{8g/\lambda}$ ($g = 9{,}81$ м/с^2), эти уравнения имеют вид

$$\alpha = 1 + \left(\frac{15{,}26}{C}\right)^2 - \left(\frac{10{,}1}{C}\right)^3;$$

$$\alpha' = 1 + \left(\frac{8{,}86}{C}\right)^2.$$

8.6. Гидравлически гладкие и шероховатые трубы (русла). Толщина вязкого подслоя

Шероховатость поверхности водотоков (труб, каналов и т. д.) может быть весьма различной Если поверхность труб и открытых лотков покрывается специально отсортированными зернами песка одной крупности, получается равнозернистая шероховатость (рис. 8.4, *а*). Она используется только в лабораторных исследованиях.

Поверхность труб и открытых водотоков обычно неравнозерни-

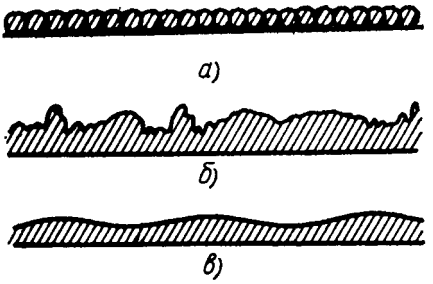


Рис. 8.4

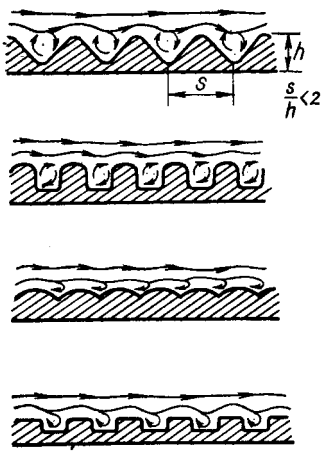


Рис. 8.5

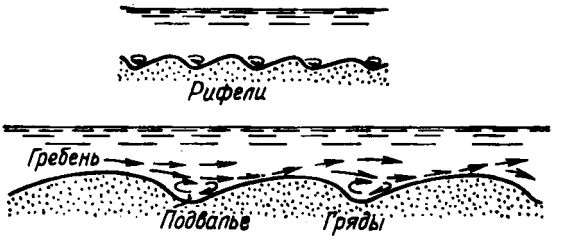


Рис. 8.6

стая, она может быть волнистой с различными высотами и длинами волн (или микроволн) (рис. 8.4, *б*, *в*).

В трубах помимо выступов с неодинаковыми размерами и формой может быть и регулярная шероховатость, обусловленная технологией изготовления и назначением труб (например, гофрированные трубы, рис. 8.5).

Синтетические гофрированные дренажные трубы различаются по очертаниям гофров и относительному расстоянию s/h между вершинами гофров (рис. 8.5). В синтетических негофрированных трубах отношение длины микроволн к их высоте составляет от 15 до 35.

В водотоках, проходящих в песчаных несвязных грунтах, на дне (иногда и на откосах) образуются различные формы рельефа (гряды — более крупные образования, рифели — более мелкие, рис. 8.6). Поверхность этих форм покрыта зернами песка.

Могут быть и другие виды шероховатости с выступами различных размеров по всем трем координатам. Взаимное расположение элементов шероховатости также может быть весьма различным.

Учет конкретных особенностей шероховатости необходим в гидравлических исследованиях и расчетах.

Наиболее полные сведения о шероховатости, размерах выступов и их взаимном расположении дает статистическое описание.

Понятие о гидравлически гладких и гидравлически шероховатых трубах (руслах). В качестве характеристики шероховатости выбирают некоторую среднюю высоту выступов шероховатости Δ.

Соотношение между высотой выступов идеализированной шероховатости Δ и толщиной вязкого подслоя $\delta_в$ определяет структуру потока.

Если высота выступов шероховатости Δ меньше, чем толщина вязкого подслоя $\delta_в$, все неровности полностью погружены в этот подслой и жидкость в пределах этого подслоя плавно обтекает выступы шероховатости. В этом случае шероховатость стенок не влияет на характер движения и соответственно потери напора не зависят от шероховатости. Такие стенки и трубы (или русла) ус-

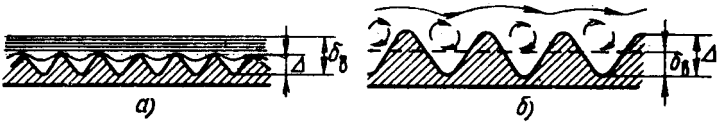


Рис. 8.7

ловно называются гидравлически гладкими (рис. 8.7, *а*).

Если высота выступов шероховатости Δ превышает толщину вязкого подслоя $\delta_в$, неровности стенок выходят в пределы турбулентного ядра, поток обтекает выступы с отрывом, сопровождающимся интенсивным перемешиванием частиц. В этом случае потери напора зависят от шероховатости, и такие трубы (или русла) называются гидравлически шероховатыми (рис. 8.7, *б*). В третьем случае, являющемся промежуточным между двумя вышеуказанными, абсолютная высота выступов шероховатости примерно равна толщине вязкого подслоя.

Толщина вязкого подслоя. Так как толщина вязкого подслоя $\delta_в$ мала, то градиент скорости в этом подслое можно принять равным $u_в/\delta_в$ ($u_в$ — осредненная продольная составляющая скорости на внешней границе вязкого подслоя). Тогда касательное напряжение на стенке трубы равно

$$\tau_0 = \mu \frac{\mathrm{d}\, u_x}{\mathrm{d}\, y} = \mu \frac{u_в}{\delta_в} = \rho\nu \frac{u_в}{\delta_в}$$

или

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\nu u_в}{\delta_в}. \qquad (8.27)$$

Так как по (7.30) $\tau_0/\rho = u_*^2$, то из (8.27) найдем

$$u_*^2 = \nu u_в/\delta_в.$$

Отсюда

$$\frac{u_*\delta_в}{\nu} = \frac{u_в}{u_*}. \qquad (8.28)$$

В (8.28) обе части — безразмерные, В левой части — безразмерный комплекс $u_*\delta_в/\nu$, аналогичный по структуре числу Рейнольдса и обычно обозначаемый символом N. Приближенно можно считать, что N имеет постоянное значение. Тогда из (8.28) имеем

$$\frac{u_в}{u_*} = \frac{u_*\delta_в}{\nu} = N = \text{const}. \qquad (8.29)$$

Из (8.29) получим значение скорости на внешней границе вязкого подслоя

$$u_в = Nu_*. \tag{8.30}$$

и толщину вязкого подслоя

$$\delta_в = N\nu/u_*. \tag{8.31}$$

Экспериментально найдено, что $N \approx 11{,}6$.

Найдем расчетную формулу для толщины вязкого подслоя $\delta_в$. Для этого обе части (8.31) разделим на диаметр трубы d и преобразуем:

$$\frac{\delta_в}{d} = N\frac{\nu}{dv}\frac{v}{u_*} = \frac{N}{\mathrm{Re}}\frac{v}{u_*}. \tag{8.32}$$

Подставив в (8.32) выражение относительной средней скорости (7.24) $v/u_* = \sqrt{8/\lambda}$, получим

$$\frac{\delta_в}{d} = \frac{N\sqrt{8}}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}.$$

Окончательно толщину вязкого подслоя найдем в виде

$$\delta_в \approx \frac{30d}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}. \tag{8.33}$$

Таким образом, с ростом числа Re, а также коэффициента Дарси λ толщина вязкого подслоя $\delta_в$ уменьшается.

Исследования структуры потока вблизи стенки трубы, выполнявшиеся с помощью специальной контрольно-измерительной аппаратуры, показали, что толщина вязкого подслоя $\delta_в$ имеет пульсирующее значение, т. е. значение $N = u_*\delta_в/\nu$ изменяется во времени от 2,3 до 18 (среднее значение $N \approx 11{,}6$). Таким образом, $\delta_в$ изменяется во времени от $\frac{6{,}5d}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}$ до $\frac{51d}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}$. В практических расчетах это обстоятельство можно не учитывать и принимать по (8.33).

Разделение стенок (трубы, русла) на гидравлически гладкие и шероховатые является условным, поскольку, как следует из формулы (8.33), толщина $\delta_в$ обратно пропорциональна числу Re. Таким образом, при движении жидкости вдоль одной и той же поверхности с неизменной высотой выступа шероховатости в зависимости от числа Рейнольдса толщина вязкого подслоя может изменяться. При увеличении числа Re толщина $\delta_в$ уменьшается и стенка, бывшая гидравлически гладкой, может стать шероховатой, так как высота выступов шероховатости окажется больше толщины вязкого подслоя и шероховатость станет влиять на характер движения и, следовательно, на потери напора.

8.7. Экспериментальное изучение коэффициента Дарси

Важные экспериментальные исследования, посвященные изучению зависимости коэффициента Дарси λ от числа Re и относительной шероховатости, были проведены Никурадзе для шероховатых труб и Зегждой для прямоугольных шероховатых лотков (открытые потоки). Стенки труб и лотков имели специально созданную равнозернистую шероховатость. Для создания этой шероховатости сначала через калиброванные отверстия отсеивался песок определенных размеров, который затем равномерно наносился на стенки, предварительно покрытые слоем лака, благодаря чему песок приклеивался к стенкам. Размеры зерен песка принимались за размер выступа шероховатости Δ. В результате были получены трубы и лотки с различными значениями относительной шероховатости стенок Δ/r_0 или Δ/d для труб и Δ/R для лотков (или относительной гладкости r_0/Δ, d/Δ и R/Δ, как показано на рис. 8.8 и 8.9). В опытах были измерены потери напора и расход, вычислены средние скорости потоков и коэффициенты λ. Результаты Никурадзе показаны на рис. 8.8, Зегжды — на рис. 8.9. По оси абсцисс отложены значения lg Re и по оси ординат — lg (100λ). Представление опытных данных в таких координатах позволяет по углу наклона прямых (в частности, *I* и *II*) получить показатель степени в степенной зависимости λ от Re.

Все опытные точки, полученные Никурадзе, до lg Re = 3,35 (Re < 2300, ламинарный режим движения) независимо от шероховатости стенок труб располагаются на прямой. Это значит, что при ламинарном движении λ не зависит от шероховатости трубы. При Re = 2300 ÷ 3000 (lg Re = 3,35 ÷ 3,5) происходит переход от ламинарного режима движения к турбулентному. В опытах Никурадзе в пределах 2300 < Re < 4000 коэффициент λ по-прежнему не зависит от шероховатости. При турбулентном движении

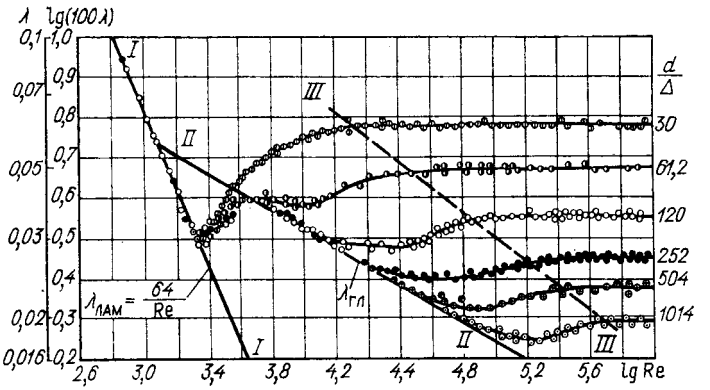


Рис. 8.8

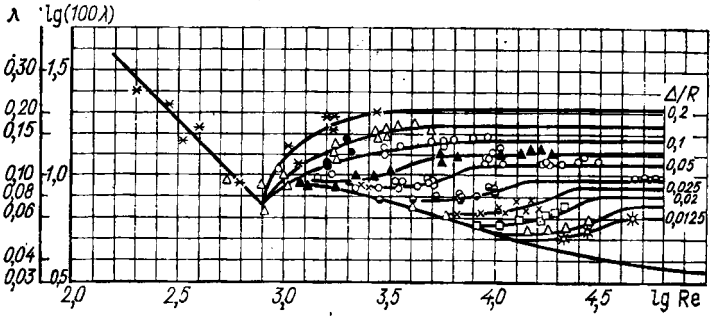


Рис. 8.9

и $Re > 4000$ характер экспериментальных кривых различен в зависимости от значения d/Δ. При больших относительных шероховатостях ($d/\Delta = 30$) экспериментальная кривая сначала продолжает подниматься, а затем при $Re \approx 3 \cdot 10^4$ становится горизонтальной. При меньших относительных шероховатостях кривые ведут себя иначе: сначала независимо от относительной шероховатости экспериментальные точки ложатся на прямую *II*. Затем по достижении $Re \gtrsim 20d/\Delta$ эти точки на графике рис. 8.8 отходят от прямой *II*, образуют впадину и при $Re \gtrsim 500\ d/\Delta$ превращаются в горизонтальные прямые.

При некотором значении Re (тем меньшем, чем больше относительная шероховатость) коэффициент λ перестает зависеть от числа Re.

Отметим, что при турбулентном режиме движения коэффициент λ тем больше, чем больше относительная шероховатость, при одних и тех же значениях Re.

Таким образом, исследования, выполненные Никурадзе, наглядно свидетельствуют о наличии различных областей сопротивления при напорном движении в трубах:

1-я область — ламинарный режим движения $\lambda_{лам} = f(Re)$, прямая *I* на рис. 8.8, т. е. $\lambda_{лам} = f(Re^{-1})$;

2-я область — переход от ламинарного к турбулентному режиму, небольшой диапазон чисел Рейнольдса от 2300 до 3000—4000;

3-я область — турбулентный режим, гидравлически гладкие трубы, $\lambda_{гл} = f(Re^{-0,25})$, прямая *II* на рис. 8.8;

4-я — турбулентный режим (переходная область между областью гидравлически гладких труб и квадратичной областью), $\lambda_{пер} = f(Re, \Delta/d)$ — между линиями *II* и *III* на рис. 8.8;

5-я область — турбулентный режим, квадратичная область сопротивления, $\lambda_{кв} = f(\Delta/d)$, $\lambda_{кв} \neq f(Re)$ — правее линии *III* на рис. 8.8 (т. е. при числах Re, бо́льших $Re_{кв}$).

Название «квадратичная область сопротивления» указывает, что так как в этой области коэффициент λ не зависит от числа Re, то потери напора по длине по (7.18) зависят от квадрата средней скорости. В таком случае говорят также, что имеет место автомодельность по числу Рейнольдса, т. е. независимость λ от Re (правее линии *III* на рис. 8.8).

Опыты в лотках, выполненные Зегждой (рис. 8.9), показали, что и в открытых потоках имеются те же области сопротивления, что и в трубах; сохраняются те же закономерности, что и установленные опытами Никурадзе, но требующие уточнения.

8.8. Распределение осредненных скоростей и коэффициенты Дарси в гидравлически гладких трубах

Распределение осредненных скоростей. Найдем выражение для распределения скоростей в гидравлически гладких трубах, используя (8.23)

$$u = \frac{u_*}{\varkappa} \ln z + C.$$

Для определения постоянной C применим (8.23) к точке на внешней границе вязкого подслоя, где $z = \delta_в$; $u_в = Nu_*$. Тогда

$$u_в = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \delta_в + C. \tag{8.34}$$

Учитывая, что $\delta_в = N\nu/u_*$, можно записать

$$C = Nu_* - \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{N\nu}{u_*} = u_* \left(N - \frac{1}{\varkappa} \ln N \right) - \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{\nu}{u_*}.$$

Подставив это выражение в (8.34), получим для относительной местной скорости в гидравлически гладких трубах (при $\varkappa = 0{,}4$ и $N = 11{,}6$)

$$\frac{u}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{u_* z}{\nu} + 5{,}5. \tag{8.35}$$

В гидравлически гладких трубах с увеличением числа Re эпюра скоростей становится все более «наполненной» (рис. 8.4, табл. 8.2).

Таблица 8.2

Re	v/u_{max}	u_{max}/v
10^4	0,8	1,25
10^5	0,845	1,183
10^6	0,87	1,149
10^7	0,89	1,124
$4 \cdot 10^8$	0,9	1,111

Коэффициенты Дарси λ в гидравлически гладких трубах. Для определения коэффициента λ можно применить либо формулу логарифмического распределения скоростей в гидравлически гладких трубах (8.23) к точке на оси трубы ($u = u_{max}$, $z = r_0$), либо формулу дефицита местной скорости от максимальной (8.24) к границе вязкого подслоя ($z = \delta_в = N\nu/u_*$; $u = u_в = Nu_*$). Результат (формула для u_{max}/u_*) будет одним и тем же.

Определим коэффициент Дарси по первому способу, использовав выражения (8.25) и (8.35). Из (8.35) при $z = r_0$ получим

$$\frac{u_{max}}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{u_* r_0}{\nu} + 5{,}5.$$

Подставляя u_{max} в выражение для дефицита D и учитывая, что $D = 5{,}75$, получаем

$$\frac{v}{u_*} = \frac{u_{max}}{u_*} - D = 5{,}75 \lg \frac{u_* r_0}{\nu} + 1{,}75.$$

Вспомнив, что по (7.24) $v/u_* = \sqrt{8/\lambda}$, и заменив u_* под знаком логарифма на $v\sqrt{\lambda/8}$, а r_0 — на $d/2$, получим

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 5{,}75 \lg \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \frac{vd}{\nu} + 1{,}75. \qquad (8.36)$$

После вычислений

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}03 \lg \mathrm{Re}\sqrt{\lambda} - 0{,}91.$$

Для гидравлически гладких труб $\lambda_{гл}$ следует принимать по (8.36) с изменениями в соответствии с опытными данными

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{гл}}} = 2 \lg \mathrm{Re}\sqrt{\lambda_{гл}} - 0{,}8 \qquad (8.37)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{гл}}} = 2 \lg \frac{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda_{гл}}}{2{,}51}. \qquad (8.37а)$$

В формуле (8.37) связь $\lambda_{гл}$ и Re дана в неявном виде; удобнее формулы, в которых представлена явная зависимость $\lambda_{гл}$ от Re.

Предложенная в 1913 г. Блазиусом формула для $\lambda_{гл}$ имеет вид

$$\lambda_{гл} = \frac{0{,}3164}{\mathrm{Re}^{0{,}25}}, \qquad (8.38)$$

где $\mathrm{Re} = vd/\nu$.

Эта формула при $4000 < \mathrm{Re} < 10^5$ дает результаты, хорошо совпадающие с опытными данными. Подставив (8.38) в (7.19), по-

лучим, что для гидравлически гладких труб потери напора по длине пропорциональны средней скорости в степени 1,75.

Формула Колбрука имеет вид

$$\lambda_{гл} = \frac{1}{\left(1{,}8 \lg \frac{\mathrm{Re}}{7}\right)^2}.$$

8.9. Распределение осредненных скоростей и коэффициент Дарси в гидравлически шероховатых трубах. Переходная область

Распределение осредненных скоростей. Применим вновь формулу (8.23) к точке на уровне высоты выступов шероховатости Δ:

$$u = \frac{u_*}{\varkappa} \ln z + u_\Delta - \frac{u_*}{\varkappa} \ln \Delta = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{z}{\Delta} + u_\Delta.$$

Так как касательное напряжение на стенке определяется отнесенным к единице площади суммарным сопротивлением выступов шероховатости, т. е. пропорционально ему, то $\tau_0 \approx \rho u_\Delta^2$. Тогда $\tau_0/\rho = u_*^2 \sim u_\Delta^2$ или $u_\Delta \sim u_*$, т. е $u_\Delta = \beta u_*$, где β — коэффициент пропорциональности.

Теперь имеем

$$u = \frac{u_*}{\varkappa} \ln \frac{z}{\Delta} + \beta u_*.$$

Выражение для относительной местной скорости в гидравлически шероховатых трубах имеет вид

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{z}{\Delta} + \beta. \qquad (8.39)$$

И вновь, переходя к десятичным логарифмам, при $\varkappa = 0{,}4$ имеем $A' = 2{,}3/\varkappa = 5{,}75$:

$$\frac{u}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{z}{\Delta} + \beta. \qquad (8.40)$$

Теоретические и экспериментальные результаты показывают, что β не зависит от числа Рейнольдса потока $\mathrm{Re} = vd/\nu$, но может быть функцией числа Рейнольдса в виде $u_*\Delta/\nu$.

Для относительной максимальной скорости в гидравлически шероховатых трубах имеем

$$\frac{u_{max}}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{r_0}{\Delta} + \beta. \qquad (8.41)$$

Для гидравлически гладких и шероховатых труб относительный дефицит местной скорости от максимальной (8.24) зависит только от относительного расстояния от стенки трубы.

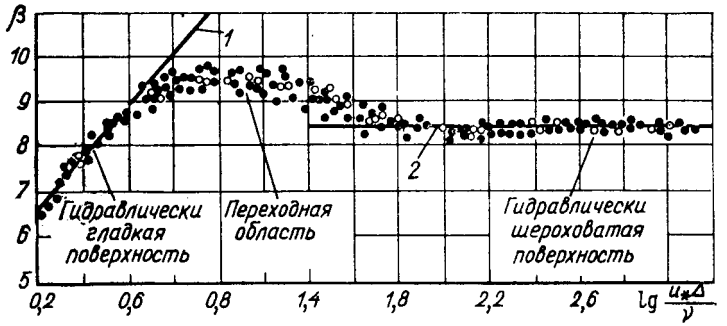


Рис. 8.10

Характер изменения β в зависимости от $u_*\Delta/\nu$ становится ясным, если рассмотреть полученные в опытах Никурадзе данные (рис. 8.10).

При $u_*\Delta/\nu \leqslant 3{,}5$, т. е. при $\lg(u_*\Delta/\nu) \leqslant 0{,}55$, движение происходит при режиме без проявления шероховатости, т. е. трубы являются гидравлически гладкими (рис. 8.10, линия *1*). Коэффициент Дарси λ зависит только от числа Рейнольдса Re.

При $u_*\Delta/\nu > 7$, т. е. при $\lg(u_*\Delta/\nu) > 1{,}85$, происходит движение при полном проявлении шероховатости, т. е. в гидравлически шероховатых трубах. Коэффициент Дарси λ зависит только от относительной шероховатости (рис. 8.10, линия *2*).

При равнозернистой шероховатости, как это видно из рис. 8.10 при $u_*\Delta/\nu > 70$, коэффициент β остается неизменным, $\beta = 8{,}5$. При полном проявлении шероховатости (гидравлически шероховатые трубы и русла)

$$\frac{u}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{z}{\Delta} + 8{,}5 \qquad (8.40a)$$

и максимальная скорость на оси трубы

$$\frac{u_{max}}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{r_0}{\Delta} + 8{,}5 \qquad (8.41a)$$

В гидравлически шероховатых трубах при одном и том же значении числа Рейнольдса с увеличением относительной шероховатости эпюра осредненных продольных составляющих скорости становится менее заполненной (рис. 8.11).

Характеристики пульсаций скорости в турбулентном потоке в трубах. Измерения в гидравлически гладких и шероховатых трубах показали, что относительный стандарт пульсационной продольной составляющей скорости турбулентного потока σ_{u_x}/u_* при удалении от стенки трубы независимо от относительной шероховатости (при $\Delta/d < 0{,}06$) из-

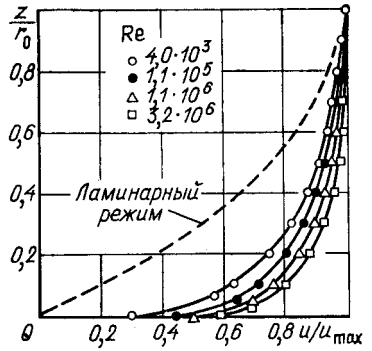


Рис. 8.11

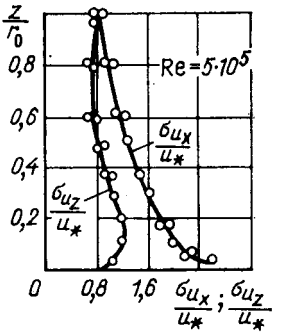


Рис. 8.12

меняется приблизительно одинаково; σ_{u_x}/u_* зависит от относительного расстояния данной точки от стенки трубы. Максимальное значение $\sigma_{u_*} \approx 2{,}6\ u_*$ наблюдается на расстоянии от стенки $z = (0{,}01 \div 0{,}015)\ r_0$ (рис. 8.12). Далее по направлению к оси трубы σ_{u_x} уменьшается примерно до $0{,}8\ u_*$ на оси трубы.

Относительный стандарт пульсационной радиальной составляющей скорости σ_{u_z} также не зависит от шероховатости. При $z = 0{,}1\ r_0$ наблюдается максимальное значение $\sigma_{u_z} = 1{,}1\ u_*$, к оси трубы σ_{u_z} также уменьшается. На оси трубы $\sigma_{u_z} \approx 0{,}8\ u_*$.

Коэффициент Дарси λ в гидравлически шероховатых трубах. Вновь, как и для гладких труб, найдем относительную среднюю скорость v/u_* из (8.25) с учетом (8.41) и (8.41а):

$$\frac{v}{u_*} = \frac{u_{max} - D}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{r_0}{\Delta} + \beta - D.$$

Для гидравлически шероховатых труб, так как $\beta = 8{,}5$, а $D = 3{,}75$,

$$\frac{v}{u_*} = 5{,}75 \lg \frac{r_0}{\Delta} + 4{,}75. \qquad (8.42)$$

Заменив $v/u_* = \sqrt{8/\lambda}$ и произведя вычисления, получим для гидравлически шероховатых труб (индекс «кв» обозначает «квадратичная область сопротивления»)

$$\lambda_{кв} = \frac{1}{\left(a \lg \frac{AR}{\Delta}\right)^2}, \qquad (8.43)$$

где $a = 2{,}3/\varkappa \sqrt{8}$; A — параметр, отражающий особенности данного вида шероховатости: для труб с равнозернистой шероховатостью стенок по Никурадзе $a = 2$; $A = 14{,}8$.

Как видно, коэффициент Дарси для гидравлически шероховатых труб и русл зависит лишь от относительной шероховатости. Следовательно, подтверждается зависимость потерь удельной энергии (напора) по длине от квадрата средней скорости (квадратичная область сопротивления).

Для равнозернистой шероховатости формула (8.43) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{кв}}} = -2\lg\frac{3{,}7d}{\Delta} = -2\lg 0{,}27\frac{\Delta}{d}. \qquad (8.43а)$$

Это формула Прандтля — Никурадзе для гидравлически шероховатых труб.

Коэффициент Дарси λ в переходной области (равнозернистая шероховатость). Переходная область сопротивления при турбулентном движении соответствует случаям, когда высота выступов шероховатости стенок Δ имеет тот же порядок, что и толщина вязкого подслоя $\delta_в$. В этой области коэффициент Дарси λ зависит и от числа Рейнольдса, и от относительной шероховатости, т. е.

$$\lambda_{пер} = f(\mathrm{Re},\ \Delta/d).$$

Для труб с равнозернистой шероховатостью при турбулентном движении в переходной области (от гидравлически гладких к гидравлически шероховатым трубам) коэффициент $\lambda_{пер}$ меньше, чем $\lambda_{кв}$ в квадратичной области для труб с одной и той же относительной шероховатостью.

Колбрук и Уайт (1939 г.) предложили формулу для $\lambda_{пер}$ в переходной области, объединив формулы для λ гидравлически гладких и шероховатых труб:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{пер}}} = -2\lg\left(\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda_{пер}}} + 0{,}27\frac{\Delta}{d}\right). \qquad (8.44)$$

При больших значениях числа Re влияние первого члена становится весьма малым и формула превращается в формулу для гидравлически шероховатых труб (8.43а) для $\lambda_{кв}$ (в квадратичной области сопротивления).

Для гидравлически гладких труб второй член выпадает и формула (8.44) принимает вид (8.37).

Границы областей сопротивления при турбулентном движении (равнозернистая шероховатость). Как уже указывалось, при турбулентном режиме движения в трубах с равнозернистой шероховатостью стенок существуют три области сопротивления.

1. При $u_*\Delta/\nu < 3{,}5$ — область гидравлически гладких труб.

Умножая $u_*\Delta/\nu$ на d/d и учитывая, что $u_* = v\sqrt{\lambda/8}$, получаем

$$\frac{v\sqrt{\lambda}\,\Delta d}{\sqrt{8}\,\nu d} < 3{,}5 \quad \text{или} \quad \mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\,\frac{\Delta}{d} < 10.$$

Приняв по формуле Блазиуса

$$\lambda_{гл} = 0{,}3164/\mathrm{Re}^{0{,}25},$$

получим для числа Рейнольдса, определяющего конец области гидравлически гладких труб,

$$\mathrm{Re}_{к.\,гл} = 27\,(d/\Delta)^{8{,}7}. \tag{8.45}$$

2. При $\lg\frac{u_*\Delta}{\nu} > 1{,}85$ или $u_*\Delta/\nu > 70$ — квадратичная область.

Начало квадратичной области характеризуется числом Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_{кв} = 22{,}3Cd/\Delta, \tag{8.46}$$

где коэффициент Шези

$$C = \sqrt{8g/\lambda}.$$

3. При

$$27\,(d/\Delta)^{8/7} < \mathrm{Re} < 22{,}3Cd/\Delta.$$

— переходная область.

Указанные границы областей сопротивления получены по опытным данным для труб с равнозернистой шероховатостью и соответствуют только этим условиям. Для других видов шероховатостей значения критериев, соответствующих границам областей сопротивления, будут иными.

8.10. Коэффициенты Дарси для труб с естественной технической шероховатостью

Материал, из которого изготовлена труба, и технология ее изготовления существенно влияют на состояние ее внутренней поверхности, а следовательно, на значения эквивалентной шероховатости и вид зависимости $\lambda = f(\mathrm{Re})$.

Естественная техническая шероховатость (см. рис. 8.4, *б*), образующаяся при изготовлении труб и в результате различных изменений в процессе эксплуатации, не является равнозернистой песочной шероховатостью, влияние которой на вид эпюр скорости и сопротивление труб исследовал Никурадзе. Выступы технической шероховатости имеют неодинаковые высоту, форму и плотность распределения по поверхности трубы. В настоящее время техническая шероховатость оценивается некоторой средней высотой $\Delta_э$ выступов, называемой эквивалентной шероховатостью.

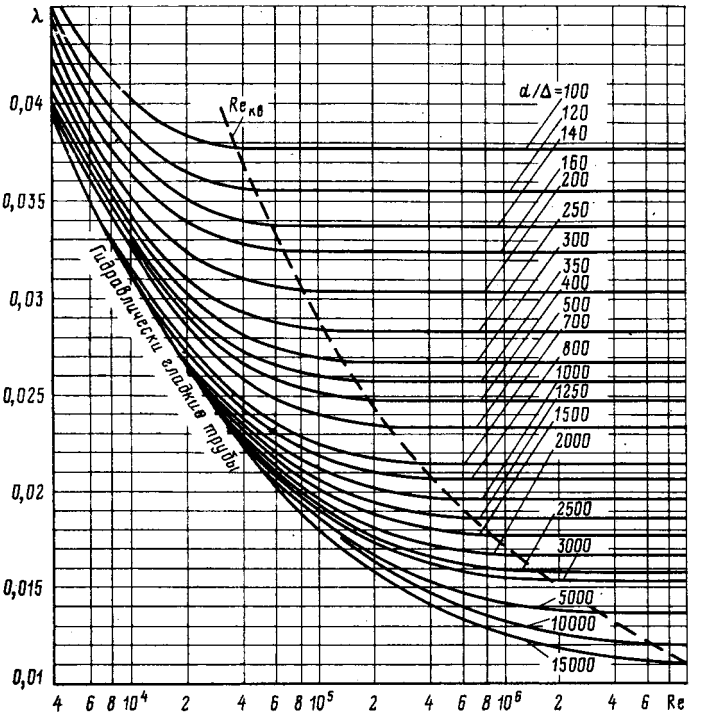


Рис. 8.13

Под эквивалентной шероховатостью понимают высоту выступов равнозернистой шероховатости из однородного песка, при которой в квадратичной области сопротивления получается такое же значение λ, что и в рассматриваемой трубе. Определяют эквивалентную равнозернистую шероховатость трубы следующим образом. Опытным путем определяют λ при различных Re и строят график $\lambda = f(\mathrm{Re})$, который сравнивают с графиками Никурадзе. Исследуемой трубе приписывают относительную шероховатость, равную относительной шероховатости той трубы в опытах Никурадзе, для которой в квадратичной области график совпадает с графиком исследуемой.

Для вычисления $\Delta_э$ можно воспользоваться формулой (8.43а), откуда имеем

$$\lg \Delta_э = \lg d + 0{,}57 - 1/2\sqrt{\lambda_{кв}}.$$

В связи с отмеченными особенностями технической шероховатости характер графика $\lambda = f(\mathrm{Re})$ для промышленных труб (рис. 8.13) оказался отличным от аналогичного графика для труб с равнозернистой шероховатостью.

Это отличие было зафиксировано в различных опытах. В трубах с технической шероховатостью с увеличением числа Re и, следовательно, с уменьшением толщины вязкого подслоя $\delta_в$ выступы шероховатости не все одновременно выступают в турбулентное ядро потока: сначала бóльшие, а по мере возрастания числа Re — постепенно остальные. В переходной области для труб с технической шероховатостью в отличие от труб с равнозернистой шероховатостью коэффициенты $\lambda_{пер}$ больше, чем $\lambda_{кв}$ для квадратичной области сопротивления.

Для труб промышленного изготовления с естественной шероховатостью для любой области сопротивления при турбулентном режиме движения А. Д. Альтшуль предложил формулу

$$\lambda = 0{,}11\,(\Delta_э/d + 68/\mathrm{Re})^{0{,}25}. \qquad (8.47)$$

При $\Delta_э/d \ll 68/\mathrm{Re}$ формула (8.47) практически совпадает с формулой Блазиуса (8.38).

Граница между областью гидравлически гладких труб и переходной областью сопротивления может быть определена приближенно по соотношению $\mathrm{Re} \approx 20\,d/\Delta_э$. При турбулентном движении и $4000 \leqslant \mathrm{Re} < 20\,d/\Delta_э$ для определения $\lambda_{гл}$ можно принять формулу Блазиуса (8.38). Область гидравлически шероховатых труб соответствует числам $\mathrm{Re} \gtrsim 500\,d/\Delta_э$. Коэффициент $\lambda_{кв}$ можно определять по формуле Б. Л. Шифринсона

$$\lambda_{кв} = 0{,}11\,(\Delta_э/d)^{0{,}25}.$$

Значения $\Delta_э$ для труб и каналов из различных материалов приведены в приложении (табл. П.8.1—П.8.5).

8.11. Коэффициенты Дарси для некоторых видов труб, применяемых в гидромелиорации

Пластмассовые трубы. К пластмассовым относятся трубы из различных материалов: полиэтилена (стабилизированного и нестабилизированного), поливинилхлорида, винипласта (стабилизированного и нестабилизированного), фторопласта, полиметилметакрилата (органического стекла), фаолита, текстолита, асбовинила, стеклопласта и т. д. При этом даже изделия из одного материала, но изготовленные на разных заводах по разной технологии, имеют несколько отличающиеся зависимости для определения λ.

Для полиэтиленовых труб широкое распространение имеет формула Ф. А. Шевелева, по которой составлены и изданы специальные таблицы,

$$\lambda = 0{,}25/\mathrm{Re}^{0{,}226}.$$

Значения λ по этой формуле достаточно близки к значениям $\lambda_{гл}$, найденным по формуле Блазиуса (8.38).

Для промышленных полиэтиленовых труб с учетом влияния стыков и условий укладки, отличающихся от лабораторных, коэффициент λ может быть определен по формуле

$$\lambda = 0{,}288/\mathrm{Re}^{0{,}226}.$$

Стеклянные трубы находят все большее применение тогда, когда необходимо обеспечить достаточную гигиеничность и стойкость к коррозии; предусматривается и подземная прокладка стеклянных труб. Обычно стеклянные трубы используются в лабораторных условиях.

Исследованиями ВНИИ ВОДГЕО установлено, что стеклянные трубы, изготовленные способом вертикального вытягивания, в диапазоне чисел $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^4 \div 8 \cdot 10^5$ относятся к гидравлически гладким и для них коэффициент Дарси может быть определен с учетом влияния стыков по формуле

$$\lambda = 0{,}312/\mathrm{Re}^{0{,}226}.$$

Трубы для сточных вод. В трубах, предназначенных для сточных вод, коэффициенты λ определяют по формуле, предложенной Н. Ф. Федоровым,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta_э}{3{,}42 d_г} + \frac{a_2}{\mathrm{Re}} \right),$$

где $d_г = 4R$ — гидравлический диаметр; $\Delta_э$ и a_2 — соответственно эквивалентная шероховатость, мм, и безразмерный коэффициент (табл. 8.3).

При вычислении числа $\mathrm{Re} = v d_г/\nu$ в зависимости от концентрации в воде взвешенных частиц значения ν увеличивают по сравнению с ν для чистой воды или принимают по табл. П.1.1.

Трубы для внутрипочвенного и капельного орошения. В стенках труб, используемых для такого вида орошения, устраиваются отверстия, через которые вода подается на полив непосредственно к растениям. Такая конструкция осуществляется и в гибких трубопроводах из синтетической ткани. Условия движения, когда расход воды по длине трубопровода уменьшается, отличаются от условий, когда расход постоянный, кроме того появляются дополнительные потери энергии из-за раздачи воды во многих точках по длине. Поэтому для некоторых условий коэффициенты λ могут увеличиваться по сравнению с λ при $Q = \mathrm{const}$.

Обычно в поливных трубопроводах для капельного орошения $d = 0{,}016 \div 0{,}05$ м на расстоянии от 0,06 до 4 м выполняются отверстия диаметром 1—3 мм, в которых устанавливаются через переходник капельницы. При изменении расхода по длине в трубопроводах (обычно из полиэтилена) систем капельного орошения создается турбулентное движение с максимальным значением $\mathrm{Re} < 10^5$. Коэффициенты λ для этих труб могут быть определены по формулам для гидравлически гладких труб.

Для рассматриваемых трубопроводов при $\mathrm{Re} > 2 \cdot 10^4$ различие между λ для условий постоянного или переменного расхода по длине практически отсутствует.

Таблица 8.3

Трубы	$\Delta_э$, мм	a_2
Керамические	1,35	90
Асбестоцементные	0,6	73
Бетонные и железобетонные	2	100
Стальные	0,8	79
Чугунные	1	83

Укажем попутно, что при капельном орошении могут быть случаи, когда движение — ламинарное (по всей длине трубопровода или в его концевой части).

Дренажные трубы из различных материалов. В условиях притока воды в собирающие (дренажные) трубопроводы, когда расход по длине трубопровода увеличивается, коэффициенты Дарси λ при переменном расходе могут увеличиваться по сравнению со случаем, когда $Q = \text{const}$. Дренажные трубы изготовляют различных конструкций и из разных материалов (пластмассовые, гладкостенные или гофрированные — с дренажными отверстиями; гончарные, керамические, из стеклопластика и др.).

Дренажные трубы из стеклопластика при различных условиях, встречающихся в практике, работают в конце переходной и в квадратичной областях сопротивления.

Тщательно уложенные керамические дренажные трубы при турбулентном движении и $\mathrm{Re} \leqslant 10^5$ работают как гидравлически гладкие.

В переходной области коэффициент λ гофрированных дренажных труб по данным А. И. Мурашко рекомендуется определять по формуле Колбрука—Уайта (8.44), причем для этих труб $\Delta_э = 1{,}3 \div 1{,}9$ мм. Квадратичная область для гофрированных труб наступает при $\mathrm{Re}_{кв} \approx 10^5$. Увеличение коэффициента λ, связанное с наличием дренажных отверстий и стыков в гофрированных трубах, оценивается приблизительно в 5 %.

8.12. Влияние формы сечения трубопровода на коэффициенты Дарси

При вычислении значений числа Re для потоков в трубах некруглого сечения в качестве характерного линейного размера используется гидравлический радиус R. Этот параметр не является полной характеристикой геометрии потока, ибо недостаточно характеризует форму живого сечения. В то же время форма сечения влияет на кинематическую структуру потока и тем самым оказывается существенной при расчете гидравлических сопротивлений.

В трубах с полигональными очертаниями касательные напряжения на стенке распределены неравномерно по периметру сечения: по мере приближения к углам труб уменьшаются значения интенсивности пульсаций скорости и касательного напряжения. В результате неравномерности распределения касательных напряжений более интенсивно проявляются вторичные течения в плоскости живого сечения. Происходит поперечная циркуляция (рис. 8.14), на поддержание которой затрачивается дополнительная энергия. При прочих равных условиях коэффициенты Дарси λ увеличиваются. По лабораторным данным в напорных трубах полигонального очертания коэффициенты λ могут увеличиваться на 15 % по сравнению со значениями λ для круглых труб.

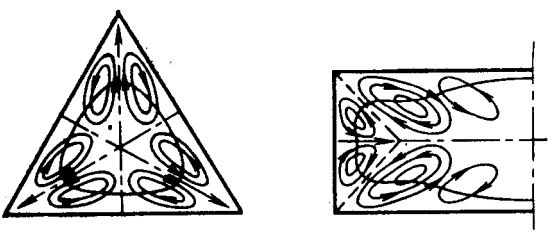


Рис. 8.14

8.13. Влияние условий эксплуатации трубопровода на гидравлические сопротивления

Влияние вибрации трубопровода. При работе трубопровода в условиях вибрации значение $Re_{кр}$ уменьшается. Влияние вибрации на увеличение λ (до 20 %) отмечается в области перехода от ламинарного к турбулентному движению. Увеличение в трубопроводах мелиоративных, строительных и других машин, работающих в условиях вибрации, должно учитываться при конструировании.

Влияние обрастания трубопроводов происходит в процессе эксплуатации в результате коррозии материалов труб, а также образования плотного слоя отложений. Состав этих отложений (инкрустации) может быть различным в зависимости от состава воды, транспортирующейся по трубам. В результате «обрастания» трубопроводов уменьшается площадь живого сечения и увеличиваются размеры выступов шероховатости, имеющихся и вновь образовавшихся на стенках трубы. Наблюдения показывают, что после нескольких лет эксплуатации уменьшение расхода воды вследствие этого может достигать 50 %.

Расчет увеличения высоты выступов шероховатости в зависимости от срока эксплуатации и состава воды можно выполнять по приближенной зависимости

$$\Delta_t = \Delta + at,$$

где Δ — высота выступов шероховатости в начале эксплуатации; Δ_t — то же через t лет; a — коэффициент, характеризующий скорость увеличения высоты выступов Δ и изменяющийся от 0,025 до 3 мм/год в зависимости от степени минерализации воды.

Отметим, что для восстановления расчетной пропускной способности труб применяют специальные устройства механического или гидравлического действия для очистки внутренней поверхности труб.

8.14. Способы снижения гидравлических сопротивлений

1. Введение в жидкость малых добавок полимеров или поверхностно-активных веществ (ПАВ) при определенных условиях приводит к снижению гидравлических сопротивлений, т. к. е уменьшению коэффициента Дарси λ. Приведем одну из гипотез, объясняющих этот эффект.

Молекулы применяемых полимеров или ПАВ представляют собой весьма длинные образования (длина некоторых из них может превышать их поперечный размер в 100 000 раз). При наличии добавок увеличивается толщина вязкого подслоя и промежуточной зоны между подслоем и турбулентным ядром, так как в реальных условиях переход от вязкого подслоя к турбулентному ядру происходит, конечно, не по одной линии, а в некотором слое, толщина которого, так же как и $\delta_в$, невелика. По мере увеличения концентрации ПАВ толщина промежуточного слоя растет. Вблизи стенок очень длинные молекулярные образования (мицеллы) ориентируются преимущественно по направлению движения и образуют «гибкую» поверхность, которая может изменяться волнообразно. После прохождения через насос или местные сопротивления молекулярные образования полимеров разрываются и в применяемых сейчас полимерных добавках практически не восстанавливаются. Эффект снижения λ при этом, естественно, сильно уменьшается. У поверхностно-активных веществ мицеллы восстанавливаются и эффект снижения λ довольно стабилен по длине трубопровода.

Добавки влияют на градиент скорости вблизи стенок — он уменьшается. Вместе с тем поверхность, создающаяся из молекул добавок вблизи стенок

трубы, способствует сильному (до 4—5 раз) уменьшению интенсивности пульсаций поперечной составляющей u_z' скорости, соответственно уменьшаются касательные напряжения, а значит и λ.

Полимерные и другие добавки сейчас довольно широко применяются в трубопроводах промышленного водоснабжения, теплоснабжения, шахт, химической и нефтеперерабатывающей промышленности. Начинается применение ПАВ и в мелиоративных трубопроводах. Применение некоторых ПАВ способствует очистке воды, приводит к замедлению коррозии. Имеются сведения о положительных результатах применения ПАВ в экспериментальной медицине (например, при исследовании кровеносных сосудов).

Концентрация растворов ПАВ изменяется от 0,001 до 1 %. Применение добавок позволяет до 60—80 % снизить коэффициент λ по сравнению с λ в жидкости без добавок. Однако не всегда увеличение концентрации до максимально возможной дает максимальный эффект. В каждом из случаев имеется некоторое оптимальное значение концентрации ПАВ.

Для жидкостей с добавками ПАВ переход от ламинарного к турбулентному движению происходит при числах Рейнольдса гораздо больших (примерно в 10 раз), чем $\mathrm{Re}_{кр}$ чистой жидкости.

Снижение λ при турбулентном движении начинается при достижении так называемого порогового числа $\mathrm{Re}_{пор}$ (или пороговой средней скорости в данной трубе). С увеличением концентрации добавок числа $\mathrm{Re}_{пор}$ уменьшаются.

2. В гидравлически гладких трубопроводах как при ламинарном, так и при турбулентном движении с увеличением числа Re коэффициент λ уменьшается. При неизменных v и d увеличение числа Re в капельной жидкости может быть достигнуто уменьшением кинематической вязкости ν подогревом жидкости или стенок трубы.

В воздухопроводах для уменьшения λ стенки надо охлаждать, так как ν воздуха уменьшается с уменьшением температуры.

3. Установлено, что подвижность («податливость») границ потока при подобранных определенным образом условиях может повлиять на значения λ, уменьшая или увеличивая их. К таким условиям относятся случаи, когда стенки, ограничивающие поток, колеблются с необходимыми частотами и амплитудами.

Кроме того, наблюдается снижение λ в потоках с границами, колеблющимися в соответствии с характеристиками пульсаций, возникающих в жидкости. Экспериментально найдено, что амплитуда таких колебаний не должна превышать толщины вязкого подслоя $\delta_в$. Лучшие результаты получались, когда амплитуды равнялись $(0{,}2 \div 0{,}3)\,\delta_в$.

Подбор соответствующих (для снижения λ) характеристик гибких (податливых) границ представляет интерес при проектировании мягких трубопроводов из капроновой ткани или других аналогичных материалов.

8.15. Формулы для коэффициента Шези в квадратичной области сопротивления

Эмпирические формулы. Формула Шези для равномерного движения была предложена более двух столетий назад.

В дальнейшем различными исследователями предлагались в основном эмпирические формулы для коэффициента Шези C. Рассмотрим некоторые из них, применяемые в расчетной практике:

формула Маннинга (1890 г.)

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}; \qquad (8.48)$$

формула Павловского

$$C = \frac{1}{n} R^y. \tag{8.49}$$

В степенных формулах (8.48) и (8.49) n — коэффициент шероховатости (табл. П.8.6—П.8.13); R — гидравлический радиус.

В 1925 г. акад. Н. Н. Павловский на основе анализа многочисленных опытных данных в диапазоне 0,1 м $\leqslant R \leqslant$ 3 м установил, что показатель степени в степенной формуле для коэффициента Шези является не постоянным, а переменным:

$$y = 2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - 0{,}75\sqrt{R}\,(\sqrt{n} - 0{,}1).$$

Н. Н. Павловским предложены упрощенные формулы для определения y:

$$\text{при } R < 1 \text{ м } \quad y \approx 1{,}5\sqrt{n},$$

$$\text{при } R > 1 \text{ м } \quad y \approx 1{,}3\sqrt{n}.$$

Полуэмпирические формулы. И. И. Агроскин (1949 г.) предложил полуэмпирическую формулу, так как она выведена из теоретически обоснованной формулы для коэффициента Дарси в квадратичной области сопротивления (8.43), с учетом того, что $C = \sqrt{8g/\lambda}$:

$$C = 2a\sqrt{2g}\,\lg\frac{A}{\Delta} R.$$

Специфика шероховатости стенок водотока (русла) отражена в отношении A/Δ, где учтены как абсолютные размеры шероховатости Δ, так и форма, и другие особенности шероховатости A. Поэтому $\lg\frac{A}{\Delta} = k$ назван параметром гладкости русла.

Приняв на основе опытных данных Никурадзе $a = 2$, при $g = 9{,}81$ м/с^2 И. И. Агроскин получил

$$C = 17{,}72\,(k + \lg R). \tag{8.50}$$

Формула (8.50) предусматривает использование обширного экспериментального материала, на основе которого получены значения коэффициента шероховатости n, и тогда

$$C = 1/n + 17{,}72\lg R, \tag{8.51}$$

где

$$k = 1/17{,}72n = 0{,}056/n.$$

В 1965 г. была предложена (И. И. Агроскин, Д. В. Штеренлихт) формула для коэффициента C с переменным коэффициентом при $\lg R$

$$C = C_1 + B \lg R, \qquad (8.52)$$

где

$$C_1 = 1/n; \quad B = 27{,}5 - 300n.$$

Расчет коэффициентов Дарси λ и Шези C в открытых руслах будет дополнительно рассмотрен в гл. 16.

8.16. Контрольные вопросы и примеры

1. Можно ли считать, что ламинарное движение — безвихревое (потенциальное)?
2. Согласно какой математической зависимости описывается распределение местной скорости по сечению цилиндрической трубы при равномерном ламинарном движении?
3. Как соотносятся максимальная и средняя скорости при равномерном ламинарном движении в цилиндрической трубе?
4. Одинаковы ли значения коэффициента Кориолиса (кинетической энергии) при ламинарном и турбулентном режимах движения в цилиндрической трубе?
5. Как распределяются касательные напряжения по сечению трубы при ламинарном равномерном движении?
6. От каких величин зависит коэффициент Дарси при равномерном ламинарном движении в цилиндрической трубе с круглым поперечным сечением?
7. Влияет ли форма поперечного сечения трубы на коэффициент Дарси при равномерном ламинарном движении? Если влияет, то как изменение коэффициента Дарси связано с формой сечения трубы?
8. Какой зависимостью описывается эпюра распределения осредненных местных скоростей при равномерном турбулентном движении? Исходя из двухслойной модели турбулентного потока, можно ли распространить эту кривую на все живое сечение?
9. Есть ли различия между отношениями средней скорости к максимальной скорости в живом сечении при равномерном ламинарном и турбулентном движении? Если есть, то какие именно?
10. Как связаны между собой коэффициенты Кориолиса и Дарси, Буссинеска и Дарси при равномерном турбулентном движении?
11. Приведите зависимости, характеризующие относительные дефициты скоростей при равномерном турбулентном движении.
12. Поясните понятия «гидравлически гладкое» и «гидравлически шероховатое» русло (труба, стенка).
13. Как рассчитывается толщина вязкого подслоя? Можно ли считать толщину вязкого подслоя в данной трубе зависящей, например, от температуры жидкости? В зависимости от каких других величин может изменяться толщина вязкого подслоя?
14. Как изменяется «наполненность» эпюры местных осредненных скоростей в зависимости от изменения (например, увеличения) значений числа Рейнольдса, в зависимости от увеличения или уменьшения относительной шероховатости при турбулентном режиме движения?
15. Какие зоны сопротивления при равномерном турбулентном движении в трубах можно указать? В чем различия вида кривых зависимости коэффициента Дарси от числа Рейнольдса и от относительной шероховатости в трубах с равнозернистой шероховатостью и в трубах промышленного изготовления с естественной шероховатостью?

16. Каков диапазон численных значений коэффициента Дарси в квадратичной области сопротивления для труб с равнозернистой и естественной шероховатостью?

17. Запишите формулы для распределения осредненных местных скоростей и для коэффициента Дарси в гидравлически гладких трубах, в гидравлически шероховатых трубах (квадратичная область сопротивления) и для коэффициента Дарси в переходной области сопротивления.

18. Каковы значения чисел Рейнольдса, характеризующие границы областей сопротивления при турбулентном движении в трубах с равнозернистой шероховатостью, в трубах промышленного изготовления с естественной шероховатостью?

19. Что такое эквивалентная шероховатость, в каких расчетах она используется?

20. Каковы показатели степени при средней скорости в формуле для определения потерь напора по длине при ламинарном движении и в различных областях сопротивления при турбулентном движении?

21. Какие формулы для определения коэффициента Шези используются в расчетах?

22. Каков механизм затрат энергии в потоке, какие переходы механической энергии в другие виды происходят при этом?

Пример 8.1. Каковы будут потери напора при напорном движении воды в трубе с площадью живого сечения $\omega = 2{,}83 \cdot 10^{-4}$ м^2 = 2,83 см^2, если расход воды равен $30 \cdot 10^{-6}$ м^3 = 30 см^3/с, температура воды $t = 10$ °С. Длина трубы 10 м, поперечное сечение трубы — круглое.

Решение. Вначале определяем, каким будет режим движения. Для этого найдем значение числа Рейнольдса, предварительно вычислив $d = \sqrt{\frac{4\omega}{\pi}} =$ $= 0{,}019$ м $= 1{,}9$ см и $v = \frac{Q}{\omega} = 0{,}106$ м/с $= 10{,}6$ см/с.

Тогда при $\nu = 0{,}0131$ см^2/с (см. табл. 1.6) имеем $\mathrm{Re} = vd/\nu = 10{,}6 \times$ $\times 1{,}9/0{,}0131 = 1537 < \mathrm{Re}_{кр} = 2320$. Следовательно, режим движения в трубе — ламинарный.

Определим значение коэффициента Дарси по формуле (8.14) $\lambda = 64/\mathrm{Re} =$ $= 0{,}0416$. Тогда по (7.18а)

$$h_{дл} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0{,}0416 \frac{100}{0{,}019} \frac{0{,}106^2}{19{,}62} = 0{,}125 \text{ м}.$$

Потери напора можно определить и по (8.9б): $h_{дл} = 32\, \nu l v/(gd^2) = 0{,}125$ м.

Пример 8.2. Определить толщину вязкого подслоя при напорном движении в трубе диаметром 0,1 м, если число $\mathrm{Re} = 10^5$, а коэффициент Дарси $\lambda = 0{,}02$.

Решение. Согласно формуле (8.33) имеем осредненное значение

$$\delta_в \approx \frac{30d}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} = \frac{30 \cdot 0{,}1}{10^5 \sqrt{0{,}02}} = 0{,}0002 \text{ м} = 0{,}2 \text{ мм}.$$

Пример 8.3. Определить потери напора при равномерном напорном движении воды в трубе диаметром $d = 0{,}2$ м; средняя скорость потока равна 0,15 м/с, температура воды $t = 12$ °С. Внутренняя поверхность трубы характеризуется равнозернистой шероховатостью с высотой выступа $\Delta =$ $= 0{,}0005$ м $= 0{,}5$ мм. Длина трубы $l = 900$ м.

Решение. 1. Приняв по табл. 1.6 значение $\nu = 0{,}0124$ см^2/с, найдем $\mathrm{Re} = vd/\nu = 15 \cdot 20/0{,}0124 = 24\,193$. Очевидно, что режим движения — турбулентный, так как $\mathrm{Re} = 24\,193 > \mathrm{Re}_{кр} = 2320$.

Выясним, в какой области сопротивления происходит движение в рассматриваемом случае. Найдем согласно (8.45) значение числа Рейнольдса,

соответствующее концу области гидравлически гладких труб: $Re_{к.гл} = 27\,(d/\Delta)^{8/7} = 27\,(200/0{,}5)^{8/7} = 25\,440$.

Так как найденное для условий задачи $Re = 24\,193 < Re_{к.гл} = 25\,440$, то рассчитываемый случай относится к турбулентному движению в области гидравлически гладких труб.

Тогда имеем по формуле Блазиуса (8.38) $\lambda_{гл} = 0{,}3164/Re^{0{,}25} = 0{,}3164/24\,193^{0{,}25} = 0{,}0254$, а по формуле Колбрука $\lambda_{гл} = 1/\left(1{,}8\lg\frac{Re}{7}\right)^2 = 0{,}0246$.

Определяя потери напора с использованием $\lambda_{гл}$, полученных по указанным формулам, получим по (7.18а)

$$h_{дл}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0{,}0254\,\frac{900}{0{,}2}\,\frac{0{,}15^2}{19{,}62}=0{,}131\ м$$

и

$$h_{дл}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0{,}0246\,\frac{900}{0{,}2}\,\frac{0{,}15^2}{19{,}62}=0{,}127\ м.$$

2. Определим, какова область сопротивления, сопоставляя толщину вязкого подслоя $\delta_в$ и высоту выступа шероховатости Δ.

Находим по (8.33) значения $\delta_в$ с использованием значений λ, полученных по формулам Блазиуса и Колбрука. При этом полагаем, что в связи со сравнительно небольшим значением $Re = 24\,193$ трубы могут работать как гидравлически гладкие. Тогда

$$\delta_в\approx\frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}}=\frac{30\cdot0{,}2}{24\,193\sqrt{0{,}0254}}=0{,}00155\ м=1{,}55\ мм$$

и

$$\delta_в\approx\frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}}=\frac{30\cdot0{,}2}{24\,193\sqrt{0{,}0246}}=0{,}00158\ м=1{,}58\ мм.$$

Так как толщина вязкого слоя $\delta_в > \Delta = 0{,}5$ мм, то справедливо рассматривать область сопротивления в данных условиях как область гидравлически гладких труб. Потери напора можно считать равными 0,13 м.

Пример 8.4. Определить потери напора по длине при равномерном напорном движении воды с расходом $Q = 2$ м^3/с в трубопроводе длиной 1000 м, диаметром $d = 1$ м; температура воды $t = 10$ °С, трубы стальные, после многих лет эксплуатации — с заметными отложениями на стенках, высота выступов шероховатости или эквивалентная шероховатость $\Delta = 0{,}002$ м.

Решение. Найдем значение числа Рейнольдса, определив вначале среднюю скорость $v = Q/\omega = 2/0{,}785\cdot1 = 255$ см/с и кинематическую вязкость (по табл. 1.6) $\nu = 0{,}0131$ см^2/с. Тогда $Re = vd/\nu = 255\cdot100/0{,}0131 = 1{,}946\cdot10^6$.

Очевидно, что режим движения — турбулентный. Полагая, что движение при таком довольно высоком значении числа Рейнольдса может происходить в квадратичной области сопротивления (в области гидравлически шероховатых труб), найдем число Рейнольдса, соответствующее началу квадратичной области $Re_{кв} = 22{,}3\,Cd/\Delta$, где C — коэффициент Шези.

Определим его значение по формуле Маннинга (8.48):

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}.$$

Приняв по табл. П.8.6 коэффициент шероховатости $n = 0{,}014$ (для загрязненных водопроводных труб), имеем

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{0{,}014} 0{,}25^{1.6} = 56{,}6 \text{ м}^{0.5}/\text{с}.$$

Тогда $\mathrm{Re}_{кв} = 22{,}3\, Cd/\Delta = 22{,}3 \cdot 56{,}6 \cdot 1/0{,}002 = 6{,}3 \cdot 10^5$. Так как $\mathrm{Re} = 1{,}946 \cdot 10^6 > \mathrm{Re}_{кв} = 6{,}31 \cdot 10^5$, то подтверждается допущение о том, что область сопротивления — квадратичная и, следовательно, правомочно применение формулы Маннинга для коэффициента Шези, справедливой для квадратичной области сопротивления. Найдем значение коэффициента Дарси $\lambda = 8\, g/C^2 = 0{,}0245$. Теперь определим потери напора:

$$h_{дл} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0{,}0245 \frac{100}{1{,}0} \frac{2{,}55^2}{19{,}62} = 8{,}12 \text{ м}$$

или

$$h_{дл} = \frac{v^2 l}{C^2 R} = \frac{2{,}55^2 \cdot 1000}{56{,}6^2 \cdot 0{,}25} = 8{,}12 \text{ м}.$$

Пример 8.5. Определить значение коэффициента Дарси для случая равномерного движения воды в трубопроводе промышленного изготовления с естественной шероховатостью при средней скорости потока $v = 0{,}15$ м/с и температуре воды $t = 10$ °С. Диаметр стального трубопровода 500 мм, эквивалентная шероховатость $\Delta_э = 1$ мм.

Решение. При $t = 10$ °С по табл. 1.6 имеем $\nu = 0{,}0131$ см^2/с. Найдем $\mathrm{Re} = vd/\nu = 15 \cdot 50/0{,}0131 = 5{,}72 \cdot 10^4$. Так как движение — турбулентное, для определения λ применим формулу А. Д. Альтшуля (8.47)

$$\lambda = 0{,}11 \left(\frac{\Delta_э}{d} + \frac{68}{\mathrm{Re}} \right)^{0.25} = 0{,}11 \left(\frac{0{,}001}{0{,}5} + \frac{68}{57\,200} \right)^{0.25} = 0{,}0261.$$

Из графика на рис. 8.13 при соответствующих значениях параметров $\frac{d}{\Delta} = 500$ и $\mathrm{Re} = 5{,}72 \cdot 10^4$ имеем $\lambda = 0{,}025$. Расхождение между полученными значениями λ составляет более 5 %.

Пример 8.6. Определить потери напора при безнапорном равномерном движении воды ($t = 20$ °С) в бетонированном канале прямоугольного поперечного сечения. Ширина канала по дну $b = 7$ м, глубина воды $h = 2$ м. Качество бетонной поверхности — среднее, расход воды $Q = 30$ м^3/с. Длина участка канала, на которой определяются потери напора, равна $l = 2000$ м.

Решение. Потери напора по длине при равномерном движении (здесь местные потери отсутствуют) определяются или по (7.18) $h_{дл} = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}$ или по формуле $h_{дл} = \frac{v^2 l}{C^2 R}$.

Определим гидравлический радиус: $R = \omega/\chi = bh/(b + 2h) = 7 \times 2/(7 + 2 \cdot 2) = 1{,}27$ м и среднюю скорость потока: $v = Q/\omega = 2{,}14$ м/с.

Тогда (при $\nu = 0{,}0101$ см^2/с по табл. 1.6) имеем $\mathrm{Re}_R = vR/\nu = 214 \times 127/0{,}0101 = 2{,}69 \cdot 10^6$.

При таком высоком значении Re_R предполагаем, что область сопротивления — квадратичная и можно использовать формулы для коэффициента Шези (см. § 8.15).

Для определения коэффициента Шези воспользуемся формулами (8.49), (8.51), (8.52), приняв для среднего качества бетонировки (см. табл. П.8.6) $n = 0{,}014$.

Тогда соответственно

$$C = \frac{1}{n} R^y = \frac{1}{n} R^{1,3\sqrt{n}} = \frac{1}{0,014} 1,27^{0,154} = 74,11 \text{ м}^{0,5}/\text{с},$$

где принято $y \approx 1,3\sqrt{n}$;

$$C = \frac{1}{n} + 17,72 \lg R = 73,27 \text{ м}^{0,5}/\text{с};$$

$$C = \frac{1}{n} + (27,5 - 300n) \lg R = 73,85 \text{ м}^{0,5}/\text{с}.$$

Как видим, различие между крайними значениями по этим формулам коэффициента Шези не превышает 1,1 %.

Приняв для сокращения расчетов одно из значений коэффициента Шези, а именно $C = 73,85$ м^{0,5}/с, получим $h_{дл} = v^2 l/(C^2 R) = 2,14^2 \cdot 2000/(73,85^2 \times \times 1,27) = 1,32$ м.

Определив значение коэффициента Дарси. $\lambda = 8g/C^2 = 78,48/73,85^2 = = 0,0144$, имеем также

$$h_{дл} = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g} = 0,0144 \frac{2000}{4 \cdot 1,27} \frac{2,14^2}{19,62} = 1,32 \text{ м}.$$

Глава 9

ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

9.1. Общие сведения

При течении вязкой жидкости на коротких участках, непосредственно примыкающих к конструктивным элементам (см. § 7.1) труб или русл, происходит изменение вектора средней скорости. Обычно причиной изменения средней скорости служит изменение геометрии границ потока (т. е. изменение площади сечения) или изменение направления движения жидкости. Во многих случаях может происходить изменение и значения средней скорости, и направления движения (например, при прохождении жидкости через некоторые фасонные части трубопроводов).

В рассматриваемых случаях на коротких участках потока происходят изменения кинематических параметров. В пределах таких участков движение жидкости неравномерное.

Как указывалось в гл. 7, во многих случаях при прохождении жидкости через конструктивные элементы (рис. 9.1) происходит отрыв потока от стенок, образуются циркуляционные зоны (если жидкость — вода, эти зоны называются в о д о в о р о т н ы м и) и интенсивное вихреобразование с последующим гашением вихрей в толще потока, усиливаются пульсации скоростей в турбулентном потоке. В результате этих явлений часть удельной энергии (напора) затрачивается на преодоление сопротивлений движению жидкости,

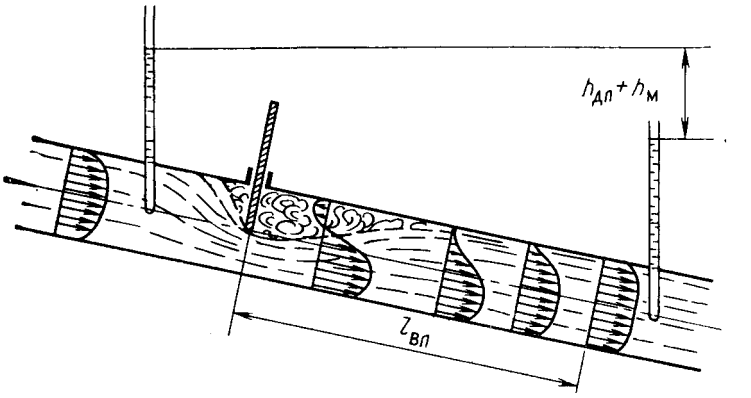


Рис. 9.1

возникающих в связи с работой сил трения внутри вязкой жидкости, часть механической энергии переходит в теплоту. При этом местная потеря напора определяется по (7.6):

$$h_м = \zeta_м v^2/2g,$$

где $\zeta_м$ — безразмерный коэффициент местного сопротивления.

Как уже указывалось в гл. 7, для большинства местных сопротивлений приведенные в справочной литературе коэффициенты потерь найдены экспериментально. При проведении опытов необходимо соблюдать следующие требования. Исследуемый конструктивный элемент трубы устанавливается на участке трубопровода, достаточно удаленном от входа и предшествующего (по течению) другого конструктивного элемента. В местах установки пьезометров не должно ощущаться влияние входа в трубу изучаемого объекта и других конструктивных элементов на распределение скоростей и давлений по сечению. Пьезометры должны устанавливаться в сечениях, где движение равномерное или плавно изменяющееся. Установка пьезометров непосредственно перед изучаемым конструктивным элементом и за ним не приведет к правильным результатам.

С помощью пьезометров определяется перепад пьезометрических напоров, равный при $\alpha_1 = \alpha_2$ и $v_1 = v_2$

$$\Delta H_п = h_{тр} = (z_1 + p_1/\rho g) - (z_2 + p_2/\rho g).$$

В данном случае $h_{тр} = h_м + h_{дл}$.

Затем на таком же участке трубопровода, но без рассматриваемого конструктивного элемента измеряется потеря напора $h_{дл}$. Одновременно в обоих случаях определяется средняя скорость потока. Отсюда получаем местные потери напора $h_м = h_{тр} - h_{дл}$, а затем $\zeta_м = 2gh_м/v^2$.

Когда $v_1 \neq v_2$, т. е. площади сечения до конструктивного элемента и за ним различны, а $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $h_{тр}$ определяют из (5.21). Экспериментальное определение $\zeta_м$ в этом случае гораздо труднее, чем при постоянных размерах сечения до конструктивного устройства и за ним.

Коэффициенты местных сопротивлений $\zeta_м$, так же как и коэффициенты Дарси λ, могут являться функцией ряда факторов (см. § 7.2, 7.3). Среди них главным является геометрическая форма. При напорном установившемся движении в общем случае для данной геометрической формы

$$\zeta_м = f(\mathrm{Re},\ \Delta/d,\ \mathrm{Ka}).$$

Если движение неустановившееся, в число влияющих факторов добавляется число Струхаля Sh (см. § 7.2).

Во многих случаях относительная шероховатость не влияет на $\zeta_м$. Влияние числа Кармана Ка на $\zeta_м$ изучено пока недостаточно.

Большинство коэффициентов местных сопротивлений $\zeta_м$ при напорном движении в трубопроводах не зависит от числа Re при $\mathrm{Re} > 5\ (10^3 \div 10^4)$. При меньших значениях чисел Re коэффициенты $\zeta_м$ обычно увеличиваются с уменьшением Re.

Коэффициенты местного сопротивления могут быть представлены в виде

$$\zeta_м = \zeta_{м.\,кв} + A/\mathrm{Re},$$

где $\zeta_{м.\,кв}$ — коэффициент местного сопротивления в квадратичной области сопротивления, в которой потери удельной энергии (напора) пропорциональны квадрату средней скорости; A — коэффициент. Значения $\zeta_{м.\,кв}$ и A для различных конструктивных элементов приведены в табл. П.9.1.

При достаточно больших числах Re второй член в этой формуле значительно меньше, чем $\zeta_{м.\,кв}$. Этот факт найдет отражение в приводимых ниже замечаниях о значениях числа Re, при которых коэффициенты $\zeta_м$ не зависят от него.

Влияние многообразия геометрических параметров различных конструктивных схем и особенностей условий движения на значения коэффициентов $\zeta_м$ отражено в специальных гидравлических справочниках. Отметим, что местные потери напора при напорном движении в трубах изучены гораздо полнее, чем при безнапорном движении.

9.2. Потери напора на начальных участках

На начальных участках труб или каналов (см. § 7.1) происходит изменение распределения кинематических параметров потока от начального их распределения (на входе) до распределения, соответствующего стабилизированному (или равномерному) движению. Распределение скоростей по живому сечению на входе близко

к равномерному. На длине начального участка происходит изменение эпюры скоростей, которая асимптотически приближается к виду, характерному для полностью развитого (стабилизированного) данного режима движения. Как известно, плоская эпюра скоростей при стабилизированном ламинарном движении — парабола, а при стабилизированном турбулентном движении — логарифмическая кривая. Потери напора на начальных участках больше, чем на участках такой же длины данного трубопровода или русла, но при равномерном (стабилизированном) движении: при ламинарном движении — приблизительно на $(0{,}2 \div 0{,}4)\, v^2/2g$, а при турбулентном — приблизительно на $(0{,}1 \div 1{,}5)\, v^2/2g$ в зависимости от интенсивности и турбулентности на входе.

Длина начального участка при ламинарном напорном движении жидкости в трубе по С. М. Таргу равна $0{,}04\, \mathrm{Re}d$.

При турбулентном напорном движении длина начального участка зависит от того, будет ли данная труба гидравлически гладкой или гидравлически шероховатой.

Для турбулентного движения длину $l_{\text{нач}}$ для всех областей сопротивления можно определить по формуле, предложенной В. С. Боровковым и Ф. Г. Майрановским,

$$l_{\text{нач}}/d = 0{,}52/\lambda,$$

где λ — коэффициент Дарси при стабилизированном (равномерном) движении. Для ламинарного движения с учетом того, что $\lambda = 64/\mathrm{Re}$, эта формула имеет вид

$$l_{\text{нач}}/d = 2{,}56/\lambda.$$

Сравнение этих формул показывает, что при одинаковых значениях λ и d длина $l_{\text{нач}}$ при ламинарном режиме движения в 5 раз больше, чем при турбулентном.

9.3. Местные потери напора

Рассмотрим некоторые типичные случаи местных гидравлических сопротивлений при турбулентном режиме и напорном движении, обусловленные изменением площади поперечного сечения потока (см. ниже, пп. 1—6) или изменением направления потока. Обычно коэффициенты местных сопротивлений можно определить экспериментальным путем.

1. Внезапное расширение трубы. Напорное движение жидкости происходит в трубе, сечение которой внезапно расширяется от площади ω_1 до площади ω_2 (рис. 9.2). При достаточно высокой скорости в узкой трубе поток в месте расширения отрывается от ограничивающих твердых стенок, образуя транзитную струю, которая постепенно расширяется. На некотором расстоянии от кромки расширения транзитная струя заполнит сечение ω_2. Между стенкой трубы и поверхностью транзитной струи

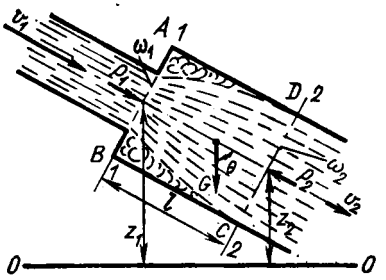


Рис. 9.2

жидкость медленно вращается, образуя водоворотную область. Граница между транзитной струей и водоворотной областью представляет собой поверхность раздела, которая неустойчива (ее положение меняется). На этой границе происходит интенсивное вихреобразование.

Пульсации скоростей на границе раздела транзитной струи и водоворотной области наряду с интенсивными перемещениями вихрей приводят к появлению повышенных по сравнению с равномерным движением турбулентных касательных напряжений.

Через поверхность раздела происходит обмен жидкости между транзитной струей и водоворотной областью и наоборот. В результате завихренные массы жидкости с границы транзитной струи проникают внутрь потока, где вращение постепенно гасится трением.

В связи с интенсивным вихреобразованием на границе транзитной струи и последующим гашением вихрей происходят потери напора при внезапном расширении $h_{в.\,р}$.

Коэффициенты местных сопротивлений приближенно можно найти аналитически.

Составим уравнение Бернулли для сечений AB и CD, ограничивающих выделенный отсек $ABCD$:

$$h_{в.\,р} = z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}.$$

Чтобы выразить $z_1 - z_2 + (p_1 - p_2)/\rho g$ через средние скорости v_1 и v_2, к массе жидкости, заключенной между сечениями AB и CD, применим теорему о количестве движения, согласно которой изменение количества движения этой массы в единицу времени равно сумме проекций на направление движения (на ось потока) внешних сил, действующих на данную систему.

Рассмотрим проекции внешних сил на ось потока. Принимаем основное допущение, что давление p_1 можно считать действующим по всему сечению AB. В сечении AB, взятом по большому диаметру сразу за расширением, действуют в направлении потока сила давления $P_1 = p_1\omega_1$ и сила воздействия кольцевой стенки площадью $\omega_2 - \omega_1$ на поток $R = p_1(\omega_2 - \omega_1)$. Сумма этих сил $P_1 + R = p_1\omega_2$. Сила давления в сечении CD, направленная против движения, $P_2 = p_2\omega_2$. Проекциями сил трения на боковой стенке отсека пренебрегаем из-за небольшой длины выделенного отсека.

Проекция силы тяжести на направление движения $G\cos\theta = \rho g\omega_2 l\cos\theta = \rho g\omega_2 (z_1 - z_2)$. Итак, сумма проекций внешних сил на направление движения равна

$$(p_1 - p_2)\,\omega_2 + \rho g\omega_2 (z_1 - z_2).$$

Приращение количества движения выделенной массы жидкости с учетом (5.28а) равно

$$\rho Q\,(\alpha_2' v_2 - \alpha_1' v_1) = \rho\omega_2 v_2\,(\alpha_2' v_2 - \alpha_1' v_1).$$

Приравняв сумму проекций внешних сил на направление движения и приращение количества движения, получим

$$(p_1 - p_2)\,\omega_2 + \rho g\omega_2\,(z_1 - z_2) = \rho\omega_2 v_2\,(\alpha_2' v_2 - \alpha_2' v_1).$$

Сократив обе части уравнения на ω_2 и приняв $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha'$, запишем

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) = \frac{\alpha' v_2}{g}\,(v_2 - v_1).$$

Тогда

$$h_{\text{в. р}} = \frac{\alpha' v_2\,(v_2 - v_1)}{g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}.$$

Если принять $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha' = \alpha$, тогда

$$h_{\text{в. р}} = \frac{\alpha\,(v_1 - v_2)^2}{2g} \tag{9.1}$$

или при $\alpha = 1$

$$h_{\text{в. р}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \tag{9.2}$$

Назовем $(v_1 - v_2)$ потерянной скоростью, тогда потери напора при внезапном расширении равны скоростному напору, соответствующему потерянной скорости. Это есть формула Борда, которая была введена им при рассмотрении потери энергии при ударе неупругих тел, поэтому иногда потери $h_{\text{в. р}}$ называют потерями на удар.

Потери напора $h_{\text{в. р}}$ можно выразить следующим образом

$$h_{\text{в. р}} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} \tag{9.3}$$

или

$$h_{\text{в. р}} = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}. \tag{9.4}$$

Так как по уравнению неразрывности $v_1\omega_1 = v_2\omega_2$, то можно представить

$$h_{в.\,р} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}$$

или

$$h_{в.\,р} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

Отсюда коэффициенты сопротивления при внезапном расширении потока

$$\zeta_{в.\,р1} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2; \qquad (9.5)$$

$$\zeta_{в.\,р2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2. \qquad (9.6)$$

При этом

$$h_{в.\,р} = \zeta_{в.\,р1} \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{в.\,р2} \frac{v_2^2}{2g};$$

$$\frac{\zeta_{в.\,р1}}{\zeta_{в.\,р2}} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}. \qquad (9.7)$$

Опыты показывают, что при $\mathrm{Re}_1 = v_1 d_1/\nu > 5 \cdot 10^3$ коэффициенты сопротивления при внезапном расширении зависят только от отношения площадей ω_1 и ω_2. При меньших Re_1 указанные коэффициенты можно считать зависящими от Re_1, причем с уменьшением Re_1 коэффициент $\zeta_{в.\,р1}$ увеличивается.

2. Выход из трубы в неподвижную жидкость (бак, бассейн, водохранилище) является частным случаем внезапного расширения при $\omega_2 \gg \omega_1$. В этом случае (рис. 9.3) можно использовать выражение для коэффициента сопротивления при внезапном расширении (9.5)

$$\zeta_{в.\,р1} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2,$$

а так как ω_2 в этом случае гораздо больше, чем ω_1, то принимаем

$$\zeta_{вых} = 1.$$

3. Постепенное расширение (рис. 9.4) (расширяющиеся переходные конусные или призматические участки или диффузоры). В расчетах потери напора в диффузорах часто разделяют на потери, связанные с расширением сечения, $h_р$ и потери по длине диффузора $h_{дл}$. Соответственно коэффициент сопротивлений $\zeta_{диф}$

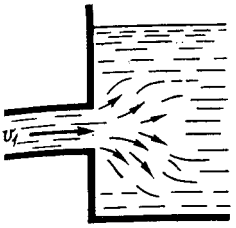


Рис. 9.3

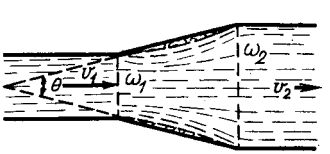


Рис. 9.4

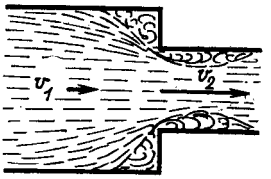


Рис. 9.5

условно делится на коэффициенты сопротивления расширения $\zeta_р$ и $\zeta_{дл}$:

$$\zeta_{диф} = \zeta_р + \zeta_{дл} = k_{диф}\zeta_{в.\,р} + \zeta_{дл}.$$

Коэффициенты сопротивления при этом обычно относят к скоростному напору в первом сечении. Тогда для конического диффузора круглого сечения

$$\zeta_{диф} = k_{диф}\zeta_{в.\,р1} + \frac{\lambda}{8\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

где

$$\zeta_{в.\,р1} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2;$$

ω_1 и ω_2 — площади поперечного сечения трубы до расширения и за ним: $n = \omega_2/\omega_1$ — степень расширения потока ($n > 1$); λ — коэффициент Дарси в подводящей к диффузору трубе. Коэффициент $k_{диф}$ находится по данным табл. 9.1 в зависимости от центрального угла (угла конусности) θ. Выражение для $\zeta_{дл}$ найдено аналитически.

При движении жидкости в диффузоре скорости по длине уменьшаются. Соответственно по уравнению Бернулли давление увеличивается (градиент $\mathrm{d}\,p/\mathrm{d}\,l > 0$ — положительный градиент давления). При этом вблизи стенок жидкость обладает такими значе-

Таблица 9.1

θ, град	$k_{диф}$	θ, град	$k_{диф}$	θ, град	$k_{диф}$	θ, град	$k_{диф}$
2,5	0,18	25	0,5	60	1,18	100	1,06
7,5	0,13	30	0,7	70	1,15	120	1,05
10	0,17	40	1	80	1,12	160	1,02
15	0,27	50	1,1	90	1,1	180	1
20	0,42						

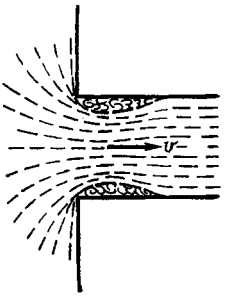


Рис. 9.6

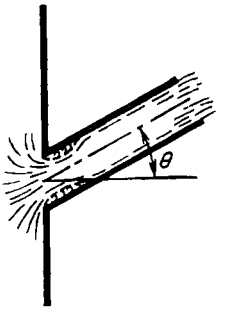


Рис. 9.7

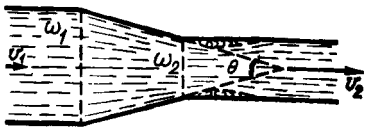


Рис.9.8

ниями кинетической энергии (или количества движения), что не может противостоять тормозящему влиянию давления. В пристенном (пограничном) слое может начаться движение жидкости в обратном направлении, произойдет отрыв потока от стенок.

В зависимости от угла θ движение жидкости в диффузоре может быть безотрывным (при $\theta < 8^\circ \div 10^\circ$) либо может происходить отрыв потока от стенок на части длины диффузора (при $10^\circ < \theta < 50^\circ \div 60^\circ$) или полный отрыв потока от стенок на всей длине диффузора ($\theta > 50^\circ \div 60^\circ$). Отрыв бывает несимметричным и даже односторонним.

4. Внезапное сужение. При внезапном сужении (рис. 9.5), так же как и при внезапном расширении, за кромкой сужения происходит отрыв потока от твердой стенки и образование транзитной струи, которая сначала испытывает сжатие, а затем — расширение. Между твердой стенкой и поверхностью транзитной струи образуется водоворотная зона. Образуются вихри, которые в результате обмена жидкостью между водоворотной зоной и транзитной струей проникают в поток, где гасятся трением. В результате работы сил трения часть механической энергии потока переходит в теплоту.

При числах $Re > 10^4$ коэффициент $\zeta_{в.\,с}$ зависит только от отношения ω_2/ω_1. Значения коэффициента $\zeta_{в.\,с}$, отнесенного к скоростному напору за сужением, приведены в табл. 9.2.

5. Вход в трубу является частным случаем внезапного сужения. Если труба присоединена перпендикулярно стенке бас-

Таблица 9.2

ω_2/ω_1	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\zeta_{в.\,с}$	0,5	0,46	0,42	0,34	0,25	0,15	0

сейна и кромка входного отверстия острая (рис. 9.6), то $\zeta_{вх} = 0{,}5$; при слегка скругленной кромке $\zeta_{вх} = 0{,}2 \div 0{,}25$, а при весьма плавном очертании входной кромки $\zeta_{вх} = 0{,}05 \div 0{,}1$. Если труба присоединена под углом θ к горизонту (кромка острая), (рис. 9.7), то

$$\zeta_{вх} = 0{,}5 + 0{,}303 \sin\theta + 0{,}226 \sin^2\theta. \qquad (9.8)$$

6. Постепенное сужение (конфузоры). Коэффициент сопротивлений при постепенном сужении (рис. 9.8), отнесенный к $v_2^2/2g$, определяется по формуле

$$\zeta_{конф} = \frac{\lambda_{ср}}{8 \sin\frac{\theta}{2}} \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2},$$

где n_1 — степень сужения потока, т. е. отношение площадей ω_1/ω_2 ($n_1 > 1$); λ — среднее значение коэффициента Дарси для подводящей и отводящей труб; θ — угол конусности.

Опыты показывают, что при одном и том же угле конусности потери напора на участках расширения больше, чем на участках сужения.

При движении жидкости в конфузоре вдоль потока скорость растет, а давление уменьшается (градиент давления $\mathrm{d}\,p/\mathrm{d}\,l < 0$). Причин к появлению вихреобразования и отрыва потока в конфузоре нет. Лишь на выходе из конфузора при прямолинейных образующих труб имеется сжатие потока и отрыв потока от стенки, но эта зона меньше, чем при внезапном сужении.

7. Поворот. При изменении направления потока появляются центробежные силы, направленные от центра кривизны к внешней стенке трубы. Давление в пределах поворота у внешней стенки больше, чем у внутренней. Соответственно скорости у внешней стенки меньше, чем у внутренней. Вследствие этого вдоль боковых стенок трубы, вблизи поверхности которых скорость невелика, будет происходить движение жидкости от внешней стенки к внутренней, т. е. возникает поперечная циркуляция в потоке. В результате образуется так называемый парный (двойной) вихрь, который накладывается на поступательное движение; линии тока становятся винтообразными (рис. 9.9). Происходит отрыв потока от обеих стенок, образуются водоворотные области с обратными направлениями линий тока в них у стенок трубы. Эпюра скоростей в связи с этим перестраивается.

Повышенная пульсация скоростей и интенсивное перемешивание частиц наряду с затратами энергии потока на поддержание водоворотных областей на поворотах приводят к увеличенным потерям напора на повороте по сравнению с потерями на прямолинейных участках.

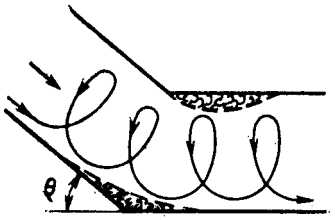
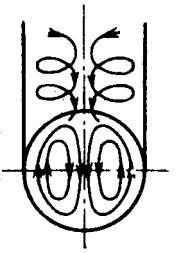


Рис. 9.9



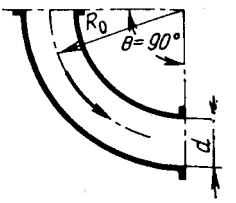


Рис. 9.10

7а. Поворот без скругления (рис. 9.9). Для гладких стенок труб с круглым и квадратным поперечным сечением при $Re \geqslant 2 \cdot 10^5$ коэффициент сопротивления $\zeta_{пов}$ находят в зависимости от угла поворота θ (табл. 9.3).

7б. Плавный поворот трубы круглого поперечного сечения (закругленный отвод, колено — рис. 9.10). Коэффициент $\zeta_{пов}$ при плавном повороте трубы с круглым поперечным сечением (стенки гладкие, $Re \geqslant 2 \cdot 10^5$) находят по формуле

$$\zeta_{пов} = AB.$$

Параметр A зависит от угла поворота θ; по Б. Б. Некрасову $\theta \leqslant 70°$ $A = 0{,}9 \sin\theta$; при $\theta = 90°$ $A = 1{,}0$; при $\theta > 100°$ $A = 0{,}7 + 0{,}35\frac{\theta}{90}$. Найденные по этим формулам значения A приведены в табл. 9.4.

Параметр B учитывает влияние относительного радиуса закругления R_0/d (d — диаметр трубы). Значения B определяются по графикам на рис. 9.11 и 9.12.

При $Re < 10^4$ шероховатость стенок практически не влияет на $\zeta_{пов}$. При $Re > 10^4$ следует вводить поправки, учитывающие

Таблица 9.3

θ, град	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
$\zeta_{пов}$	0,125	0,16	0,32	0,56	0,81	1,19	1,56	2,16	2,67	3

Таблица 9.4

θ, град	0	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
A	0	0,31	0,45	0,6	0,78	0,9	1	1,13	1,2	1,28	1,4

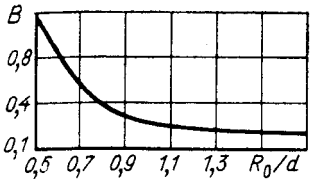


Рис. 9.11

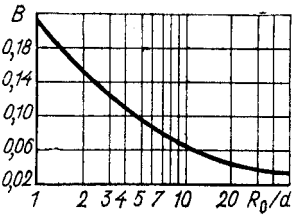


Рис. 9.12

влияние Re и относительной шероховатости Δ/d. На сопротивление потока в отводах влияет в основном шероховатость внутренней стенки.

В формулах, приведенных в п. 7, учитываются только местные потери, связанные с поворотом потока. Потери напора по длине в пределах отводов определяются по обычным формулам (7.18) или (7.19), при этом за l принимают длину осевой линии поворота.

8. Диафрагма. Диафрагма представляет собой установленный перпендикулярно направлению течения диск с отверстием (рис. 9.13). Диафрагмы применяются для измерения расхода жидкости в трубах. Коэффициент сопротивления диафрагмы $\zeta_д$, установленной в трубе круглого постоянного сечения ω_1 при круглом концентрическом отверстии площадью ω_0, зависит от отношения площади отверстия ω_0 к площади сечения $\omega_1 (n = \omega_0/\omega_1)$.

При протекании через отверстие диафрагмы поток суживается до площади отверстия ω_0, за отверстием образуется транзитная струя, которая сначала испытывает сжатие, а затем расширяется до размеров сечения трубы. Происходит отрыв потока от стенок, между струей и стенками образуется водоворотная зона. Граница раздела между водоворотной областью и транзитной струей неустойчива, пульсирует. На поверхности струи происходят интенсивное вихреобразование и обмен частицами между транзитной струей и водоворотной областью. Порождение и гашение вихрей приводят к повышенной интенсивности пульсаций скорости и к переходу части механической энергии потока в теплоту.

Значения отнесенных к скоростному напору в трубе коэффициентов сопротивления диафрагмы с толщиной $l/d_1 \leqslant 0{,}015$ с острой кромкой при $\mathrm{Re} = v_0 d_0/\nu > 10^5$ приведены в табл. 9.5.

Таблица 9.5

ω_0/ω_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\zeta_д$	245	51,5	18,2	8,25	4	2	0,97	0,42	0,13	0

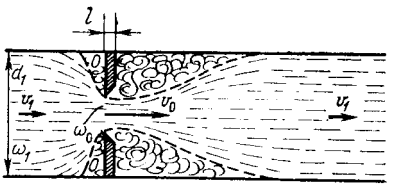


Рис. 9.13

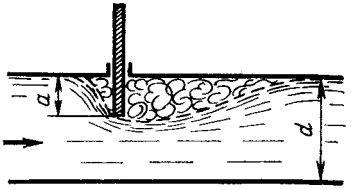


Рис. 9.14

9. З а д в и ж к а. Для простой плоской односторонней задвижки, установленной на трубе круглого поперечного сечения, коэффициент потерь $\zeta_з$ зависит от степени перекрытия сечения трубы, которая характеризуется отношением a/d (рис. 9.14). При обтекании такой задвижки также происходят сужение, а затем расширение потока, отрыв потока от стенок и образование водоворотной области. На границе транзитной струи происходят интенсивное вихреобразование и пульсации скорости. Отношение площади $\omega_п$, перекрытой такой задвижкой, к площади сечения трубы определяется по формуле

$$\omega_п/\omega = 1{,}25a/d - 0{,}25\,(a/d)^4.$$

В табл. 9.6 приведены значения $\zeta_з$ в зависимости от a/d.

Если простая задвижка перекрывает трубу прямоугольного поперечного сечения, коэффициент $\zeta_з$ принимается по табл. 9.7 в зависимости от отношения a/d (d — высота прямоугольного поперечного сечения).

10. К р а н. Для крана, изображенного на рис. 9.15, коэффициент $\zeta_{кр}$ зависит от степени закрытия крана (от угла θ). Значения $\zeta_{кр}$ приведены в табл. 9.8.

Т а б л и ц а 9.6

a/d	0,875	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
$\zeta_з$	97,8	35	10	4,6	2,06	0,98	0,44	0,17	0,06	0,05

Т а б л и ц а 9.7

a/d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\zeta_з$	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

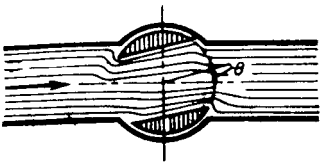


Рис. 9.15

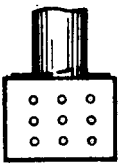


Рис. 9.16

11. Обратный клапан с сеткой (всасывающая коробка с обратным клапаном, рис. 9.16). Коэффициент $\zeta_{к.\,с}$ зависит от диаметра d всасывающих труб насосов (табл. 9.9).

Длина зоны влияния в общем случае зависит от числа Рейнольдса, геометрии и относительных размеров данного местного сопротивления, а также от относительной шероховатости трубопровода (последнее — только при турбулентном движении).

По рекомендации А. Д. Альтшуля длина зоны влияния при турбулентном режиме движения определяется по формуле

$$l_{вл} = 0{,}5d\,\frac{\zeta_{м.\,кв}}{\lambda},$$

где d — диаметр трубопровода; $\zeta_{м.\,кв}$ — коэффициент потерь для данного местного сопротивления в квадратичной области; λ — коэффициент Дарси.

Эквивалентная длина. Для упрощения расчета трубопроводов часто используют понятие о так называемой эквивалентной длине местного сопротивления, т. е. об участке данного трубопровода такой длины, на которой потери напора по длине равны местной потере напора:

$$h_м = \zeta_м \frac{v^2}{2g} = h_{дл.\,экв} = \lambda \frac{l_{экв}}{d} \frac{v^2}{2g},$$

или

$$l_{экв}/d = \zeta_м/\lambda.$$

Взаимное влияние местных сопротивлений. Расположение конструктивных элементов на расстоянии, меньшем длины зоны влияния, приводит к их интерференции (взаимному влиянию), что обусловлено изменением распределения кинематических характеристик за данным элементом и на подходе к элементу, расположенному ниже по течению.

Таблица 9.8

θ, град	5	10	20	30	40	50	60	65	82,5
$\zeta_{кр}$	0,05	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	$\sim$

Таблица 9.9

d, мм	40	50	75	100	125	150	200	250	300	400	500	750
$\zeta_{к.\,с}$	12	10	8	7	6,5	6	5,2	4,5	3,7	3	2,5	1,6

Интерференция в зависимости от расстояния между взаимно влияющими местными элементами приводит к тому, что суммарный коэффициент $\zeta_м$ может быть и меньше, и больше арифметической суммы коэффициентов $\zeta_м$ каждого из сопротивлений.

Влияние вибрации трубопровода на коэффициенты местных сопротивлений. Исследования этого влияния сейчас становятся все более актуальными в связи с увеличением числа гидравлических систем, работающих в условиях вибраций (колебаний).

В зависимости от гидравлических условий (в основном характеризуемых значениями числа Рейнольдса) и от амплитудно-частотных характеристик вибраций значения коэффициентов $\zeta_м$ могут увеличиваться или уменьшаться.

Вопросы влияния вибраций и интерференции местных сопротивлений на значения $\zeta_м$ изучены пока недостаточно.

9.4. Коэффициент сопротивления системы

Если трубопровод длиной l имеет на всем протяжении одинаковый диаметр, а движущаяся по этому трубопроводу жидкость встречает n местных источников гидравлических сопротивлений, то суммарные потери напора определятся по формуле

$$h_{тр} = h_{дл} + \sum_{i=1}^{i=n} h_м = \left(\zeta_{дл} + \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_{м\,i}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Выражение, заключенное в скобки, называют коэффициентом сопротивления системы $\zeta_{сист}$. Тогда можно записать

$$h_{тр} = \zeta_{сист} \frac{v^2}{2g}. \qquad (9.9)$$

Если трубопровод состоит из нескольких k участков с различными диаметрами и на каждом из участков имеются местные сопротивления, тогда

$$\Sigma h_{тр} = \sum_{j=1}^{j=k} h_{дк\,i} + \sum_{i=1}^{i=n} h_{м\,i},$$

где n — общее число местных сопротивлений.

Для удобства расчетов рекомендуется выразить все скорости через одну скорость на любом участке трубопровода, например на последнем, k-м (v_k).

Тогда, следуя уравнению неразрывности $v_i\omega_i = v_k\omega_k$ и учитывая (9.7), получаем

$$\zeta_{сист} = \left[\Sigma\zeta_{м1}\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 + \zeta_{дл1}\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2 + \Sigma\zeta_{м2}\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \zeta_{дл2}\left(\frac{\omega_k}{\omega_2}\right)^2 + \ldots + \Sigma\zeta_{м\,k} + \zeta_{дл\,k}\right]. \qquad (9.10)$$

При этом

$$\Sigma h_{\text{тр}} = \zeta_{\text{сист}} \frac{v_k^2}{2g}. \qquad (9.11)$$

В гл. 10 рассмотрен расчет расхода через систему труб и вводится понятие коэффициента расхода $\mu_{\text{сист}}$ (см. § 10. 13).

9.5. Контрольные вопросы и примеры

1. Как определяются местные потери напора в экспериментах?
2. От каких факторов в общем случае зависят значения коэффициентов местных сопротивлений?
3. Каковы особенности движения жидкости на начальных участках? От чего зависит длина начального участка в трубе?
4. Запишите различные виды формул для коэффициента сопротивления при внезапном расширении.
5. Можно ли выражать потерю напора при движении через местное сопротивление по скоростному напору перед этим сопротивлением или за ним? Отражается ли принятие скоростного напора перед местным сопротивлением или за ним на значении потери напора?
6. Какие явления происходят при прохождении жидкости через различные конструктивные элементы — так называемые местные сопротивления? Разберите различные случаи.
7. В каком случае потери напора будут больше — при внезапном расширении или при внезапном сужении труб (соотношение диаметров в обоих случаях одно и то же, другие параметры потока также одинаковы)?
8. Что такое эквивалентная длина местного сопротивления?
9. Поясните понятие «коэффициент сопротивления системы».
10. Может ли неучет взаимного влияния местных сопротивлений привести к ошибке в расчетах потерь напора? Если да, то в каких случаях? А в каких случаях без ущерба для точности расчета можно не учитывать взаимное влияние местных сопротивлений?

Пример 9.1.
Определить расход Q для системы труб (рис. 9.17). Построить линию удельной энергии (напорную линию) и пьезометрическую линию при следующих исходных данных: $d_1 = 100$ мм, $l_1 = 100$ м, $d_2 = 200$ мм, $l_2 = 160$ м, $H = 10$ м, $\lambda_1 = 0{,}025$, $\lambda_2 = 0{,}0215$. На расстоянии 100 м от начала второго из трубопроводов установлена задвижка (относительное закрытие задвижки $a/d = 0{,}6$).

Решение. Для определения расхода составляем уравнение Бернулли для двух сечений *I—I* и *II—II* (плоскость сравнения проведем на уровне оси трубопроводов):

$$H + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} + \frac{\alpha_2^2 v_2^2}{2g} + h_{\text{тр}}.$$

Пренебрегая скоростным напором $\alpha_1 v_1^2/2g$ в резервуаре, получим $H = \alpha_2 v_2^2/2g + h_{\text{тр}}$.

Далее определяем:

1) потери напора по длине в первом трубопроводе $h_{\text{дл}_1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} =$

$$= 0{,}025 \frac{100}{0{,}1} \frac{v_1^2}{2g} = 25 \frac{v_1^2}{2g};$$

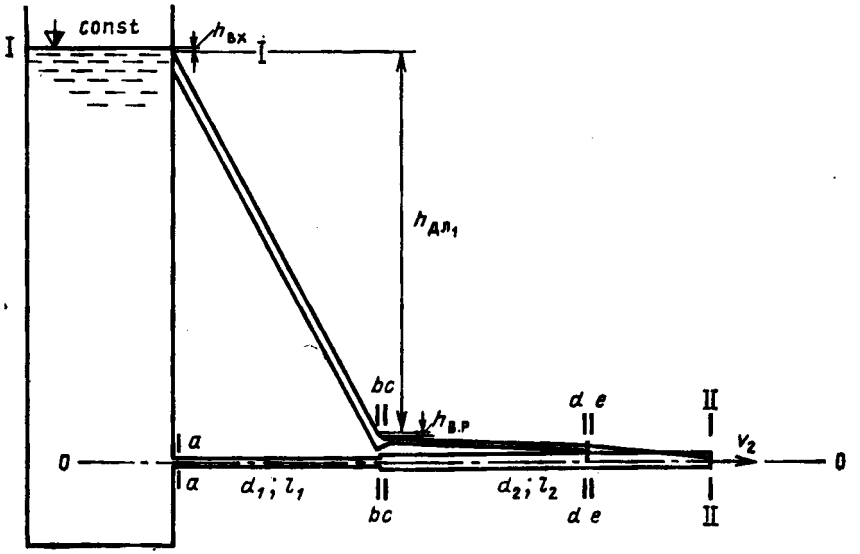


Рис. 9.17

2) потери напора по длине во втором трубопроводе $h_{дл_2} = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} =$

$= 0{,}0215 \frac{160}{0{,}2} \frac{v_2^2}{2g} = 17{,}2 \frac{v_2^2}{2g}$;

3) потери напора на вход в трубу $h_{вх} = \zeta_{вх} \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}5 \frac{v_1^2}{2g}$;

4) потери напора в задвижке $h_з = \zeta_з \frac{v_2^2}{2g} = 4{,}6 \frac{v_2^2}{2g}$,

где $\zeta_з = 4{,}6$ при $a/d = 0{,}6$ (см. табл. 9.6);

5) потери напора на внезапное расширение потока, равные в соответствии с формулой (9.6)

$$h_{в.\,р} = \zeta_{в.\,р2} \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = 9 \frac{v_2^2}{2g}.$$

Согласно (7.1) имеем $h_{тр} = \Sigma h_{дл} + \Sigma h_м$. Тогда $H = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \times$

$\times \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{вх} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{в.\,р2} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_з \frac{v_2^2}{2g}$. В этом уравнении две неизвестные средние скорости v_1 и v_2. Выражаем все потери напора через среднюю скорость во второй трубе, т. е. v_1 через v_2 в соответствии

с уравнением неразрывности $v_1 = v_2 \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 4v_2$; $\dfrac{v_1^2}{2g} = 16\dfrac{v_2^2}{2g}$. Тогда напор можно выразить в таком виде:

$$H = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g}\left[\lambda_1 \frac{l_1}{d_1}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \zeta_{вх}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \zeta_{в.\,р2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + \zeta_з\right].$$

Выражение в скобках, как указано в § 9.4,— коэффициент сопротивления системы, т. е. $h_{тр} = \zeta_{сист}\dfrac{v_2^2}{2g}$. Тогда $H = (\alpha_2 + \zeta_{сист})\dfrac{v_2^2}{2g}$. В соответствии с предварительными расчетами (см. выше) $h_{тр} = 25{,}5\dfrac{v_1^2}{2g} + 30{,}8\dfrac{v_2^2}{2g}$.

С учетом соотношений $v_1^2/2g$ и $v_2^2/2g$ имеем $h_{тр} = (25{,}5\cdot 16 + 30{,}8)\dfrac{v_2^2}{2g} =$

$= 438{,}8\dfrac{v_2^2}{2g}$. Здесь $\zeta_{сист} = 438{,}8$. Следовательно, приняв $\alpha_2 = 1{,}1$, имеем $H = \dfrac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + 438{,}8\dfrac{v_2^2}{2g} = 439{,}9\dfrac{v_2^2}{2g}$. Отсюда скорость истечения из второй трубы $v_2 = \sqrt{\dfrac{2gH}{439{,}9}} = 0{,}668$ м/с.

Тогда

$$Q = \omega_2 v_2 = 0{,}668\cdot 0{,}785\cdot 0{,}2^2 = 0{,}02097 \text{ м}^3/\text{с} = 20{,}97 \text{ л/с}.$$

Средняя скорость в первой трубе равна $v_1 = 2{,}671$ м^3/с. Значения скоростных напоров в первой и второй трубах равны $v_1^2/2g = 0{,}363$ м; $v_2^2/2g = 0{,}023$ м.

Тогда потери удельной энергии (потери напора): потери на вход $h_{вх} = 0{,}5\cdot 0{,}364 = 0{,}181$ м; по длине первой трубы $h_{дл\,1} = 25\cdot 0{,}363 = 9{,}08$ м; на внезапное расширение $h_{в.\,р} = 9\cdot 0{,}023 = 0{,}207$ м; в задвижке $h_з = 4{,}6\times$ $\times\, 0{,}023 = 0{,}106$ м; по длине второй трубы $h_{дл2} = 17{,}2\cdot 0{,}023 = 0{,}396$ м. Суммарные потери напора $h_{тр} = 9{,}97$ м.

Проверка показывает, что (при $\alpha_2 = 1{,}1$) $\dfrac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{тр} = 9{,}995$ м $\approx$ ≈ 10 м. Точность расчета можно считать достаточной.

Для построения напорной линии (линии удельной энергии) составляем уравнение Бернулли для сечения $I-I$ и произвольного сечения $x-x$ (рис. 9.17) относительно выбранной плоскости сравнения 0—0 (коэффициент Кориолиса принят равным единице):

$$H + \frac{p_{ат}}{\rho g} = z_x + \frac{p_x}{\rho g} + \frac{v_x^2}{2g} + h_{тр_{I-x}},$$

откуда находим удельную энергию в сечении $x-x$

$$z_x + \frac{p_x - p_{ат}}{\rho g} + \frac{v_x^2}{2g} = H - h_{тр_{I-x}},$$

где $h_{\text{тр}I-x}$ — потери напора на участке потока от сечения $I—I$ до рассматриваемого сечения $x—x$; $(p_x—p_{\text{ат}})/\rho g = p_{x_{\text{и}}}/\rho g$ — пьезометрическая высота, соответствующая избыточному давлению.

Таким образом, для определения значения удельной энергии в заданном сечении $x—x$ необходимо вычесть из n сумму потерь напора на участке потока $I—x$. Определяем значения удельной энергии в шести расчетных сечениях: $a—a$, $b—b$, $c—c$, $d—d$, $e—e$ и $II—II$ (рис. 9.17).

Сечение $a—a$: $z_x + \dfrac{p_{x_{\text{и}}}}{\rho g} + \dfrac{v_x^2}{2g} = H - h_{\text{вх}} = 10 - 0{,}181 = 9{,}819$ м.

Сечение $b—b$: $z_x + \dfrac{p_{x_{\text{и}}}}{\rho g} + \dfrac{v_x^2}{2g} = 9{,}819 - 9{,}08 = 0{,}739$ м.

Сечение $c—c$: $z_x + \dfrac{p_{x_{\text{и}}}}{\rho g} + \dfrac{v_x^2}{2g} = 0{,}739 - 0{,}207 = 0{,}532$ м.

Сечение $d—d$: $z_x + \dfrac{p_{x_{\text{и}}}}{\rho g} + \dfrac{v_x^2}{2g} = 0{,}532 - 0{,}198 = 0{,}334$ м.

Сечение $e—e$: $z_x + \dfrac{p_{x_{\text{и}}}}{\rho g} + \dfrac{v_x^2}{2g} = 0{,}334 \cdot 2 \cdot 0{,}106 = 0{,}228$ м.

Сечение $II—II$: $z_x + \dfrac{p_{x_{\text{и}}}}{\rho g} + \dfrac{v_x^2}{2g} = 0{,}228 - 0{,}198 = 0{,}03$ м.

Для определения ординаты $z_x + \dfrac{p_x - q_{\text{ат}}}{\rho g}$ пьезометрической линии (линии удельной потенциальной энергии) необходимо из значения удельной энергии в каждом сечении $x—x$ вычесть значение скоростного напора $v_x^2/2g$.

По приведенным данным на рис. 9.17 построены линия удельной энергии (напорная линия) и пьезометрическая линия.

Пример 9.2. Определить расход через систему труб, которые соединяют два резервуара с постоянными отметками свободной поверхности (рис. 9.18). Основные исходные данные см. в примере 9.1.

Решение. Составим уравнение Бернулли для сечений $I—I$ и $II—II$, принимая за плоскость сравнения сечение $II—II$. Пренебрегая скоростными напорами в этих сечениях, получим

$$H + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} = 0 + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} + h_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad H = h_{\text{тр}}.$$

В данном случае к потерям напора, рассмотренным в примере 9.1, добавится потеря напора на выход. При этом $h_{\text{вых}} = \zeta_{\text{вых}} \dfrac{v^2}{2g}$. Имеем $h_{\text{тр}} = \zeta_{\text{сист}} \dfrac{v^2}{2g}$. Используя вычисления, выполненные в примере 9.1, найдем $\zeta_{\text{сист}} = 438{,}8 + \zeta_{\text{вых}} = 439{,}8$. Тогда $v_2 = \sqrt{2gH}\,/\sqrt{\zeta_{\text{сист}}} = 0{,}517$ м/с.

Расход через систему труб равен $Q = v_2\omega_2 = 0{,}517 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}0162$ м³/с $= 16{,}2$ л/с.

Следует обратить внимание на некоторое различие в определении напора при свободном истечении (пример 9.1) из второй трубы в атмосферу

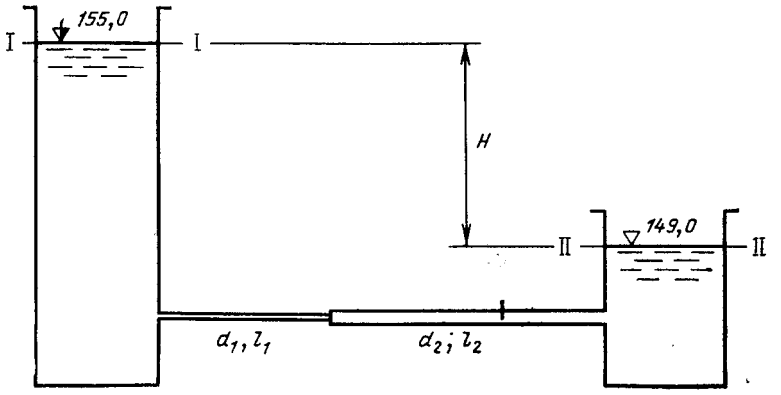


Рис. 9.18

и при истечении из второй трубы под уровень воды в резервуар (в данном примере). В последнем случае, если не учитывать скоростные напоры, напор рассматривается как разность отметок уровней в резервуарах, которые соединены трубами.

Пример 9.3. Определить расход, подаваемый с помощью сифона из водохранилища A в канал B (рис. 9.19). Разность отметок уровней свободной поверхности в водохранилище и в канале равна 2,5 м. Длина сифона $l = 100$ м; диаметр сифона $d = 0{,}3$ м. Трубы стальные, после нескольких лет эксплуатации, загрязненные, осредненное значение высоты выступа шероховатости (эквивалентная шероховатость) $\Delta_э = 1{,}5$ мм. Температура воды равна 12 °С. Глубины погружения начала и конца трубы-сифона равны $h_1 = 3$ м и $h_2 = 1{,}5$ м. Ось горизонтальной трубы-сифона расположена выше уровня воды в водохранилище на $s = 2$ м. Поворот труб — плавный, относительный радиус закругления $\frac{R_0}{d} = 2$ (см. рис. 9.10). Скоростными напорами в водохранилище и в канале пренебречь. Определить, в каком сечении вакуумметрическое давление будет наибольшим.

Решение. Составим уравнение Бернулли для сечений *I—I* и *II—II*, т. е. по свободной поверхности (горизонтальная плоскость сравнения — сечение *II—II*):

$$H + \frac{p_{ат}}{\rho g} = \frac{p_{ат}}{\rho g} + h_{тр},$$

отсюда $H = h_{тр}$, где по (7.1) $h_{тр} = \Sigma h_{дл} + \Sigma h_м$.

Определим значения коэффициентов сопротивлений — как местных, так и по длине. Коэффициент сопротивления для сетки с обратным клапаном для $d = 0{,}3$ м принимаем равным $\zeta_{к.\,с} = 3{,}7$ (см. табл. 9.9). Коэффициент сопротивлений плавного поворота на 90° с относительным радиусом закругления $R_0/d = 2$ равен $\zeta_{пов} = 0{,}15$ (см. рис. 9.12; § 9.3, п. 7б), так как $\zeta_{пов} = AB$; в данных условиях $A = 1$; $B = 0{,}15$. Коэффициент сопротивления при выходе из трубы $\zeta_{вых} = 1$.

Значение коэффициента λ определим несколькими способами. Так как расход и, следовательно, скорость неизвестны, то вначале предположим, что область сопротивления — квадратичная, т. е. коэффициент λ не зависит от числа Рейнольдса.

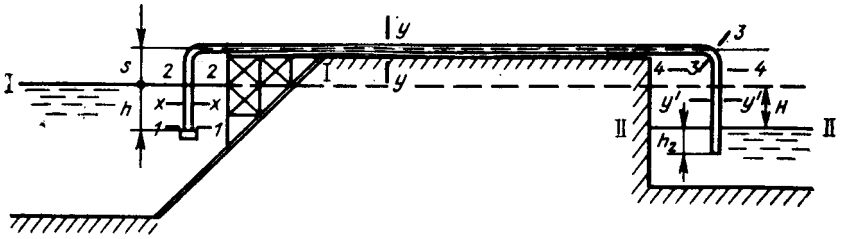


Рис. 9.19

Найдем коэффициент Шези по формуле Агроскина (8.51), приняв по табл. П.8.1 значение коэффициента шероховатости для загрязненных водопроводных труб $n = 0{,}014$.

Тогда $C = \dfrac{1}{n} + 17{,}72 \lg R = 71{,}43 + 17{,}72 \lg 0{,}075 =$

$= 71{,}43 + 17{,}72 (-1{,}125) = 51{,}5$ м^{0,5}/с, где $R = d/4 = 0{,}075$ м.

Отсюда

$$\lambda_{кв} = 8g/C^2 = 78{,}48/51{,}5 = 0{,}0296.$$

При относительной гладкости $d/\Delta = 300/1{,}5 = 200$ по графику на рис. 8.13 в квадратичной области найдем $\lambda_{кв} = 0{,}0303$.

Из формулы (8.47), полагая $\Delta_э = \Delta$, при пренебрежимо малом значении слагаемого 68/Re (предположение) имеем

$$\lambda_{кв} = 0{,}11 \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0,25} = 0{,}0293.$$

Таким образом, получены достаточно близкие значения коэффициента λ.

Принимаем для дальнейших расчетов $\lambda_{кв} = 0{,}0295$. Из исходного уравнения Бернулли $H = h_{тр}$ или

$$H = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_{к.\,с} + 2\zeta_{пов} + \zeta_{вых}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Подставим значения коэффициентов сопротивлений: $H = \left(0{,}0295 \dfrac{1000}{0{,}3} + \right.$

$\left. + 3{,}7 + 2 \cdot 0{,}15 + 1\right) v^2/2g$, т. е. $H = 14{,}833\, v^2/2g$. Средняя скорость в трубе-сифоне $v = \sqrt{2gH/14{,}833} = 1{,}818$ м/с. Теперь необходимо уточнить, правильным ли было наше предположение о том, что область сопротивления — квадратичная. Найдем значение числа Рейнольдса при вычисленной средней скорости $v = 1{,}818$ м/с

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{181{,}8 \cdot 30}{0{,}0124} = 439\,838,$$

приняв для $t = 12$ °С значение $\nu = 0{,}0124$ см^2/с (табл. 1.6).

Определим по (8.46) значение $\mathrm{Re}_{кв}$, при превышении которого наступает квадратичная область сопротивления:

$$\mathrm{Re}_{кв} = 22{,}3C \frac{d}{\Delta} = 22{,}3 \cdot 51{,}5 \frac{0{,}3}{0{,}015} = 229\,690.$$

Так как $\mathrm{Re} = 439\,838 > \mathrm{Re}_{кв} = 229\,690$, то предположение о том, что область сопротивления квадратичная, подтвердилось.

Найдем расход: $Q = \omega v = 0{,}785\, d^2 \cdot v = 0{,}785 \cdot 0{,}3^2 \cdot 1{,}818 = 0{,}1284$ м^3/с = = 128,4 л/с. Отметим, что для труб с естественной шероховатостью $\mathrm{Re}_{\text{кв}} \cong 500\, d/\Delta_э = 500\ (0{,}3/0{,}0015) = 100\,000$, т. е. по этому значению критерия квадратичная область для труб промышленного изготовления наступает при меньших значениях Re, чем для труб с разнозернистой шероховатостью.

Перейдем к рассмотрению давлений в жидкости внутри трубопровода. Вначале определим, каким будет давление в различных сечениях вертикальной трубы во входной ее части между сечениями *1—1* и *2—2*, т. е. в погруженном участке трубы. Составим уравнение Бернулли для сечения *1—1* (свободная поверхность в водохранилище) и произвольного сечения *x—x* (внутри трубы). Плоскость сравнения совпадает с горизонтальной плоскостью, проходящей по сечению *1—1*, т. е. сразу при входе в трубу, непосредственно за сеткой с обратным клапаном. Имеем $h_1 + \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} = z_x + \frac{p_x}{\rho g} + \frac{\alpha_x v^2}{2g} + h_{\text{тр}1-x}$, где $h_{\text{тр}1-x}$ — потери напора (удельной энергии) в трубе между сечениями *1—1* и *x—x*.

Тогда $\frac{p_x - p_{\text{ат}}}{\rho g} = h_1 - \left(z_x + \frac{\alpha_x v^2}{2g} + h_{\text{тр}1-x}\right)$.

Таким образом, до тех пор, пока $h_1 > z_x + \frac{\alpha_x v^2}{2g} + h_{\text{тр}1-x}$, давление внутри трубы в сечениях между *1—1* и *2—2* будет избыточным, т. е. $p_x > p_{\text{ат}}$.

При $h_1 = z_x + \frac{\alpha_x v^2}{2g} + h_{\text{тр}1-x}$ давление в сечении *x—x* равно атмосферному. И, наконец, при $h_1 < z_x + \frac{\alpha_x v^2}{2g} + h_{\text{тр}1-x}$ давление в сечении *x—x* меньше атмосферного и в трубе будет наблюдаться вакуум, т. е. $p_x < p_{\text{ат}}$. Строго говоря, коэффициент кинетической энергии в различных сечениях рассматриваемого входного участка трубы (который можно считать начальным) (см. § 9.2) может быть различным.

Для упрощения дальнейших вычислений примем $\alpha_x = 1$, что возможно в данном случае без снижения точности расчета. Примем $v = 1{,}818$ м/с = = 1,82 м/с; тогда $\frac{v^2}{2g} = 0{,}169$ м. В сечении *1—1* имеем

$$\frac{p_1 - p_{\text{ат}}}{\rho g} = h_1 - \left(0 + \frac{v^2}{2g} + \zeta_{\text{к. с}} \frac{v^2}{2g}\right) =$$

$$= h_1 - \frac{v^2}{2g}(1 + \zeta_{\text{к. с}}) = h_1 - 4{,}7\,\frac{v^2}{2g} = 2{,}21 \text{ м},$$

т. е. давление в сечении *1—1* превышает атмосферное, является избыточным. Найдем, на каком расстоянии l_1 от сечения *1—1* находится сечение, в котором давление станет равным атмосферному. Как указывалось выше, это будет наблюдаться при условии

$$h_1 = z_x + \frac{v^2}{2g} + h_{\text{тр}1-x} \text{ или } h_1 = l_1 + \frac{v^2}{2g}\left(1 + \zeta_{\text{к. с}} + \lambda \frac{l}{d}\right), \text{ где } z_x = l_1.$$

Отсюда

$$l_1 + \lambda_1 \frac{l_1 v^2}{d 2g} = h_1 - \frac{v^2}{2g}(1 + \zeta_{\text{к. с}})$$

или

$$l_1\left(1 + \frac{\lambda v^2}{2gd}\right) = h_1 - \frac{v^2}{2g}(1 + \zeta_{\text{к. с}}).$$

Подставляя необходимые значения, получаем

$$l_1\left(1+\frac{0{,}0295\cdot 0{,}169}{0{,}3}\right)=3-0{,}169\cdot 4{,}7=2.17\ \text{м}.$$

Обратим внимание на то, что принятое значение коэффициента $\lambda = 0{,}0295$ соответствует равномерному движению в трубе. Здесь сделано допущение, так как рассчитываемый входной участок в действительности характеризуется движением, отличающимся от равномерного (см. § 9.2). Найдем, каково будет значение давления внутри трубы в сечении *2—2*. Расстояние между сечениями *1—1* и *2—2* равно h_1. Тогда

$$h_1+\frac{p_{ат}}{2g}=h_1+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}\left(1+\zeta_{к.\,с}+\lambda\frac{h_1}{d}\right);$$

$$h_{вак2}=\frac{p_{ат}-p_2}{\rho g}=0{,}169\left(1+3{,}7+0{,}0295\frac{3}{0{,}3}\right)=0{,}84\ \text{м},$$

т. е. в сечении *2—2* вакуумметрическое давление равно

$$p_{ат}-p_2=p_{вак2}=\rho g h_{вак2}=9810\cdot 0{,}84=8240\ \text{Н/м}^2=$$

$$=8{,}24\ \text{кН/м}^2=8{,}24\ \text{кПа}.$$

В сечениях *y—y* трубопровода, расположенных в пределах его горизонтальной части, имеем

$$\frac{p_{ат}}{\rho g}=s+\frac{p_y}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}\left(1+\zeta_{к.\,с}+\zeta_{пов}+\lambda\frac{l_{1-y}}{d}\right),$$

где уравнение Бернулли составлено для сечений *1—1* (по свободной поверхности) и *y—y*. Плоскость сравнения совпадает с сечением *1—1*. Тогда

$$\frac{p_{ат}-p_y}{\rho g}=s+\frac{v^2}{2g}\left(1+\zeta_{к.\,с}+\zeta_{пов}+\lambda\frac{l_{1-y}}{d}\right).$$

Очевидно, что в сечении *y—y* давление будет меньше атмосферного, т. е. будет наблюдаться вакуум.

Последнее уравнение показывает, что значение вакуума в пределах горизонтальной части трубы будет увеличиваться в связи с увеличением расстояния l_{1-y}. Так как наибольшее значение l_{1-y} из всех возможных будет в сечении *3—3*, где $l_{1-y} = 91$ м, то в этом сечении и будет наблюдаться наибольшее значение вакуумметрического давления:

$$h_{вак3}=\frac{p_{ат}-p_3}{\rho g}=2+0{,}169\left(1+3{,}7+0{,}15+0{,}0295\frac{91}{0{,}3}\right)=4{,}33\ \text{м}.$$

Соответственно $p_{вак3}=\rho g h_{вак3}=9810\cdot 4{,}33=42\,477\ \text{Н/м}^2=42{,}48\ \text{кН/м}^2+$ $=42{,}48$ кПа. В сечениях, расположенных ниже сечения *3—3*, значения вакуума будут меньше, чем свидетельствует уравнение Бернулли, составленное для сечений *1—1* и *y′—y′*:

$$\frac{p_{ат}-p'_y}{\rho g}=h_{y'}+\frac{v^2}{2g}\left(1+\zeta_{к.\,с}+2\zeta_{пов}+\lambda\frac{l_{1-y'}}{d}\right).$$

Очевидно, что на 1 м длины трубопровода потери напора по длине увеличиваются на $0{,}0295\frac{1}{0{,}3}0{,}169=0{,}0166$ м, в то время как значение h'_y уменьшается, естественно, на 1 м. Добавление же значения потерь напора

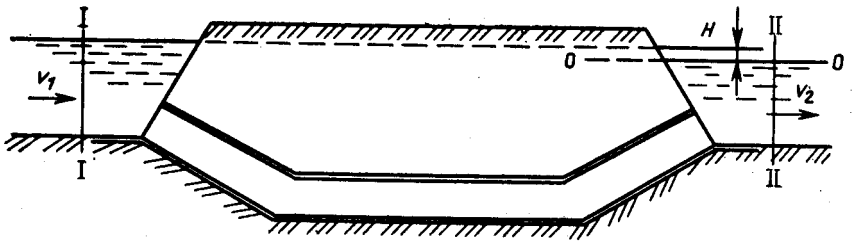


Рис. 9.20

на втором повороте не компенсирует этого. Например, в сечении *4—4*, расположенном от уровня сечения *1—1* на $h_4 = s - 1 = 1$ м, имеем

$$\frac{p_{ат} - p_4}{\rho g} = 1 + \frac{v^2}{2g}\left(1 + \zeta_{к.\,с} + 2\zeta_{пов} + \lambda\frac{l_3 + 1}{d}\right) \text{ или}$$

$$h_{вак4} = \frac{p_{ат} - p_4}{\rho g} = 1 + 0{,}169\,(1 + 3{,}7 + 2 \cdot 0{,}15 + 0{,}0295 \cdot 92/0{,}3) =$$

$$= 3{,}37 \text{ м или } p_{вак4} = \rho g h_{вак4} = 9810 \cdot 3{,}37 = 33\,060 \text{ Н/м}^2 =$$

$$= 33{,}06 \text{ кН/м}^2 = 33{,}06 \text{ кПа}.$$

В сечениях, расположенных еще ниже по течению, вакуум будет уменьшаться и в некотором сечении вакуум станет равным нулю, т. е. давление в трубе сравняется с атмосферным давлением. Рекомендуем самостоятельно определить, в каком сечении выходной вертикальной части трубы давление станет равным атмосферному.

Пример 9.4. Определить расход, проходящий через железобетонный дюкер диаметром $d = 2$ м (рис. 9.20). Разность уровней воды на подводящем и отводящем участках канала, на котором сооружен дюкер, равна $H = 0{,}3$ м. Длина дюкера $l = 60$ м, скорость в подводящем к дюкеру участке канала $v_1 = 0{,}8$ м/с, в отводящем участке канала $v_2 = 0{,}9$ м/с. Углы поворота $\theta = 30°$; эквивалентная шероховатость $\Delta_э = 1{,}6$ мм; температура воды $t = 14$ °С.

Для решения составим уравнение Бернулли для сечений *I—I* и *II—II*. Плоскость сравнения 0—0 совпадает с уровнем свободной поверхности в отводящем канале.

В сечениях *I—I* и *II—II* назначим произвольные точки для составления уравнения Бернулли на свободной поверхности, где давление — атмосферное.

Тогда

$$H + \frac{p_{ат}}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_{ат}}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{тр}$$

или

$$H = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + h_{тр}.$$

Приняв $\alpha_1 = \alpha_2 = 1{,}1$, получим

$$H = \frac{1{,}1 \cdot 0{,}9^2}{19{,}62} - \frac{1{,}1 \cdot 0{,}8^2}{19{,}62} + h_{тр} = 0{,}0095 + h_{тр}.$$

Далее $H = 0{,}0095 + h_{тр} = 0{,}0095 + \frac{v^2}{2g}\left(\zeta_{вх} + 2\zeta_{пов} + \zeta_{вых} + \lambda\frac{l}{d}\right)$.

Принимаем $\zeta_{вх} = 0{,}5$; $\zeta_{пов} = 0{,}16$ (табл. 9.3); $\zeta_{вых} = 1$; $\lambda_{кв} = 0{,}11 \times \left(\frac{\Delta_э}{d}\right)^{0{,}25} = 0{,}0185$. Последнее значение найдено в предположении, что область сопротивления — квадратичная при $\Delta_э/d = 1/1250$. Тогда $2g\,(H - 0{,}0095) = v^2 \cdot 1{,}838$ или $v = \sqrt{\frac{19{,}62 \cdot 0{,}29}{1{,}838}} = 1{,}76$ м/с.

Расход $Q = v\omega = 1{,}76 \cdot 0{,}785 \cdot 2^2 = 5{,}52$ м/с.

Найдем значение числа Рейнольдса, приняв при $t = 14$ °С значение $\nu = 0{,}0118$ см²/с (см. табл. 1.6): $Re = vd/\nu = 176 \cdot 200/0{,}0118 = 2{,}983 \cdot 10^6$. При таких значениях числа Рейнольдса и относительной шероховатости область сопротивления, действительно, будет квадратичной (см. рис. 8.13). Соответственно найденные значения средней скорости и расхода являются для заданных условий окончательными.

Глава 10

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ

10.1. Истечение через малое незатопленное отверстие с острой кромкой

Рассмотрим истечение жидкости плотностью ρ из резервуара через малое незатопленное отверстие (рис. 10.1, *а*). Глубина погружения центра тяжести отверстия под свободной поверхностью равна H (напор).

Истечение происходит при постоянном напоре, т. е. уровень жидкости в резервуаре является неизменным. Это возможно, если свободная поверхность жидкости занимает большую площадь (рис. 10.1, *б*) или если в резервуар подается такой же расход, что и вытекает через отверстие (рис. 10.1, *а*).

При постоянном напоре скорости истечения будут неизменными во времени, т. е. движение будет установившимся. При этом линии тока и траектории движения частиц жидкости совпадают.

Малым отверстием называется такое, у которого наибольший вертикальный размер d не превышает $0{,}1\,H$. При выполнении этого условия скорости на верхней и нижней границах вытекающей из отверстия струи можно считать одинаковыми.

Пусть свободная поверхность жидкости в резервуаре находится под давлением p_0. Истечение происходит в газовую среду с давлением p_c через незатопленное отверстие с острой кромкой.

Траектории частиц при приближении к отверстию искривляются. Действующая центробежная сила направлена внутрь формирующейся струи. Сечения струи постепенно уменьшаются. Сжатие продолжается и на некотором расстоянии от плоской стенки после выхода струи из резервуара. Движение жидкости на этом участке вблизи стенки неравномерное. Живые сечения потока на этом участке криволинейные, постепенно уменьшающиеся. По мере удаления от отверстия кривизна линий тока уменьшается, и на неко-

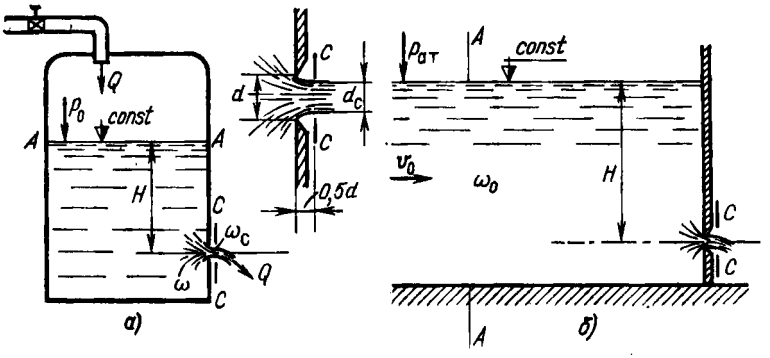


Рис. 10.1

тором расстоянии от стенки движение приближается к плавно изменяющемуся.

В связи с криволинейностью линий тока давление и местные скорости в сечениях струи на участке сужения изменяются весьма сложно.

Опыты, проведенные Базеном, показали, что при истечении через незатопленное отверстие с острой кромкой в горизонтальном дне открытого сосуда в плоскости отверстия избыточное давление изменяется от нуля у краев отверстия (т. е. $p = p_{ат}$) до $0{,}59\rho gH$ в центре отверстия (H — напор).

Местная скорость, равная в центре отверстия $u \approx 0{,}64\sqrt{2gH}$, постепенно увеличивается до $u \approx \sqrt{2gH}$ на кромке отверстия. При этом сумма удельной потенциальной и удельной кинетической энергии для всех точек плоскости сечения отверстия практически остается постоянной:

$$p/\rho g + u^2/2g = \text{const}.$$

Ближайшее к отверстию сечение струи, в котором движение может быть принято плавно изменяющимся, находится на расстоянии примерно 0,5 d от внутренней поверхности стенки резервуара. Это сечение называется с ж а т ы м с е ч е н и е м струи.

Скорости во всех точках сжатого живого сечения можно считать параллельными и в силу малости отверстия одинаковыми.

Коэффициент сжатия есть отношение площади сжатого живого сечения ω_c к площади отверстия ω:

$$\varepsilon = \omega_c/\omega. \qquad (10.1)$$

Ниже сжатого сечения живые сечения струи изменяются слабо и жидкость движется в виде компактной струи. На достаточно большом расстоянии от отверстия в связи с насыщением струи воздухом (аэрация) струя начинает дробиться и теряет компактность.

Чтобы получить формулы для определения скорости и расхода, применим уравнение Бернулли (5.21). Составим его для сечений, движение в которых можно считать плавно изменяющимся. Выбе-

рем сечения $A—A$ в резервуаре (см. рис. 10.1, *а*, *б*) и сжатое сечение струи $C—C$. В сжатом сечении давления не распределяются по гидростатическому закону, так как здесь $p = \text{const}$. Но для малого отверстия этим можно пренебречь и принять в пределах сечения справедливым соотношение $z + p/\rho g = \text{const}$. Горизонтальную плоскость сравнения удобно провести через центр сжатого сечения. Тогда

$$H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_{тр}, \qquad (10.2)$$

где H — глубина погружения центра тяжести выходного отверстия в стенке резервуара; p_0 и p_c — давление в выбранных точках в сечениях $A—A$ и $C—C$; v_0 и v_c — средняя скорость движения жидкости соответственно в сечениях $A—A$ и $C—C$; $h_{тр}$ — потери напора на участке между сечениями $A—A$ и $C—C$.

Потери удельной энергии (в данном случае местные потери) здесь выразим как

$$h_{тр} = \zeta_{о.к} \frac{v_c^2}{2g},$$

где $\zeta_{о.к}$ — коэффициент потерь при истечении из отверстия с острой кромкой.

Перенеся известные члены уравнения в его левую часть (10.2), получим

$$H + \frac{p_0 - p_c}{\rho g} = (\alpha_c + \zeta_{о.к}) \frac{v_c^2}{2g} - \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}.$$

Учитывая, что по уравнению неразрывности $v_c \omega_c = v_0 \omega_0$ или $v_c \varepsilon \omega = v_0 \omega_0$ (ω_0 — площадь сечения резервуара $A—A$), имеем

$$H + \frac{p_0 - p_c}{\rho g} = \left[\alpha_c + \zeta_{о.к} + \alpha_0 \left(\frac{\varepsilon \omega}{\omega_0}\right)^2\right] \frac{v_c^2}{2g}.$$

Отсюда в общем случае ($p_0 \neq p_c$)

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_{о.к} - \alpha_0 (\varepsilon \omega / \omega_0)^2}} \sqrt{2g\left(H + \frac{p_0 - p_c}{\rho g}\right)}. \qquad (10.2а)$$

В большинстве случаев в гидротехнической практике происходит истечение в атмосферу ($p_c = p_{ат}$) из сосудов или резервуаров, на свободной поверхности которых $p_0 = p_{ат}$ (10.1, *б*), т. е. $p_0 = p_c = p_{ат}$.

Тогда для средней скорости в сжатом сечении получим

$$v_c = \varphi_0 \sqrt{2gH}, \qquad (10.3)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_{о.к} - \alpha_0 (\varepsilon \omega / \omega_0)^2}}. \qquad (10.3а)$$

Этот множитель называется коэффициентом скорости.

Определим расход с учетом (10.1):

$$Q = \omega_c v_c = \varepsilon \omega v_c.$$

Используя (10.3), получаем

$$Q = \varepsilon \varphi_0 \omega \sqrt{2gH}$$

или

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gH}, \qquad (10.4)$$

где μ_0 — произведение коэффициента сжатия ε и коэффициента скорости φ_0 — называется коэффициентом расхода.

Зная коэффициенты ε и φ_0, а также ω, ω_0 и H, можно вычислить расход Q по (10.4).

Коэффициент скорости φ_0 отражает влияние распределения скоростей в сжатом сечении (коэффициент Кориолиса α_c), потерь напора (коэффициент $\varphi_{0.\,к}$) и соотношения площадей $\varepsilon\omega = \omega_c$ (в сжатом сечении) и ω_0 (в сечении A—A в резервуаре).

Часто при $p_0 = p_c$ формулу для средней скорости в сжатом сечении из (10.2) получают в виде

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH_0}, \qquad (10.5)$$

где выражение $H_0 = H + \dfrac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ называется напором с учетом скорости подхода v_0;

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_{0.\,к}}}. \qquad (10.5а)$$

Множитель φ, так же как и φ_0, называется коэффициентом скорости. Коэффициент скорости φ отражает влияние распределения скоростей в сжатом сечении (α_c) и потерь напора ($\zeta_{0.\,к}$).

Для расхода запишем

$$Q = \omega_c v_c,$$

или с учетом (10.1) и (10.5)

$$Q = \varepsilon \varphi \omega \sqrt{2gH_0};$$

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}. \qquad (10.6)$$

В невязкой (идеальной) жидкости сопротивления отсутствуют: $h_{тр} = 0$; $\zeta_{0.\,к} = 0$; $\alpha_c = 1$; $\varphi = 1$. При движении вязкой жидкости имеются потери напора: $\zeta_{0.\,к} > 0$, $\alpha_c > 1$, $\varphi < 1$. Обычно условно принимается $\alpha_c = 1$, хотя распределение скоростей в пределах сжатого сечения, строго говоря, неравномерное.

Таблица 10.1

H, м	$v_т = \sqrt{2gH}$, м/с	H, м	$v_т = \sqrt{2gH}$, м/с	H, м	$v_т = \sqrt{2gH}$, м/с
0,1	1,4	1	4,43	7,5	12,13
0,2	1,98	2	6,26	10	14
0,3	2,43	3	7,67	15	17,16
0,5	3,13	4	8,86	20	19,81
0,75	3,83	5	9,9	25	22,51

В тех случаях, когда можно пренебречь влиянием соотношения площадей $\varepsilon\omega$ к ω_0 или влиянием скоростного напора $\alpha_0 v_0^2/2g$, в расчетах используются только коэффициент скорости $\varphi = 1/\sqrt{\alpha_c + \zeta_{о.к}}$ и коэффициент расхода $\mu = \varepsilon\varphi$

Тогда основные расчетные формулы принимают вид

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH}\,; \tag{10.7}$$

$$Q = \mu\omega \sqrt{2gH}\,. \tag{10.8}$$

В § 10.3 будет показано, что такие условия для малых отверстий с острой кромкой соответствуют $\omega_0/\omega \geqslant 4$ и наблюдаются, как правило, во всех случаях. При этом разность между φ_0 и φ, а следовательно, и между μ_0 и μ не превышает 1,2 %.

Для ориентации приведем значения средней скорости в сжатом сечении при $\varphi = 1$, обозначив их $v_т$ (табл. 10.1).

При расчете истечения через отверстие рассматриваются три типа задач:

1) определение расхода при известном напоре H и известных размерах отверстия ω;

2) определение напора, необходимого для пропуска заданного расхода Q через отверстие с известными размерами (ω);

3) определение размеров отверстия ω при известных Q и H.

Во всех этих задачах принимают $p_0 = p_c$ и площадь резервуара в сечении $A—A$ известной (ω_0).

Рассмотрим первую задачу. Если использовать для вычисления расхода формулу (10.6), при неизвестной сначала скорости v_0 приходится определять расход в результате ряда приближений. Принимаем $H_0 = H$, находим значение расхода. Затем вычисляем $v_0 = Q/\omega_0$ и $H_0 = H + \alpha_0 v_0^2/2g$. Подставив полученное значение H_0 в (10.6), определим новое значение Q и затем уточним v_0, H_0 и Q.

Расчет заканчивается, когда полученное значение Q отличается от значения Q, найденного в предыдущем приближении, не более чем на принятое заранее значение (например, на 1 %). Неудобства такого расчета очевидны.

В дальнейшем при решении указанных задач при истечении через отверстие в основном следует использовать формулы (10.7) и (10.8).

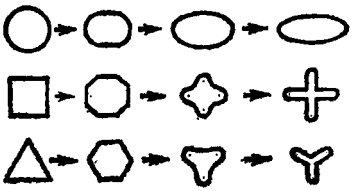


Рис. 10.2

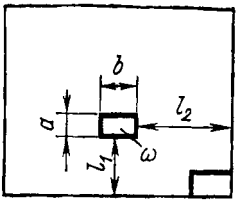


Рис. 10.3

И н в е р с и я с т р у и. Если форма отверстия отличается от круглой, при удалении от отверстия происходит изменение сечения струи, называемое инверсией струи. Наиболее ярко это явление проявляется при истечении через отверстие полигональной формы. На рис. 10.2 показаны несколько примеров, характеризующих и н в е р с и ю с т р у и. При истечении через квадратное отверстие струя постепенно превращается в крест с тонкими прозрачными ребрами, ориентированными нормально к сторонам квадрата. Вытекающая через треугольное отверстие струя постепенно принимает форму звезды с ребрами, перпендикулярными сторонам треугольника. Объясняется это интересное и зрелищно красивое явление совместным действием поверхностного натяжения (благодаря которому углы сначала притупляются, а затем образуются «звезды») и инерции.

10.2. Коэффициенты сжатия, скорости и расхода при истечении через незатопленное малое отверстие

Для вычисления площади, скорости и расхода струи необходимо знать коэффициенты истечения ε, φ и μ. Значения этих коэффициентов могут зависеть от нескольких факторов: формы и кромки отверстия, режима движения жидкости, поверхностного натяжения, а также от положения отверстия относительно стенок резервуара. Значение коэффициента сжатия $\varepsilon = \omega_c/\omega$ для данного отверстия зависит от степени сжатия струи.

П о л н о е с ж а т и е характеризуется тем, что струя вытекающей жидкости испытывает сжатие по всему периметру отверстия.

Н е п о л н о е с ж а т и е происходит в тех случаях, когда струя подвергается сжатию только на некоторой части периметра. Это сможет наблюдаться, например, когда отверстие в вертикальной или наклонной стенке резервуара примыкает непосредственно к дну (отсутствует сжатие по одной из сторон) или отверстие примыкает к дну и расположено в углу резервуара (отсутствует сжатие по двум сторонам).

При расположении отверстия в дне сосуда также может наблюдаться неполное сжатие. И в этом случае вдоль стенки (или стенок) резервуара, вплотную к которым примыкает отверстие, траектории частиц жидкости будут прямолинейными.

В связи с этим при одинаковой площади отверстия и прочих равных условиях площадь сечения, сжатого на некоторой части периметра, $\omega_{с.\ неп}$ больше, чем площадь сечения, сжатого по всему периметру, $\omega_{с.\ полн}$. Отсюда получается, что при неполном сжатии коэффициент сжатия $\varepsilon_{неп} = \omega_{с.\ неп}/\omega$ больше, чем $\varepsilon_{полн} = \omega_{с.\ полн}/\omega$ при полном сжатии (для одинаковых прочих условий истечения).

При полном сжатии различают совершенное и несовершенное сжатие.

Совершенное сжатие характеризуется наибольшей кривизной траекторий крайних струек вытекающей струи и соответственно максимальным сжатием струи. Для получения совершенного сжатия струи отверстие должно быть достаточно удалено от боковых стенок и дна сосуда, а также от свободной поверхности.

Сжатие будет совершенным, если расстояния от любой грани отверстия (рис. 10.3) до стенок и дна резервуара (сосуда) будут больше, чем утроенный соответствующий поперечный размер отверстия, т. е. при $l_1 > 3a$ и $l_2 > 3b$.

Несовершенное сжатие наблюдается при более близком, чем указано, расположении отверстия к направляющим поток стенкам резервуара.

При несовершенном сжатии кривизна траекторий частиц вблизи отверстия меньше, чем при совершенном сжатии. В связи с этим сжатие по соответствующей стороне (близко расположенной к направляющей поток стенке или дну) уменьшается. Следовательно, площадь сжатого сечения при несовершенном сжатии $\omega_{с.\ нес}$ и прочих равных условиях (в том числе и при равной площади отверстия ω) больше, чем при совершенном сжатии $\omega_{с.\ сов}$. Естественно, коэффициент ε при несовершенном сжатии больше, чем ε при совершенном сжатии.

Итак, неполнота или несовершенство сжатия приводит к увеличению коэффициентов сжатия.

В условиях совершенного сжатия процесс истечения происходит под действием сил тяжести, вязкости и поверхностного натяжения, которые отражены (см. § 7.2) соответственно (для круглого отверстия диаметром d) числами Фруда $\mathrm{Fr} = v^2/gd$, Рейнольдса $\mathrm{Re} = vd/\nu$, Вебера $\mathrm{We} = v^2\rho d/\sigma$.

Влияние поверхностного натяжения наглядно демонстрируют опыты, в которых вблизи вытекающей в атмосферу струи воды устанавливали открытый сосуд с эфиром. Эфир испарялся, поверхностное натяжение на поверхности струи уменьшалось, коэффициент сжатия струи заметно увеличивался, соответственно расход Q также увеличивался.

А. Д. Альтшулем предложены следующие выражения для чисел Fr, Re и We:

$$\mathrm{Fr}_H = v^2/gd = 2gH/gd = 2H/d;$$

$$\mathrm{Re}_H = \sqrt{2gH}\, d/\nu;$$

$$\mathrm{We}_H = 2gH\rho d/\sigma,$$

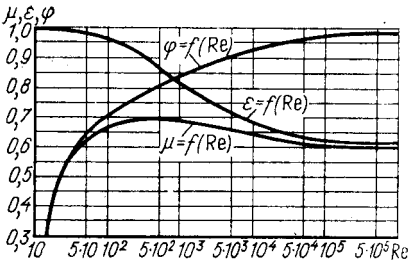


Рис. 10.4

т. е. в (10.7) принято $\varphi = 1$ и, следовательно, $v = \sqrt{2gH}$.

Такой вид выражений для Fr_H, Re_H и We_H удобнее, так как в них входят только известные параметры и не входит расход Q, не известный до выполнения расчетов (в Fr, Re и We входит $v = Q/\omega$). Коэффициенты расхода, скорости и сжатия в общем случае для отверстия с острой кромкой являются функциями чисел Рейнольдса, Фруда и Вебера.

Многочисленные экспериментальные исследования истечения через отверстия различных жидкостей позволили А. Д. Альтшулю установить, что коэффициенты расхода μ при истечении через незатопленные круглые малые отверстия практически не зависят от влияния сил тяжести и поверхностного натяжения (т. е. наступает область, практически автомодельная относительно чисел Fr и We) при соблюдении условий

$$\mathrm{Fr}_H = 2H/d > 10,$$

т. е. при $H/d > 5$, и

$$\mathrm{We}_H = 2gH\rho d/\sigma > 2500.$$

Полученные зависимости ε, φ и μ при совершенном сжатии от Re_H представлены на рис. 10.4. Как видно, с увеличением Re_H до 10^5 коэффициент скорости φ растет, при дальнейшем увеличении Re_H значения φ могут считаться постоянными и равными $\varphi = 0{,}97$.

Коэффициент сжатия ε с ростом Re_H уменьшается, а при $\mathrm{Re}_H > 10^5$ коэффициент ε также может считаться постоянным и приниматься равным для совершенного сжатия 0,61—0,64.

Зависимость μ от Re_H достаточно сложная. Вначале при небольших значениях Re_H коэффициент μ растет, достигает максимума, а затем уменьшается, приближаясь при больших Re_H к постоянному значению, приблизительно равному 0,6.

При $\mathrm{Re}_H > 10^5$ можно считать, что для круглого отверстия μ не зависит от Re_H (наступает автомодельная область относительно Re_H). Точнее, μ перестает зависеть от Re_H при $\mathrm{Re}_H > 3 \cdot 10^5$. В этих условиях $\mu = 0{,}6 \div 0{,}62$.

Коэффициенты расхода для малых квадратных и прямоугольных отверстий несколько отличаются от μ для круглых отверстий.

Коэффициенты расхода квадратных отверстий при $Re_{кв\,R} > 2{,}5 \cdot 10^3$ могут быть найдены по формуле Ю. А. Скобельцына, полученной в результате обработки опытных данных,

$$\mu_{кв\,R} = \frac{1}{1{,}666 - \dfrac{450}{Re_{кв\,R}}}.$$

При $Re_{кв\,R} \geqslant 4 \cdot 10^4$ коэффициент $\mu_{кв\,R} = 0{,}6$ и практически не зависит от $Re_{кв\,R}$.

Коэффициенты расхода прямоугольных отверстий при $Re_{пр\,R} > 5 \cdot 10^3$ определяются также по эмпирической формуле Ю. А. Скобельцына

$$\mu_{пр\,R} = \frac{1}{1{,}62 - \dfrac{630}{Re_{пр\,R}}}.$$

При $Re_{пр\,R} > 2 \cdot 10^5$ наступает автомодельность и $\mu_{пр}$ перестает зависеть от $Re_{пр\,R}$, в этих условиях $\mu_{пр} = 0{,}62$.

Следует обратить внимание на то, что в некоторых приведенных формулах число Рейнольдса определено по гидравлическому радиусу отверстия:

$$Re_R = \sqrt{2gH}R/\nu .$$

Неполное и несовершенное сжатие. При неполном сжатии коэффициент расхода $\mu_{неп}$ больше, чем μ при полном сжатии. Это увеличение отражено в эмпирической формуле, по которой определяется $\mu_{неп}$ при больших значениях Re:

$$\mu_{неп} = \mu\left(1 + k\frac{p'}{p}\right),$$

где μ — коэффициент расхода при полном сжатии; p — периметр всего отверстия; p' — длина той части периметра, на которой сжатие отсутствует; k — коэффициент, равный 0,13 для круглых и 0,15 для прямоугольных отверстий.

При полном, но несовершенном сжатии коэффициент расхода $\mu_{нес}$ также больше, чем коэффициент расхода при совершенном сжатии μ, и определяется по эмпирической формуле

$$\mu_{нес} = \mu\,[1 + 0{,}64\,(\omega/\Omega)^2],$$

где ω и Ω — площадь соответственно отверстия и стенки, в которой выполнено отверстие.

10.3. Экспериментальное определение коэффициентов расхода, скорости и сжатия для круглого малого отверстия с острой кромкой

Коэффициент расхода μ наиболее легко определяется по опытным данным. Зная напор H и площадь отверстия ω, после определения объемным способом расхода Q находят коэффициент расхода μ из (10.8):

$$\mu = \frac{Q}{\omega\sqrt{2gH}}.$$

Коэффициент сжатия ε определяется в результате измерений струи в сжатом сечении. Затем находятся площадь в сжатом сечении ω_c и коэффициент $\varepsilon = \omega_c/\omega$.

Коэффициент скорости φ может быть найден опытным путем двумя способами. По первому способу при известном напоре H опытным путем определяются расход Q и площадь сжатого сечения ω_c. Тогда

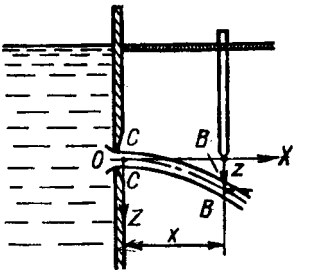


Рис. 10.5

$$\varphi = \frac{Q}{\omega_c \sqrt{2gH}} = \frac{\mu}{\varepsilon}. \qquad (10.9)$$

Второй способ связан с измерениями координат струи с помощью прибора, принцип использования которого становится ясен из рассмотрения рис. 10.5.

Располагая начало координат ($x = z = 0$) в центре тяжести сжатого сечения, имеем для свободного падения струи

$$x = v_c t, \quad z = gt^2/2,$$

где t — время движения частицы жидкости от сечения C—C до сечения B—B. Найдя

$$v_c = x\sqrt{g/2z},$$

вычисляем искомый коэффициент

$$\varphi = \frac{v_c}{\sqrt{2gH}} = \frac{x}{2\sqrt{zH}}.$$

Коэффициент сопротивления при истечении через малые отверстия в тонкой стенке находится из (10.5а). Если в сжатом сечении принять $\alpha_c = 1$, тогда $\zeta_{о.к} = \frac{1}{\varphi^2} - 1$. При этом в зависимости от Re_H коэффициент $\zeta_{о.к}$ может принимать различные значения соответственно конкретным значениям φ:

при $\mathrm{Re}_H = 5 \cdot 10^2$ коэффициенты $\varphi = 0{,}8$ и $\zeta_{о.к} = 0{,}56$;

при $\mathrm{Re}_H = 4 \cdot 10^3$ коэффициенты $\varphi = 0{,}9$ и $\zeta_{о.к} = 0{,}23$;

при $\mathrm{Re}_H > 10^5$ коэффициенты $\varphi = 0{,}97$ и $\zeta_{о.к} = 0{,}06$.

Приведем осредненные значения при $\mathrm{Re}_H > 10^5$; $\mu = 0{,}60 \div 0{,}62$; $\varphi = 0{,}97$; $\varepsilon = 0{,}61 \div 0{,}64$; $\zeta_{о.к} = 0{,}06$.

Приняв $\varepsilon \approx 0{,}62$, найдем, что значения φ и φ_0 в формулах (10.5) и (10.7) отличаются не более чем на 0,8 % при $\omega_0/\omega > 5$ или на 1,2 % при $\omega_0/\omega > 4$.

10.4. Истечение через большое отверстие

Большим отверстием называется такое, у которого вертикальный размер больше 0,1 H, т. е. $H/d < 10$. В таких случаях пренебрегать различием в значениях скоростей в разных точках сечения вытекающей струи, как это делается при рассмотрении истечения через малые отверстия, нельзя.

Для строгого определения расхода и скорости в сжатом сечении необходимо иметь достаточно точные данные о сжатии струи, о коэффициентах скорости φ и сжатия ε. Таких данных пока недостаточно.

Расход при истечении через большое отверстие определяют интегрированием элементарных расходов, проходящих через горизонтальные полосы бесконечно малой высоты $\mathrm{d}\,z$ (рис. 10.6 и 10.7). При переменной ширине полосы b_z для элементарного расхода имеем выражение

$$dQ = \mu b_z \sqrt{2gz}\,\mathrm{d}\,z,$$

где z — переменный по высоте отверстия напор (глубина погружения верха полосы).

Принимая $\mu = \text{const}$ и зная вид зависимости $b_z = f(z)$, можно определить расход.

Расход через большое отверстие найдется как

$$Q = \mu\sqrt{2g}\int_{H_1}^{H_2} b_z\sqrt{z}\,\mathrm{d}\,z; \qquad (10.10)$$

здесь μ — коэффициент расхода отверстия.

Рассмотрим истечение жидкости через большие прямоугольные и круглые отверстия (рис. 10.6, 10.7). После интегрирования (10.10) для прямоугольного отверстия ($b_z = b = \text{const}$) получим

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,(H_2^{3/2} - H_1^{3/2}), \qquad (10.11)$$

где H_1 и H_2 — напоры над верхней и нижней кромками большого отверстия.

Обозначим $H_\text{ц}$ напор над центром отверстия, d — высоту прямоугольника.

Учтем, что

$$H_1 = H_\text{ц} - \frac{d}{2} = H_\text{ц}\left(1 - \frac{d}{2H_\text{ц}}\right);$$

$$H_2 = H_\text{ц} + \frac{d}{2} = H_\text{ц}\left(1 + \frac{d}{2H_\text{ц}}\right).$$

Тогда (10.11) запишется в виде

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,H_\text{ц}^{3/2}\left[\left(1 + \frac{d}{2H_\text{ц}}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{d}{2H_\text{ц}}\right)^{3/2}\right].$$

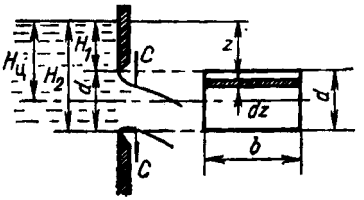


Рис. 10.6

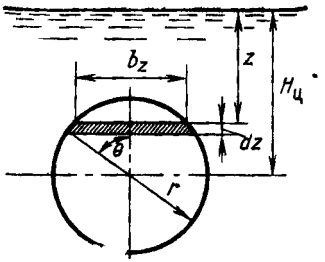


Рис. 10.7

Применим бином Ньютона и ограничимся четырьмя членами:

$$\left(1 \pm \frac{d}{2H_ц}\right)^{3/2} = \left[1 \pm \frac{3}{2}\frac{d}{2H_ц} + \frac{3}{8}\left(\frac{d}{2H_ц}\right)^2 \pm \frac{1}{16}\left(\frac{d}{2H_ц}\right)^3\right].$$

Произведя необходимые преобразования, получим

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\, H_ц^{3/2}\left[\frac{3}{2}\frac{d}{H_ц} - \frac{1}{64}\left(\frac{d}{2H_ц}\right)^3\right],$$

т. е.

$$Q = \mu bd\sqrt{2gH_ц}\left[1 - \frac{1}{96}\left(\frac{d}{H_ц}\right)^2\right]. \qquad (10.12)$$

Пренебрегая значением вычитаемого в скобках члена по сравнению с единицей и учитывая, что $bd = \omega$, получаем

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_ц}.$$

При истечении через большое круглое отверстие (рис. 10.7) пределы интегрирования $H_1 = H_ц - r$; $H_2 = H_ц + r$. Для круглого отверстия

$$z = H_ц - r\cos\varphi; \quad dz = r\sin\varphi\, d\varphi; \quad b_z = 2r\sin\varphi.$$

Тогда, подставив эти значения в (10.10), получим

$$Q = 2\mu\sqrt{2gH_ц}\, r^2 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \sqrt{1 - \frac{r}{H_ц}\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Применив бином Ньютона и ограничившись четырьмя членами разложения, получим

$$Q = \mu\sqrt{2gH_ц}\ \pi r^2\left[1 - \frac{1}{32}\left(\frac{r}{H_ц}\right)^2\right] \qquad (10.13)$$

или, пренебрегая вычитаемым в скобках,

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_ц}.$$

Таблица 10.2

Тип отверстия	μ
Большое отверстие с несовершенным, но всесторонним сжатием	0,7
Донные отверстия без сжатия по дну:	
со значительным влиянием бокового сжатия	0,65—0,7
с умеренным влиянием бокового сжатия	0,7—0,75
с весьма плавными боковыми подходами	0,8—0,85
с весьма плавными подходами к отверстию со всех сторон (необходимо экспериментальное подтверждение)	0,9

Таким образом, формулы для определения расхода через большое и малое отверстия имеют один и тот же вид и отличаются значениями коэффициентов расхода, которые для больших отверстий принимают по рекомендации Н. Н. Павловского (табл. 10.2).

10.5. Истечение через малое затопленное отверстие с острой кромкой

При истечении через отверстие под уровень жидкости отверстие называется затопленным. Рассмотрим истечение через затопленное отверстие (рис. 10.8) при условии, что положения свободных поверхностей жидкости по обе стороны от отверстия не изменяются во времени, давление на свободной поверхности до отверстия и за ним атмосферное.

Запишем уравнение Бернулли для сечений $A—A$ и $B—B$, совпадающих со свободной поверхностью до отверстия и за ним. Плоскость сравнения $0—0$ проведем через центр отверстия. Пренебрегая скоростными напорами в сечениях $A—A$ и $B—B$, получим

$$z_1 = z_2 + \Sigma h_{тр}$$

или

$$z = \Sigma h_{тр},$$

где

$$z = z_1 - z_2; \quad \Sigma h_{тр} = \Sigma \zeta v_c^2/2g;$$

z — разность (перепад) уровней жидкости до отверстия и за ним; v_c — средняя скорость в сжатом сечении $C—C$ затопленной струи.

Между сечениями $A—A$ и $B—B$ должны быть учтены потери напора:

а) потери между сечениями $A—A$ и $C—C$, аналогичные потерям при истечении в атмосферу через малое отверстие с острой кромкой,

$$h_{тр} = \zeta_{о.к} v_c^2/2g;$$

б) потери между сечениями $C—C$ и $B—B$, связанные с внезапным расширением струи от сжатого сечения до сечения во втором резервуаре, равные по (9.1)

$$h_{в.\,р} = \alpha_c v_c^2/2g.$$

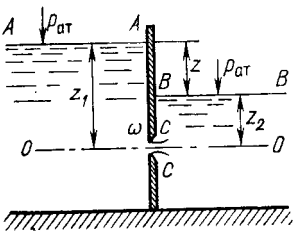


Рис. 10.8

Соответственно скорость в сжатом сечении

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_{о.\,к}}}\sqrt{2gz}$$

или

$$v_c = \varphi\sqrt{2gz}. \qquad (10.14)$$

Так как площадь струи в сжатом сечении, как и ранее, равна $\omega_c = \varepsilon\omega$, то расход, проходящий через затопленное отверстие, при указанных выше условиях равен

$$Q = \varepsilon\varphi\omega\sqrt{2gz}$$

или

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gz}. \qquad (10.15)$$

Подчеркнем, что при истечении через малое з а т о п л е н н о е отверстие в формулы для скорости и расхода входит z — разность отметок уровней жидкости до отверстия и за ним.

Опыты показывают, что коэффициент расхода μ при истечении через затопленное отверстие может приниматься равным коэффициенту μ для незатопленного отверстия.

10.6. Истечение через незатопленные короткие трубки (насадки)

Н а с а д к а м и называются присоединенные к отверстию короткие трубки определенной длины, в которых имеется напорное движение. При истечении в газовую среду насадок будет называться н е з а т о п л е н н ы м.

В н е ш н и м ц и л и н д р и ч е с к и м н а с а д к о м (насадком Вентури) называется прямая цилиндрическая трубка длиной $l = (3 \div 4)\,d$, присоединенная под прямым углом с внешней стороны резервуара к отверстию того же диаметра (рис. 10.9).

При входе в такую короткую трубку кривизна линий тока (траекторий) значительна, благодаря чему во входной части трубки происходит сжатие потока. Площадь сжатого сечения равна ω_c. За сжатым сечением следует расширение потока до заполнения всего поперечного сечения насадка. Между транзитной струей и

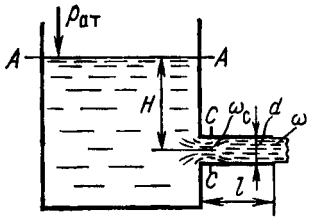


Рис. 10.9

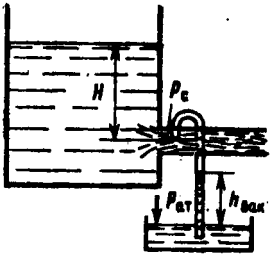


Рис. 10.10

стенкой насадка образуется кольцевая вихревая водоворотная зона.

Содержащийся в воде воздух и выделившиеся из жидкости пары, зажатые в водоворотной зоне, довольно быстро уносятся транзитным (поступательно движущимся) потоком. В этой зоне понижается давление, создается вакуум. Значение вакуума, как будет показано ниже, зависит от скорости движения жидкости или, в конечном счете, от напора.

Значение вакуума по длине водоворотной зоны изменяется: увеличиваясь от входа, достигает максимума в сжатом сечении, а затем уменьшается до нуля примерно в конце водоворотной зоны.

Если в створе сжатого сечения к насадку присоединить жидкостный вакуумметр (рис. 10.10), вакуумметрическая высота, определяемая по высоте поднятия жидкости в трубке прибора, будет равна $h_{вак} = (p_{ат} - p_c)/\rho g$.

В связи с наличием вакуума действующий напор увеличивается на значения вакуума в сжатом сечении. Скорость в сжатом сечении увеличивается по сравнению с истечением через отверстие с острой кромкой. Насадок как бы «подсасывает» жидкость.

В то же время в насадке происходят и дополнительные по сравнению с отверстием с острой кромкой потери напора, связанные с внезапным расширением струи за сжатым сечением. Соотношение влияния «подсасывания» и указанных дополнительных потерь напора на пропускную способность и определяет степень изменения расхода через насадок по сравнению с отверстием.

Запишем уравнение Бернулли, выбрав два сечения: на поверхности жидкости в резервуаре $A—A$ и в струе на выходе из насадка.

Считая на выходе из насадка $\alpha = 1$ и пренебрегая скоростным напором в сечении $A—A$ $\alpha_0 v_0^2/2g$, получим

$$H = (1 + \Sigma\zeta)\, v^2/2g,$$

где v — скорость в выходном сечении насадка.

В рассматриваемом случае сопротивления движению жидкости состоят из сопротивлений при сужении, аналогичных сопротивле-

ниям в отверстии с острой кромкой в стенке резервуара, и сопротивлений при внезапном расширении струи от площади сжатого сечения ω_c до площади на выходе из насадка ω.

Обозначим коэффициент сопротивлений при истечении через отверстие с острой кромкой через $\zeta_{о.к}$, тогда

$$\Sigma\zeta = \zeta_{о.к} + \zeta_{в.р};$$

при этом целесообразно все коэффициенты сопротивлений отнести к скорости v в выходном сечении насадка.

Подсчитаем численные значения коэффициентов сопротивлений при достаточно больших значениях числа Re, когда коэффициент сжатия ε не зависит от числа Re. Коэффициент $\zeta_{о.к}$, отнесенный к скорости в сжатом сечении v_c, равен 0,06. С учетом $v/v_c = \omega_c/\omega = 0{,}61 \div 0{,}64$, если отнести, как указывалось, $\zeta_{о.к}$ к v, получим

$$\zeta_{о.к} = 0{,}06\,(\omega/\omega_c)^2 = 0{,}16 \div 0{,}146.$$

При внезапном расширении струи в насадке от ω_c до ω, приняв $\omega_c/\omega = \varepsilon = 0{,}61 \div 0{,}64$, получим

$$\zeta_{в.р_2} = (\omega/\omega_c - 1)^2 = 0{,}40 \div 0{,}32.$$

Коэффициентом сопротивлений при входе в трубку является сумма коэффициентов сопротивлений на сужение и на расширение струи внутри насадка, равная при средних значениях $\zeta_{о.к}$ и $\zeta_{в.р}$

$$\zeta_{вх} = \zeta_{о.к} + \zeta_{в.р_2} \approx 0{,}5.$$

Тогда

$$v_{ц.н} = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_{вх}}}\sqrt{2gH} = \varphi_{ц.н}\sqrt{2gH}. \qquad (10.16)$$

Здесь для цилиндрического насадка

$$\varphi_{ц.н} = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_{ц.н}}},$$

где

$$\zeta_{ц.н} = \zeta_{вх} = 0{,}5 \quad \text{или} \quad \varphi_{ц.н} = 0{,}82.$$

Для внешнего цилиндрического насадка

$$\mu_{ц.н} = \varepsilon\varphi_{ц.н} = \varphi_{ц.н}, \qquad (10.17)$$

так как сжатия потока на выходе из насадка нет, т. е. $\varepsilon = 1$.

Опыты показали, что максимальные значения коэффициента расхода соответствуют длине насадка $l = (3 \div 4)\,d$, когда потерями по длине можно пренебречь.

Расход через цилиндрический насадок равен

$$Q = \mu_{ц.н}\omega\sqrt{2gH},$$

т. е. расход определяется по (10.8) с учетом значений $\mu_{ц.н}$.

При увеличении длины короткой трубки по сравнению с $l = (3 \div 4)\, d$ следует учитывать наряду с другими рассмотренными видами потерь и потери по длине, т. е.

$$\Sigma\zeta = \zeta_{\text{о. к}} + \zeta_{\text{в. р2}} + \zeta_{\text{дл}} = \zeta_{\text{вх}} + \lambda l/d,$$

где λ — коэффициент Дарси.

Естественно, коэффициент расхода $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{вх}} + \lambda \dfrac{l}{d}}}$ уменьшается.

При некоторой относительной длине трубки l/d коэффициент расхода при истечении через нее равен коэффициенту расхода при истечении через малое отверстие с острой кромкой $\mu_{\text{о. к}}$. Эта длина составляет

$$\frac{l}{d} = \frac{\dfrac{1}{\mu^2_{\text{о. к}}} - 1 - \zeta_{\text{вх}}}{\lambda}.$$

При $\mu_{\text{о. к}} = 0{,}6$ и $\lambda = 0{,}02$ получим $l/d \approx 60$, при том же значении $\mu_{\text{о. к}}$ и $\lambda = 0{,}05$ $l/d \approx 25$.

Коэффициенты расхода внешнего цилиндрического насадка $\mu_{\text{ц. н}}$ в общем случае зависят от чисел Рейнольдса, Фруда, Вебера, относительной длины, конструктивных особенностей и относительной шероховатости проточной части насадка. Влиянием сил поверхностного натяжения и сил тяжести на коэффициенты расхода рассматриваемых насадков можно пренебречь при $\text{We}_{\text{н}} > 200$ и $\text{Fr}_{\text{н}} > 10$.

Для насадка с острыми входными кромками и $l = (3 \div 4)\, d$ получены следующие опытные данные: при $\text{Re}_{\text{н}} = 10^3$, $5 \cdot 10^3$; 10^4 и более соответственно $\mu_{\text{ц. н}} = 0{,}73$; $0{,}8$; $0{,}82$.

Итак, при истечении через внешний цилиндрический насадок коэффициент расхода $\mu_{\text{ц. н}}$ на 32 % больше, чем $\mu_{\text{о. к}}$ (отверстие с острой кромкой), при достаточно больших Re и прочих равных условиях.

При необходимости увеличить расход через отверстие достаточно присоединить к внешней стенке резервуара цилиндрический насадок.

Если внешний цилиндрический насадок присоединен к стенке резервуара не под прямым углом (рис. 10.11), коэффициент сопротивлений на входе для такого насадка определяется по (9.8).

Все приведенные выше данные относятся к совершенному сжатию на входе в насадок. Для внешних цилиндрических насадков коэффициент расхода при несовершенном сжатии, так же как и для

отверстий, больше, чем при совершенном сжатии.

В ряде случаев вход в цилиндрический насадок выполняют или в виде скругленных кромок, или в форме усеченного конуса (конусный вход). При этом тот и другой вид входа занимает лишь часть длины насадка. Создание таких комбинированных насадков приводит к увеличению коэффициентов расхода в связи с лучшими условиями движения на входе и с соответственным уменьшением $\zeta_{вх}$.

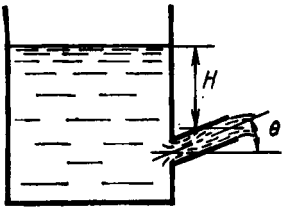


Рис. 10.11

10.7. Вакуум во внешнем цилиндрическом насадке

Найдем выражение для вакуума в сжатом сечении при истечении через внешний цилиндрический насадок в атмосферу. Составив уравнение Бернулли для сечений $A—A$ и $C—C$ (рис. 10.9), получим, пренебрегая $\alpha_0 v_0^2/2g$,

$$H + \frac{p_{ат}}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_{тр}.$$

Заменим

$$v_c^2 = \frac{v^2}{\varepsilon^2}; \quad h_{тр} = \zeta_{о.к} \frac{v_c^2}{2g} = \frac{\zeta_{о.к}}{\varepsilon^2} \frac{v^2}{2g},$$

где $v = v_{ц.н}$ — скорость в выходном сечении внешнего цилиндрического насадка. Тогда

$$\frac{p_{ат} - p_c}{\rho g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\alpha_c}{\varepsilon^2} + \frac{\zeta_{о.к}}{\varepsilon^2}\right) - H.$$

Учитывая, что из (10.16) $v^2/2g = \varphi_{ц.н}^2 H$, запишем

$$\frac{p_{ат} - p_c}{\rho g} = h_{вак} = \left[\frac{\varphi_{ц.н}^2(\alpha_c + \zeta_{о.к})}{\varepsilon^2} - 1\right] H. \qquad (10.18)$$

Приняв $\alpha_c = 1$ и подставив известные уже значения $\varphi_{ц.н} = 0{,}82$, $\varphi_{о.к} = 0{,}06$ и $\varepsilon = 0{,}64$ (для сжатого сечения), получим значение вакуума во внешнем цилиндрическом насадке при истечении жидкости в атмосферу (при достаточно больших Re)

$$h_{вак} = \frac{p_{ат} - p_c}{\rho g} \approx 0{,}75H. \qquad (10.19)$$

Предельное (из физических соотношений) значение вакуума ограничено возможным наименьшим давлением в сжатом сечении, которое из условия отсутствия разрыва сплошности жидкости не должно быть меньше давления насыщенных паров жидкости $p_{н.п}$ (или упругости паров жидкости) при температуре в условиях истечения (табл. 1.8). Поэтому для воды при $t = 20$ °С можно получить

предельное значение вакуумметрической высоты, соответствующей максимально возможному вакуумметрическому давлению,

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{ат}} - p_{\text{н. п}}}{\rho g} \approx 9{,}7 \text{ м},$$

а с учетом (10.19) — предельное значение напора для внешнего цилиндрического насадка

$$H_{\text{пр}} \approx 1{,}3 \frac{p_{\text{ат}} - p_{\text{н. п}}}{\rho g} \approx 13 \text{ м}.$$

При напорах, близких к $H_{\text{пр}}$, возможно появление кавитации и нарушение сплошности потока.

Практически при истечении воды в атмосферу и $h_{\text{вак}} \approx 8$ м начинается поступление воздуха через выходное сечение, жидкость частично или полностью отрывается от стенок, т. е. происходит срыв вакуума и переход к истечению из отверстия. Соответственно коэффициент расхода уменьшается и насадок теряет свои преимущества в пропускной способности по сравнению с отверстием в тонкой стенке.

Исходя из описанного явления, считают, что допустимое значение вакуума в рассматриваемом насадке соответствует вакуумметрической высоте $h_{\text{вак. доп}} = 8$ м.

Практически принимаемое значение предельного напора, при котором $h_{\text{вак}}$ не превысит $h_{\text{вак. доп}} = 8$ м, т. е. насадок будет устойчиво работать с полностью заполненным сечением, равно

$$H_{\text{пр. доп}} = \frac{h_{\text{вак. доп}}}{0{,}75} \approx 10{,}7 \text{ м}.$$

Таким образом, при проектировании гидротехнических сооружений и устройств, работающих по типу внешних цилиндрических насадков, следует предусматривать максимальные напоры не более 10,7 м. На практике иногда в водоворотную область по специальным воздухопроводам подают воздух, находящийся под атмосферным давлением, для уменьшения возможной вибрации конструкций. Естественно, коэффициент расхода при этом уменьшается, но надежность работы сооружения повышается.

10.8. Истечение через внешний затопленный цилиндрический насадок

Для случая истечения через внешний затопленный цилиндрический насадок (рис. 10.12) применим уравнение Бернулли к сечениям A—A и B—B. Последнее сечение нормально к направлению вытекающего потока, горизонтальная плоскость сравнения про-

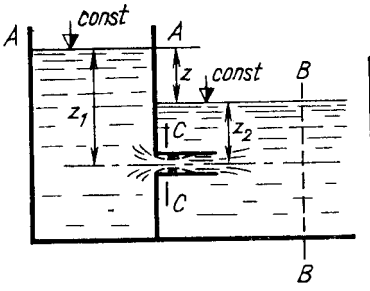


Рис. 10.12

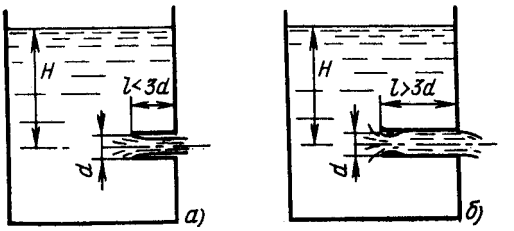


Рис. 10.13

ходит по оси насадка. Пренебрегая скоростными напорами в сечениях, получим

$$z_1 = z_2 + \Sigma\zeta v^2/2g.$$

Отсюда

$$v = \varphi\sqrt{2gz}, \qquad (10.20)$$

где $z = z_1 - z_2$.

Расход определяется по (10.15). Значения коэффициентов расхода при истечении через затопленный и незатопленный насадки принимаются равными.

Найдем выражение для значения вакуума в сжатом сечении затопленного внешнего цилиндрического насадка, используя уравнение Бернулли.

Выберем сечения $A—A$ и $C—C$; горизонтальная плоскость сравнения проходит по оси насадка. Имеем

$$z_2 + z + \frac{p_{ат}}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_{тр}.$$

Заменим

$$v_c^2 = \frac{v^2}{\varepsilon^2}; \quad h_{тр} = \zeta_{о.к}\frac{v_c^2}{2g} = \frac{\zeta_{о.к}}{\varepsilon^2}\frac{v^2}{2g},$$

тогда

$$\frac{p_{ат} - p_c}{\rho g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{\alpha_c}{\varepsilon^2} + \frac{\zeta_{о.к}}{\varepsilon^2}\right) - z - z_2.$$

Учитывая, что из (10.20) $v^2/2g = \varphi^2 z$, получаем

$$\frac{p_{ат} - p_c}{\rho g} = \left[\frac{\varphi^2(\alpha_c + \zeta_{о.к})}{\varepsilon^2} - 1\right] z - z_2.$$

Подставив $\alpha_c = 1$; $\varphi_{ц.н} = 0{,}82$; $\varphi_{о.к} = 0{,}06$ и $\varepsilon = 0{,}64$, получим значение вакуума в затопленном внешнем цилиндрическом насадке:

$$h_{вак} \approx 0{,}75z - z_2. \qquad (10.21)$$

10.9. Истечение через внутренний цилиндрический насадок

Цилиндрический насадок, установленный внутри резервуара, называется внутренним цилиндрическим насадком, или насадком Борда'. При $l < 3d$ (обозначения прежние) струя вытекает через насадок, не касаясь его стенок (рис. 10.13, *а*). При этом коэффициенты расхода, скорости, сжатия и сопротивлений имеют следующие значения (для $\mathrm{Re} > 10^4$): $\mu = 0{,}51$; $\varphi = 0{,}97$; $\varepsilon = 0{,}53$; $\varphi = 0{,}06$. По сравнению с истечением через отверстие в тонкой стенке здесь происходит более заметное сжатие и коэффициент расхода получается меньшим.

Работающий полным сечением (заполненный) внутренний насадок [$l > 3d$ (рис. 10.13, *б*)] характеризуется при $\mathrm{Re} > 10^4$ следующими коэффициентами: $\mu = \varphi = 0{,}71$; $\varphi = 1$; на выходе из насадка $\varepsilon = 1$.

Для обоих случаев приведенные данные соответствуют совершенному сжатию при входе в насадок. Кроме того, значения μ несколько зависят от относительной толщины стенки насадка δ/d.

10.10. Истечение через нецилиндрические насадки

Сходящиеся насадки. Насадок, имеющий форму усеченного конуса, сходящегося по направлению к выходному отверстию, называется коническим (круглого сечения) сходящимся насадком (рис. 10.14, *а*). В водомерных устройствах на каналах мелиоративных систем применяются также сходящиеся насадки с квадратным и прямоугольным поперечным сечениями.

Опытные данные показывают, что при изменении угла конусности θ изменяются и коэффициенты μ, φ и ε (рис. 10.15). Но если коэффициент μ достигает максимального значения, равного 0,946 при $\theta = 13{,}4°$, а затем уменьшается, то коэффициент скорости φ непрерывно растет и при $\theta = 49°$ равен 0,984. Сжатие струи, происходящее при выходе из насадка, оценивается коэффициентом $\varepsilon = 0{,}98$ при $\theta = 13{,}4°$.

Увеличение угла конусности приводит к уменьшению потерь на расширение струи после сжатия в пределах насадка. При углах

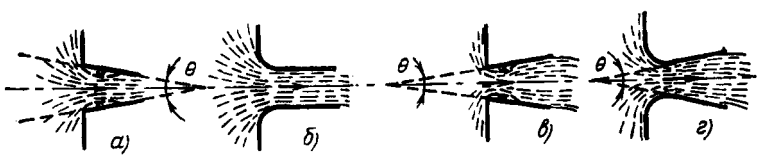


Рис. 10.14

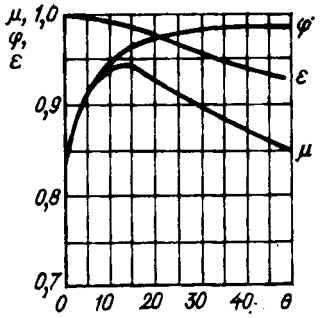


Рис. 10.15

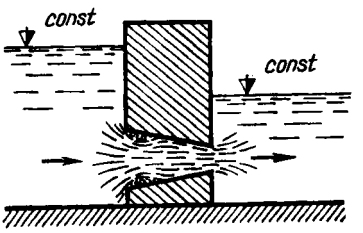


Рис. 10.16

$\theta = 13 \div 14°$ эти потери практически ничтожны, так как в этом случае ω_c примерно равна площади ω на выходе из насадка.

Соответственно коэффициент μ достигает максимума при $\theta = 13{,}4°$. При дальнейшем увеличении θ сжатие на выходе из насадка увеличивается, коэффициент ε уменьшается. В таких условиях μ уменьшается.

Выходящая из конического насадка струя характеризуется большой кинетической энергией, в связи с чем эти насадки применяются в соплах турбин, гидромониторах и пожарных брандспойтах.

Сходящиеся водомерные насадки устанавливаются на мелиоративных каналах (рис. 10.16). Поперечное сечение насадков может быть круглым, квадратным или прямоугольным. Истечение происходит через затопленный насадок. Длина круглого и квадратного насадков $2d$ или $2a$, прямоугольного насадка $3a$, где d и a — диаметр и сторона (для прямоугольника — его высота) выходного сечения.

Для насадка с круглым поперечным сечением $\mu = 0{,}95$; для квадратного и прямоугольного насадков $\mu = 0{,}925$ при $\theta = 26°$.

Коноидальные насадки (рис. 10.14, *б*) имеют сложную форму. Вход выполняется по форме вытекающей через отверстия струи, а выходной участок цилиндрический. За счет этого сжатие струи на выходе из насадка отсутствует, $\varepsilon = 1$. Коэффициенты $\mu = \varphi = 0{,}97 \div 0{,}98$ при достаточно больших числах Re.

Расходящиеся насадки (рис. 10.14, *в*, *г*). Расходящаяся форма насадка способствует отрыву потока от стенок насадка. Вакуум в сжатом сечении расходящегося насадка больше, чем в сжатом сечении внешнего цилиндрического насадка. С увеличением угла конусности θ растет и вакуум. По этим соображениям принимают $\theta = 5 \div 7°$, а предельный напор меньшим, чем у внешнего цилиндрического насадка, чтобы обеспечить работу расходящегося насадка без срыва вакуума, т. е. полным сечением.

Сжатия струи в выходном сечении нет, $\varepsilon = 1$, поэтому $\mu = \varphi$.

При $\theta = 5 \div 7°$ и острой кромке входного отверстия применительно к формуле $Q = \mu\omega_{вых}\sqrt{2gH}$ рекомендуется $\mu = \varphi \approx 0{,}45$.

Если к отверстию в тонкой стенке присоединить внешний цилиндрический или расходящийся насадок, во втором случае при прочих одинаковых условиях расход будет значительно больше. При этом за расходящимся насадком скорость и кинетическая энергия струи будут меньше.

Такие насадки применяют при необходимости пропустить относительно большой расход при малых скоростях на выходе или в устройствах, когда необходимо достичь значительного вакуума (водоструйные насосы, гидроэлеваторы и т. п.). Как правило, отсасывающие трубы гидравлических турбин также представляют собой расходящиеся насадки.

При соединении входной части, выполненной по форме струи с расходящимся коническим насадком, можно получить наибольшее возможное увеличение расхода.

10.11. Сравнение гидравлических характеристик отверстий и насадков

При проектировании конструкций, в которых происходит истечение через отверстия и насадки, необходимо сравнивать различные водопропускные устройства по проходящему через них расходу и кинетической энергии, соответствующей этому расходу.

Известно, что при незатопленных отверстии и насадке

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} \quad \text{и} \quad v = \varphi\sqrt{2gH}.$$

Кинетическая энергия проходящего в единицу времени количества жидкости

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\rho Q v^2}{2} = \rho g \mu \varphi^2 \omega H \sqrt{2gH}.$$

Тогда при равенстве площадей ω и напоров H расход зависит от μ, а кинетическая энергия — от $\mu\varphi^2$, что и учитывают при срав-

Таблица 10.3

Отверстие и насадок	φ	μ	$\mu\varphi^2$	$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$
Отверстие в тонкой стенке	0,97	0,62	0,583	0,06
Внешний цилиндрический насадок	0,82	0,82	0,551	0,49
Конический сходящийся насадок ($\theta = 13°$)	0,97	0,95	0,894	0,06
Коноидальный насадок	0,97	0,97	0,913	0,06
Конический расходящийся насадок (данные отнесены к выходному сечению)	0,45	0,45	0,091	3,94

нении водопропускных элементов. Осредненные данные этих параметров для больших чисел Re сведены в табл. 10.3.

Проведем сравнение, как указывалось, при равенстве ω и H во всех случаях. Наибольшая скорость истечения (табл. 10.3) обеспечивается при истечении через отверстие в тонкой стенке, через сходящийся и коноидальный насадки. Максимальная пропускная способность наблюдается при истечении через расходящийся и коноидальный насадки.

Расход при истечении через внешний цилиндрический насадок больше, чем через отверстие в тонкой стенке, но вытекающая через отверстие струя обладает большей кинетической энергией, чем при истечении через внешний цилиндрический насадок.

Из всех сравниваемых устройств коноидальный насадок характеризуется максимальной кинетической энергией струи.

Расходящиеся насадки обеспечивают минимальные значения скорости и кинетической энергии струи.

Наибольшее значение ζ — у конического расходящегося насадка.

10.12. Влияние скорости потока в трубе или канале на коэффициенты расхода отверстий и насадков в стенках

Во многих гидротехнических и мелиоративных сооружениях происходит истечение через отверстия, выполненные в стенках каналов, лотков или труб, в которых движется жидкость, или через насадки, присоединенные к этим отверстиям. Ось отверстия или насадка располагается под углом β к направлению движения жидкости в указанных конструкциях. При этом не всегда $\beta = 90°$.

Исследования показывают, что коэффициент расхода отверстий и насадков, истечение через которые происходит в рассматриваемых условиях, существенно зависит от скоростного режима в водотоке, в стенке которого выполнены отверстия.

Пусть поток в канале или в трубе, из которых вытекает жидкость, характеризуется числом Фруда $\mathrm{Fr}_к = v_к^2/gh$ (в канале) или $\mathrm{Fr}_т = v_т^2/gH$ (в трубе), где $v_к$ и $v_с$ — средние скорости в канале или трубе; h — глубина воды в канале; H — напор перед отверстием. Влияние скорости в канале (при $\mathrm{Fr}_к \leqslant 17$ и $\beta = 90°$) на коэффициент расхода отверстия с острой кромкой (рис. 10.17) определится по Г. А. Паршиной в виде

$$\mu_{v_к} = \frac{\mu}{1 + 0{,}34\,\mathrm{Fr}_к},$$

где μ — коэффициент расхода отверстия при $v_к = 0$. Коэффициенты расхода при этом соответствуют формуле

$$Q = \mu_{v_к}\omega\sqrt{2g\left(h + v_к^2/2g\right)}.$$

Для поливных отверстий, выполненных в стенках трубопроводов, напоры назначаются в пределах 0,3—4 м. Диаметры отверстий зависят от технологических потребностей орошения, например для садов и виноградников они составляют от 0,008 до 0,045 м. При $H = 3 \div 4$ м скорости истечения составляют 6—8 м/с. Расстояния между отверстиями соответствуют расстояниям между поливными бороздами (рядами поливаемых культур).

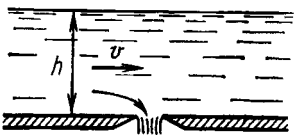


Рис. 10.17

Для поливных отверстий, выполненных в стенке асбестоцементных труб ($\beta = 90°$), коэффициент $\mu_{v_т}$ при наличии скорости движе-

ния воды в трубе и $Fr_т \leqslant 0{,}68$ находится по формуле В. А. Сурина

$$\mu_{v_т} = \frac{0{,}95}{1 + 0{,}476 Fr_т},$$

т. е. $\mu_{v_т} \approx 0{,}7 \div 0{,}9$.

На коэффициент расхода отверстий, выполненных в стенке трубы с напорным движением, большое влияние оказывает кривизна стенок трубы и, возможно, некоторая конусность отверстия в стенке, имеющей определенную толщину.

Равномерность раздачи расходов через поливные отверстия при уменьшении напора по длине обеспечивается увеличением диаметра отверстий по длине трубопровода.

10.13. Коэффициент расхода системы

Истечение при постоянном напоре из резервуаров, соединенных системой труб (рис. 10.18), характеризуется отсутствием сжатия в выходном сечении трубы, т. е. на выходе $\varepsilon = 1$. Следовательно, коэффициент расхода μ численно равен коэффициенту скорости φ.

Если рассматривается система труб, состоящая из нескольких участков с различными площадями поперечных сечений, коэффициент сопротивления системы определяется по (9.10).

При истечении в атмосферу через незатопленное выходное отверстие следует в формулу расхода (10.8) подставлять коэффициент расхода системы

$$\mu_{сист} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta_{сист}}}. \qquad (10.22)$$

Здесь коэффициент кинетической энергии α относится к выходному сечению, и в данном случае можно принять $\alpha \approx 1$.

При истечении через затопленное отверстие расход определяется по (10.15) с использованием коэффициента $\mu_{сист}$. В формулу расхода подставляется площадь выходного сечения трубы. Если скорость в резервуаре или водотоке, в который вытекает жидкость,

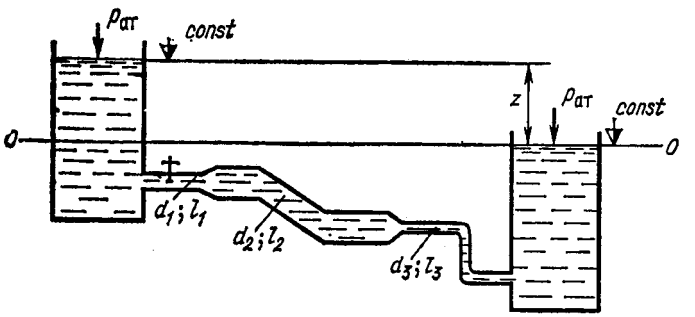


Рис. 10.18

равна нулю или существенно меньше, чем скорость истечения из трубы, применяется формула

$$\mu_{сист} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_{сист}}}. \qquad (10.23)$$

При этом имеется в виду, что коэффициент $\zeta_{сист}$ включает в себя и $\zeta_{вых} = 1$, если отверстие затопленное.

10.14. Контрольные вопросы и примеры

1. При выполнении какого условия отверстие называется малым?
2. Запишите формулы для средней скорости в сжатом сечении и для расхода при истечении через малое незатопленное отверстие с острой кромкой.
3. Может ли коэффициент скорости быть меньше единицы, или равен единице, быть больше единицы?
4. Во всех ли случаях необходимо учитывать скорость подхода в величине напора?
5. Что такое инверсия струи? Каковы ее отличительные особенности?
6. Какие виды сжатия могут отмечаться при истечении через отверстие?
7. Какие параметры и безразмерные комплексы могут влиять на значения расчетных коэффициентов при истечении через малое отверстие? Каков характер зависимости коэффициентов сжатия, скорости и расхода от числа Рейнольдса?
8. Как определить коэффициенты сжатия, скорости и расхода экспериментальным путем?
9. Каковы особенности истечения через большие отверстия? Можно ли применять те же формулы для расчета расхода через эти отверстия, что и при истечении через малые отверстия?
10. Запишите формулы для средней скорости (в сжатом сечении) и для расхода при истечении через малое затопленное отверстие с острой кромкой. Изменяются ли значения коэффициента расхода при истечении через затопленные отверстия по сравнению с незатопленными?
11. Что входит в формулы для средней скорости и расхода при истечении через незатопленное отверстие в качестве линейной величины — напора? Аналогично — при истечении через насадки?
12. Что называется внешним цилиндрическим насадком? Какие явления объясняют его повышенную пропускную способность по сравнению с малым отверстием с тонкой кромкой?
13. Как зависят расчетные коэффициенты при истечении через различные насадки от числа Рейнольдса?
14. Каковы значения вакуумметрической высоты во внешнем цилиндрическом насадке? При каких предельных значениях напора для такого насадка может нарушиться его нормальная работа?
15. Сравните гидравлические характеристики отверстий и насадков. Какой из насадков характеризуется наибольшей кинетической энергией вытекающей струи?
16. Как влияет на коэффициент расхода отверстий в стенке трубопровода или канала скорость движения жидкости в трубопроводе или канале?
17. Есть ли различия в расчете коэффициента расхода системы труб при истечении через незатопленное или через затопленное выходное отверстие?

Во всех примерах в данной главе рассматривается истечение при постоянном напоре, кромки отверстия — острые.

Пример 10.1. Из открытого резервуара при постоянном напоре H через круглое отверстие диаметром $d = 0{,}06$ м в его боковой стенке вытекает вода с расходом $Q = 0{,}01$ м^3/с. Сжатие полное, совершенное (рис. 10.1, *б*). Тем-

пература воды 20 °С ($\nu = 0{,}01 \cdot 10^{-6}$ м^2/с). Определить, при каком значении напора H проходит через отверстие заданный расход; как изменится расход, если к отверстию под прямым углом присоединить к стенке внешний цилиндрический насадок с диаметром $d = 0{,}06$ м при найденном значении напора H; вычислить средние скорости на выходе из отверстия и насадка.

Решение. 1. Напор H над центром отверстия определим из формулы (10.6):

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_0}; \quad H_0 = \frac{Q^2}{\mu^2\omega^2 2g}.$$

Полагая, что $\mathrm{Re}_H > 10^5$ (см. рис. 10.4), и приняв значение $\mu = 0{,}61$, а также считая скорость подхода $v_0 = 0$, получим

$$H = \frac{0{,}01^2}{0{,}61^2 \cdot 0{,}785^2 \cdot 0{,}06^4 \cdot 19{,}62} = 1{,}715 \text{ м};$$

так как $H/d = 28{,}5 > 10$, то отверстие — малое. Уточним, верно ли было принято значение μ для малого отверстия $H/d = 32{,}3 > 10$. Вначале найдем

$$\mathrm{Re}_H = \frac{\sqrt{2gH}\, d}{\nu} = 3{,}48 \cdot 10^5.$$

Значение μ в данном случае взято правильно (см. § 10.2, 10.3).

2. Расход через внешний цилиндрический насадок при найденном напоре H найдем из той же формулы расхода, подставив в нее значение коэффициента расхода для цилиндрического насадка $\mu_{\text{ц. н}} = 0{,}82$ (значение принято таким, так как $\mathrm{Re}_H > 10^4$).

Тогда

$$Q = 0{,}82 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}06^2 \cdot 4{,}43\sqrt{1{,}715} = 0{,}0134 \text{ м}^3/\text{с} = 13{,}4 \text{ л/с}.$$

3. Найдем средние скорости по (10.8) и (10.16). Для отверстия (при $\varphi = 0{,}97$) имеем в сжатом сечении $v_c = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}97 \cdot 4{,}43\sqrt{1{,}71} = 5{,}62$ м/с; средняя скорость непосредственно в плоскости отверстия $v = \varepsilon v_c = 0{,}64 \cdot 5{,}62 = 3{,}6$ м/с. На выходе из цилиндрического насадка $\varepsilon = 1$, так как сжатие на выходе отсутствует, и $\varphi = 0{,}82$; тогда $v = 0{,}82 \cdot 4{,}43 \times \sqrt{1{,}71} = 4{,}75$ м/с, т. е. средняя скорость на выходе из внешнего цилиндрического насадка в данном случае в 1,32 раза больше, чем на выходе из рассматриваемого отверстия. Это соотношение, естественно, зависит от принимаемых значений φ и ε. Отметим, что принятые значения коэффициентов φ и ε соответствуют значениям Re, найденным в задаче.

Пример 10.2. Определить суммарный расход воды Q, вытекающей через три отверстия, расположенные в дне резервуара, при глубине воды в резервуаре $H = 1$ м. Отверстия — квадратные, сторона отверстия $a = 0{,}05$ м. Одно отверстие находится в центре дна, другое примыкает одной стороной к боковой стенке, третье находится в углу дна (рис. 10.19). Скорость подхода v_0 принять равной нулю.

Решение. Расходы, проходящие через каждое из отверстий, определяются по формуле (10.7), но будут неодинаковыми. Центральное отверстие находится в условиях совершенного сжатия, поэтому коэффициент расхода для него примем $\mu = 0{,}61$. Боковое отверстие находится в условиях неполного сжатия, и для него $\mu_{\text{неп}}$ определится из формулы (см. § 10.2) $\mu_{\text{неп}} = \mu\left(1 + k\frac{p'}{p}\right)$, где при заданных условиях $k = 0{,}15$, длина части периметра, по которой устранено сжатие, $p' = a$, длина периметра всего отверстия $p = 4a$.

Подставляя числовые значения, получим

$$\mu_{\text{неп1}} = 0{,}61\left(1 + 0{,}15\frac{1}{4}\right) = 0{,}633.$$

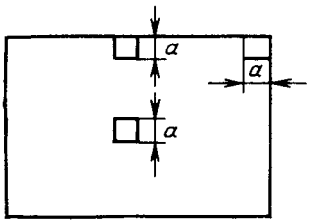


Рис. 10.19

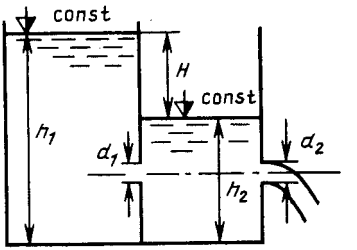


Рис. 10.20

Коэффициент расхода для отверстия в углу будет еще больше, так как сжатия нет по двум сторонам, т. е.

$$\mu_{\text{неп}2} = 0{,}61\left(1 + 0{,}15\frac{2}{4}\right) = 0{,}656.$$

Если определить значения чисел Рейнольдса (приняв, что температура воды равна 20 °С), убедимся, что $\mathrm{Re}_H > 2\cdot 10^5$ и значения μ приняты достаточно точно.

Суммарный расход Q через отверстия будет $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (\mu + \mu_{\text{неп}1} + \mu_{\text{неп}2})\,\omega\sqrt{2gH}$; $Q = (0{,}61 + 0{,}633 + 0{,}656)\,0{,}05^2\sqrt{19{,}62} = 0{,}0209$ м³/с = = 20,9 л/с.

Расходы из отверстий, подсчитанные раздельно, будут равны $Q_1 =$ = 0,0067 м³/с, $Q_2 = 0{,}0069$ м³/с, $Q_3 = 0{,}0072$ м³/с.

Пример 10.3. Два открытых резервуара отделены вертикальной стенкой, в которой имеется круглое отверстие диаметром $d = 0{,}07$ м (рис. 10.20). Глубина воды в левом резервуаре равна $h_1 = 3{,}0$ м. Расход Q, проходящий через отверстие, равен 0,01 м³/с. Определить глубину воды в левом резервуаре и диаметр d_2 отверстия в крайней правой стенке при постоянных уровнях воды в резервуаре. Центры обоих отверстий расположены на расстоянии $e = 0{,}8$ м от дна.

Решение. Определим из формулы (10.15) напор z_1, необходимый для пропуска расхода Q через затопленное (внутренне) отверстие при $v_0 = 0$.

При $\mu = 0{,}61\sqrt{z_1} = \dfrac{Q}{\mu\omega_1\sqrt{2g}} = \dfrac{0{,}01}{0{,}61\cdot 0{,}785\cdot 0{,}07^2\cdot 4{,}43} = 0{,}96$ м^{0,5};

$z_1 = 0{,}925$ м.

Следовательно, глубина в правом резервуаре равна $h_2 = h_1 - z_1 =$ = 3,0—0,92 = 2,08 м. Напор H_2 над центром второго (входного) отверстия будет $H_2 = h_2 - e = 2{,}08 - 0{,}8 = 1{,}28$ м. При напоре H_2 расход $Q =$ = 0,01 м³/с пройдет через наружное отверстие при его площади $\omega_2 =$

$= \dfrac{Q}{\mu\sqrt{2gH_2}} = \dfrac{0{,}01}{0{,}61\cdot 4{,}43\sqrt{1{,}28}} = 0{,}0032$ м², при этой площади $d_2 =$

$= \sqrt{\dfrac{4\omega_2}{\pi}} = 0{,}064$ м.

Пример 10.4. Через отверстие с острой кромкой, сделанное в центре торца патрубка диаметром $D = 0{,}25$ м (рис. 10.21), пропускается расход $Q = 0{,}020$ м³/с. Диаметр отверстия $d = 0{,}08$ м. Определить давление p в патрубке отверстием.

Решение. Для определения напора следует предварительно найти коэффициент μ, так как расстояние от кромки отверстия до стенки патрубка

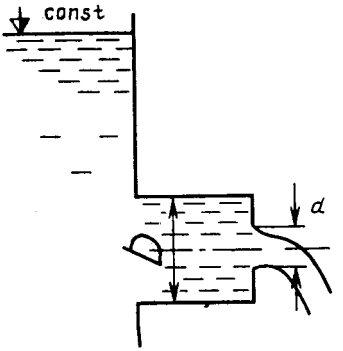


Рис. 10.21

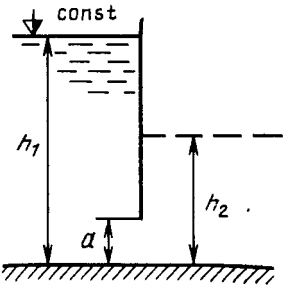


Рис. 10.22

$e = \dfrac{D-d}{2} = \dfrac{0{,}25-0{,}08}{2} = 0{,}085$ м, т. е. меньше, чем $3d = 0{,}24$ м.

Сжатие будет несовершенным, и $\mu_{нес}$ определится по формуле

$$\mu_{нес} = \mu\left[1 + 0{,}64\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right] = 0{,}61\left[1 + 0{,}64\left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = 0{,}614.$$

Скоростной напор не учитываем, так как $\dfrac{\Omega}{\omega} = \dfrac{0{,}049}{0{,}005} = 9{,}8 > 4$ (см. § 10.1) Тогда из (10.8) имеем

$$\sqrt{H} = \frac{Q}{\mu_{нес}\omega\sqrt{2g}} = \frac{0{,}02}{0{,}614 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}08^2 \cdot 4{,}43} = 1{,}46 \text{ м}^{0,5}$$

или $H = 2{,}14$ м; избыточное давление в патрубке $p = \rho g H = 1000 \cdot 9{,}81 \times \times 2{,}14 = 20\,993 = 20{,}99$ кПа.

Пример 10.5. 1. Определить, при какой глубине h_1 в резервуаре (рис. 10.22) расход из квадратного отверстия со стороной $a = 0{,}07$ м, расположенного у дна в середине боковой стенки, будет равен $Q = 0{,}025$ м³/с при свободном истечении. Сжатие — совершенное.

3. Определить, чему равна сторона квадратного отверстия a при затопленном истечении и пропуске того же расхода, если за резервуаром глубина воды равна $h_2 = 1{,}5$ м.

Решение. 1. В данном случае сжатие будет неполным и коэффициент $\mu_{неп}$ определится по формуле

$$\mu_{неп} = \mu\left(1 + k\frac{p'}{p}\right) = 0{,}61\left(1 + 0{,}15\frac{1}{4}\right) = 0{,}633.$$

Определим напор: $\sqrt{H} = \dfrac{Q}{\mu_{неп}\omega\sqrt{2g}} = \dfrac{0{,}02}{0{,}633 \cdot 0{,}7^2 \cdot 4{,}43} = 1{,}455 \text{ м}^{0,5}$;

$H = 2{,}12$ м. Отверстие — малое.

Глубина в резервуаре должна быть

$$h = H + \frac{a}{2} = 2{,}12 + \frac{0{,}07}{2} = 2{,}155 \text{ м}.$$

2. При истечении через затопленное отверстие напор z равен разности глубин: $z = h_1 - h_2 = 2{,}155 - 1{,}5 = 0{,}655$ м.

Определим площадь отверстия:

$$\omega = \frac{Q}{\mu_{\text{неп}}\sqrt{2gz}} = \frac{0{,}02}{0{,}633 \cdot 4{,}43\sqrt{0{,}655}} = 0{,}0088 \text{ м}^2.$$

Сторона квадратного отверстия $a_2 = 0{,}091$ м. Среднюю скорость по обе стороны отверстия не учитываем, так как она очень мала.

Пример 10.6. Определить расход и скорость в выходном сечении различных насадков, присоединенных к круглому малому отверстию в тонкой вертикальной стенке (рис. 10.14) при одинаковом во всех случаях напоре $H = 2$ м. Истечение — свободное. Диаметры выходного сечения отверстия и всех насадков, кроме расходящегося, $d = 0{,}06$ м. Расходящийся насадок имеет диаметр входного сечения $d = 0{,}06$ м и угол роспуска $\theta = 7°$. Угол конусности сходящегося насадка $\theta = 13°$. Длина насадков $l = 0{,}28$ м. Скоростью подхода пренебречь.

Решение. 1. Расход через отверстие при значении коэффициента расхода $\mu = 0{,}61$ равен $Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0{,}61 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}07^2 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 0{,}0147$ м³/с. Средняя скорость в сжатом сечении

$$v_c = Q/\varepsilon\omega = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}97 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 6{,}08 \text{ м/с}.$$

Расход через внешний цилиндрический насадок (см. рис. 10.9) определится по той же формуле при коэффициенте расхода $\mu = 0{,}82$:

$$Q = 0{,}82 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}07^2 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 0{,}0198 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Скорость в выходном сечении (сжатия на выходе нет, $\varepsilon = 1$) $v = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}82 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 5{,}14$ м/с.

2. Расход через конически сходящийся насадок (см. рис. 10.14, *а*) при угле конусности $\theta = 13°$ и значении $\mu = 0{,}945$ равен

$$Q = 0{,}945 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}07^2 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 0{,}0228 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Скорость в выходном сечении

$$v = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}97 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 6{,}08 \text{ м/с}.$$

3. Диаметр выходного сечения конически расходящегося насадка (см. рис. 10.14, *в*) при угле роспуска $\theta = 7°$ равен

$$d_2 = d + 2l\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = 0{,}07 + 2 \cdot 0{,}28\operatorname{tg}3{,}5° = 0{,}1 \text{ м}.$$

Коэффициент расхода при $\theta = 7°$ равен 0,45. Площадь выходного сечения $\Omega = 0{,}785\,D^2$. Расход $Q = \mu\Omega\sqrt{2gH} = 0{,}45 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}1^2 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 0{,}022$ м³/с. Средняя скорость в выходном сечении

$$v = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}45 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 2{,}82 \text{ м/с}.$$

4. Расход через коноидальный насадок (см. рис. 10.14, *б*) при $\mu = 0{,}97$

$$Q = 0{,}97 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}07^2 \cdot 4{,}43\sqrt{2} = 0{,}0234 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Скорость в выходном сечении $v = \frac{Q}{\omega} = \frac{0{,}0234}{0{,}785 \cdot 0{,}07^2} = 6{,}08$ м/с. Сравните полученные результаты.

Пример 10.7.

В резервуаре сделаны два круглых отверстия диаметром $d = 0{,}08$ м. Одно отверстие расположено в вертикальной боковой стенке на расстоянии $a = 0{,}5$ м от дна до его центра, другое — в центре дна. Глубина в резервуаре $h = 1{,}4$ м (рис. 10.23, *а*).

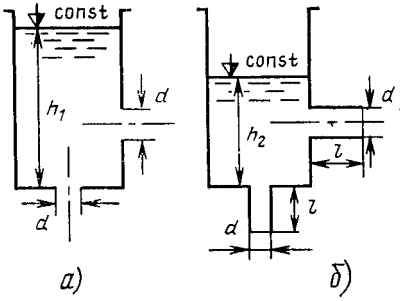


Рис. 10.23

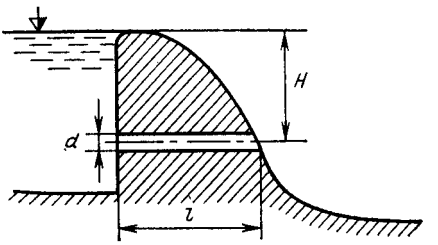


Рис. 10.24

Определить: 1) суммарный расход из отверстий; 2) глубину в резервуаре h_2 в случае, когда истечение происходит через насадки длиной $l = 0{,}3$ м, присоединенные к боковому отверстию горизонтально, к донному — вертикально (рис. 10.23, *б*). Через оба насадка проходит вычисленный суммарный расход.

Решение. 1. Суммарный расход из отверстий без учета скорости подхода

$$Q = Q_1 + Q_2 = \mu\omega\sqrt{2gH_1} + \mu\omega\sqrt{2gH_2} = \mu\omega\sqrt{2g}\left(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}\right),$$

при $\mu = 0{,}62$, $\omega = 0{,}785 \cdot 6^2 = 28{,}3$ см^2.

Напор над центром отверстия в боковой стенке $H_1 = h - a = 0{,}9$ м. Напор над центром отверстия, расположенного в дне, $H_2 = h = 1{,}4$ м; расход будет

$$Q = 0{,}61 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}08^2 \cdot 4{,}43\left(\sqrt{0{,}9} + \sqrt{1{,}4}\right) = 0{,}0289 \text{ м}^3/\text{с}.$$

2. По условию суммарный расход через насадки $Q = 0{,}0289$ м^3/с. Обозначим неизвестный напор над центром горизонтального (бокового) насадка H_1'. Тогда напор H_2' над центром выходного сечения вертикального насадка будет $H_2' = H_1' + a + l = H_1' + 0{,}5 + 0{,}3 = H_1' + 0{,}8$, суммарный расход через насадки определится из выражения

$$Q = \mu\omega\sqrt{2g}\left(\sqrt{H_1'} + \sqrt{H_1' + 0{,}8}\right), \text{ или}$$

$$0{,}0289 = 0{,}82 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}08^2 \cdot 4{,}43\left(\sqrt{H_1'} + \sqrt{H_1' + 0{,}8}\right);$$

$$1{,}583 = \sqrt{H_1'} + \sqrt{H_1' + 0{,}8}, \text{ или } 1{,}583 - \sqrt{H_1'} = \sqrt{H_1' + 0{,}8}.$$

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим

$$2{,}5 - 3{,}166\sqrt{H_1'} + H_1' = H_1' + 0{,}8, \text{ или } H_1' = 0{,}288 \text{ м}.$$

Глубина в резервуаре будет $h_2 = H_1' + a = 0{,}79$ м. Расход через боковой насадок

$$Q_н' = 0{,}82 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}08^2 \cdot 4{,}43\sqrt{0{,}288} = 0{,}0098 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Расход через вертикальный насадок при напоре $H_2' = H_1' + a + l = 1{,}088$ м

$$Q_н'' = 0{,}82 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}08^2 \cdot 4{,}43\sqrt{1{,}088} = 0{,}019 \text{ м}^3/\text{с},$$

суммарный расход $Q_н' + Q_н'' = 0{,}0288$ м^3/с.

Пример 10.8. Определить расход через водоспуск в теле плотины, если его длина $l = 30$ м, диаметр $d = 0{,}8$ м, напор над центром выходного сечения водоспуска 8 м. Истечение — свободное (рис. 10.24).

Решение. Расход через водоспуск определим по формуле (10.8), вычислив предварительно коэффициент расхода $\mu_{сист}$ по (10.22), так как на значение коэффициента расхода будут влиять гидравлические сопротивления по длине водоспуска.

Вычислим коэффициент потерь по длине $\zeta_{дл} = \lambda \dfrac{l}{d}$, приняв приближенное значение коэффициента Дарси $\lambda = 0{,}025$. Более точное значение λ следует определять в зависимости от шероховатости стенок трубы, числа Рейнольдса, области сопротивлений.

Полагая

$$\zeta_{вх} = 0{,}5;\ \alpha = 1{,}1;\ \zeta_{дл} = 0{,}025 \frac{30}{0{,}80} = 0{,}937,$$

получим

$$\mu_{сист} = \frac{1}{\sqrt{1{,}1 + 0{,}5 + 0{,}937}} = 0{,}628.$$

Расход через водоспуск $Q = \mu_{сист}\omega \sqrt{2gH} = 0{,}628 \times 0{,}785 \cdot 0{,}8^2 \times \times 4{,}43 \cdot 8 = 3{,}95$ м³/с.

Найдем, при каком значении относительной длины l/d значение $\mu_{сист}$ будет равно $\mu = 0{,}61$, т. е. как для малого отверстия в тонкой стенке при других данных, указанных выше.

Для удовлетворения поставленного условия при $\lambda = 0{,}025$ длина трубы водоспуска должна равняться 34,8 м. Таким образом, при принятом значении коэффициента Дарси коэффициент расхода системы $\mu_{сист} = 0{,}61$ при $l/d = 43{,}5$.

Глава 11

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ

11.1. Общая характеристика явления

Изменение напора при истечении может быть вызвано:

1) изменением положения уровня в резервуаре (сосуде, водохранилище и т. п.), из которого вытекает жидкость (в питателе);

2) изменением положения уровня в резервуаре, в который втекает жидкость (в приемнике);

3) одновременным изменением положений уровней в обоих резервуарах (в питателе и приемнике);

4) другими причинами, например изменением давления над свободными поверхностями жидкости.

При изменении напора во времени изменяются параметры потока (расход, скорости, давление). Поэтому истечение жидкости из резервуара при переменном напоре представляет один из случаев неустановившегося движения.

Для определения параметров неустановившегося движения уравнение Бернулли, полученное для установившегося движения, в общем случае не пригодно. Однако при истечении из резервуара большой площади Ω (питателя) через отверстие, насадок или трубу площадью $\omega \ll \Omega$ в другой резервуар (приемник) также большой площади или в газовую среду уровни в резервуарах изменяются медленно; ускорения струи малы, скорость изменяется заметно, только если процесс продолжителен. Имеет место к в а з и у с т а н о в и в ш е е с я (см. § 3.5) движение. При этом локальные силы инерции считаем пренебрежимо малыми.

При расчете параметров квазиустановившихся потоков принято время процессов разбивать на бесконечно большое число бесконечно малых интервалов dt и в пределах каждого интервала считать движение установившимся и пользоваться уравнением Бернулли.

Основная задача при рассмотрении истечения с переменным напором — определение времени, за которое напор изменится от начального значения H_1 до некоторого назначенного значения H_2.

Истечение при переменном напоре может происходить через незатопленные или затопленные отверстия, насадки различных форм, трубы. В процессе истечения убыль жидкости в резервуаре-питателе может частично восполняться притоком от внешнего источника, а может и не восполняться. Площади поперечных сечений резервуаров могут быть постоянными или переменными по высоте, так как имеются многообразные схемы истечения.

11.2. Истечение при переменном напоре и постоянном притоке

Рассмотрим истечение из резервуара через отверстие в атмосферу. Площадь резервуара Ω не постоянна по высоте, площадь отверстия ω ($\omega \leqslant \Omega$; $v \gg v_0$), начальный напор над центром отверстия H_1. В резервуар от внешнего источника поступает жидкость, расход притока $Q_{\text{пр}} = \text{const}$. Пренебрегая $\alpha_0 v_0^2/2g$, получим, что при неизменности напора, т. е. при установившемся движении, для вытекания расхода $Q_{\text{пр}}$ через отверстие площадью ω потребуется напор $H_{\text{пр}}$, определяемый из формулы

$$Q_{\text{пр}} = \mu\omega\sqrt{2gH_{\text{пр}}}, \tag{11.1}$$

откуда

$$H_{\text{пр}} = \frac{Q_{\text{пр}}^2}{2g\mu^2\omega^2}.$$

Если напор над центром отверстия равен $H_{\text{пр}}$, движение будет установившимся, напор не будет изменяться и из отверстия будет вытекать точно такой же расход, что и поступает в резервуар, т. е. $Q_{\text{пр}}$.

Если напор H_1 над центром отверстия в начальный момент времени не равен $H_{пр}$, возможны два случая:

1) при $H_1 < H_{пр}$ через отверстие будет вытекать расход $Q < Q_{пр}$. Объем жидкости в резервуаре будет увеличиваться, напор повышаться, а расход постепенно увеличиваться. Когда напор станет равным $H_{пр}$, расход достигнет значения $Q_{пр}$, т. е. отток станет равным притоку, движение станет установившимся;

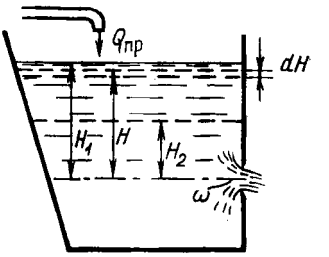


Рис. 11.1

2) при $H_1 > H_{пр}$ через отверстие будет вытекать расход $Q > Q_{пр}$. В связи с этим уровень жидкости в резервуаре будет постепенно понижаться, напор и расход будут уменьшаться до тех пор, пока напор не станет равным $H_{пр}$ и соответственно вытекающий расход не сравняется с расходом притока $Q_{пр}$. После этого будет происходить истечение при постоянном напоре $H_{пр}$ и расходе $Q = Q_{пр}$.

Определим время изменения напора в резервуаре от H_1 до H_2. Используя изложенное выше допущение о возможности применения формулы расхода при постоянном напоре (т. е. при установившемся движении), рассмотрим истечение за бесконечно малый интервал времени $\mathrm{d}t$ при некотором промежуточном значении напора H (рис. 11.1).

За время $\mathrm{d}t$ через отверстие вытечет объем жидкости

$$\mathrm{d}W = Q\,\mathrm{d}t = \mu\omega\sqrt{2gH}\;\mathrm{d}t,$$

а втечет в резервуар объем жидкости $Q_{пр}\mathrm{d}t$.

Изменение объема жидкости в резервуаре за время $\mathrm{d}t$ составит

$$(Q_{пр} = -\mu\omega\sqrt{2gH})\,\mathrm{d}t.$$

Заключенное в скобки выражение может быть положительным или отрицательным в зависимости от соотношения Q и $Q_{пр}$.

В результате изменения объема за время $\mathrm{d}t$ уровень жидкости в резервуаре изменится (поднимется или опустится) на бесконечно малое значение $\mathrm{d}H$. При этом изменение объема жидкости равно $\Omega\,\mathrm{d}H$, где Ω — площадь поперечного сечения резервуара на уровне H.

Очевидно, что

$$\Omega\,\mathrm{d}H = (Q_{пр} - \mu\omega\sqrt{2gH})\,\mathrm{d}t.$$

Подставив $Q_{пр}$ по (11.1), получим

$$\Omega\,\mathrm{d}H = \mu\omega\sqrt{2g}\,(\sqrt{H_{пр}} - \sqrt{H})\,\mathrm{d}t.$$

Отсюда

$$\mathrm{d}t = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\,\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H_{пр}} - \sqrt{H}}. \qquad (11.2)$$

Введем новую переменную $y=\sqrt{H_{\text{пр}}}-\sqrt{H}$, тогда $\mathrm{d}y=-\dfrac{\mathrm{d}H}{2\sqrt{H}}$ и $\mathrm{d}H=-2\sqrt{H}\,\mathrm{d}y$. Но $-\sqrt{H}=y-\sqrt{H_{\text{пр}}}$, поэтому $\mathrm{d}H=2\left(y-\sqrt{H_{\text{пр}}}\right)\mathrm{d}y$. Подставив $\mathrm{d}H=2\left(y-\sqrt{H_{\text{пр}}}\right)\mathrm{d}y$ и $\sqrt{H_{\text{пр}}}-\sqrt{H}=y$ в (11.2), получим

$$\mathrm{d}t=\frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\,\frac{2\left(y-\sqrt{H_{\text{пр}}}\right)\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\mathrm{d}y-\frac{\sqrt{H_{\text{пр}}}\,\mathrm{d}y}{y}\right).$$

Отсюда находим выражение для времени t, за которое напор над центром отверстия изменится от H_1 до H_2:

$$t=\frac{2}{\omega\sqrt{2g}}\int\limits_{y_1=\sqrt{H_{\text{пр}}}-\sqrt{H_1}}^{y_2=\sqrt{H_{\text{пр}}}-\sqrt{H_2}}\frac{\Omega}{\mu}\left(1-\frac{\sqrt{H_{\text{пр}}}}{y}\right)\mathrm{d}y. \qquad (11.3)$$

В (11.3) под знаком интеграла кроме переменной y имеются еще переменные Ω и μ. В общем случае Ω может зависеть от H, а коэффициент расхода μ также может изменяться с изменением напора, так как при этом изменяются числа Рейнольдса, Вебера, Фруда, которые могут влиять на μ (см. § 10.2). Рассмотрим только те случаи, когда допустимо принимать изменение коэффициента расхода в процессе истечения настолько незначительным, что можно принять μ постоянным.

Далее могут представиться два случая.

1. Площадь поперечного сечения резервуара с глубиной не изменяется ($\Omega=\text{const}$), тогда в (11.3) можно вынести Ω за знак интеграла:

$$t=\frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int\limits_{y_1=\sqrt{H_{\text{пр}}}-\sqrt{H_1}}^{y_2=\sqrt{H_{\text{пр}}}-\sqrt{H_2}}\left(1-\frac{\sqrt{H_{\text{пр}}}}{y}\right)\mathrm{d}y$$

или

$$t=\frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}+\sqrt{H_{\text{пр}}}\ln\frac{\sqrt{H_{\text{пр}}}-\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_{\text{пр}}}-\sqrt{H_2}}\right). \qquad (11.4)$$

2. Площадь поперечного сечения резервуара изменяется в зависимости от глубины и тем самым от напора H.

Здесь также возможны два случая:

а) зависимость площади Ω от H можно выразить аналитически: $\Omega=f(H)$. Примером является горизонтальный цилиндрический резервуар диаметром $D=2r_0$, длиной L (рис. 11.2).

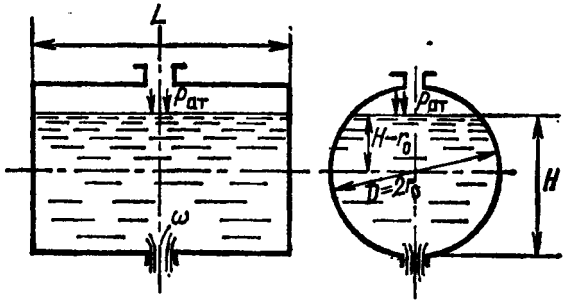


Рис. 11.2

При истечении жидкости из такого резервуара при отсутствии притока ($Q_{пр} = 0$; $H_{пр} = 0$)

$$\mathrm{d}t = -\frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\,\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}}. \qquad (11.5)$$

Выразив площадь Ω через H

$$\Omega = 2L\sqrt{H(2r_0 - H)},$$

проинтегрируем (11.5), заменив $\mathrm{d}H$ через $\mathrm{d}(2r_0 - H)$. Получим

$$t = \frac{2L}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{2r_0}^{0} \sqrt{2r_0 - H}\;\mathrm{d}(2r_0 - H).$$

Время, за которое из резервуара выльется вся жидкость (время полного опорожнения резервуара), равно

$$T = \frac{4LD\sqrt{D}}{3\mu\omega\sqrt{2g}}; \qquad (11.6)$$

б) зависимость площади Ω от H не выражается аналитически. Примерами таких резервуаров служат водохранилища и пруды. Если зависимость $\Omega = f(H)$ не выражается аналитически, взять интеграл (11.5) невозможно.

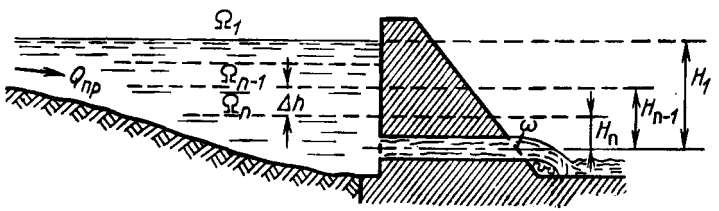


Рис. 11.3

Рассмотрим приближенное решение задачи об опорожнении водохранилища (рис. 11.3) через донный водовыпуск площадью выходного сечения ω при условии, что заданы приток $Q_{\text{пр}}$, коэффициент расхода водовыпуска μ и кривая $\Omega = f(H)$.

Объем жидкости, которая должна вытечь из водохранилища, разобьем горизонтальными плоскостями на m слоев равной высоты Δh (значения Δh принимаются исходя из необходимой точности расчета). Объем n-го слоя

$$\Delta W = \Omega \Delta h = \frac{\Omega_{n-1} + \Omega_n}{2} \Delta h;$$

$$t_{H_1}^{H_m} = \frac{\Delta h}{2\mu\omega\sqrt{2g}} \left[\left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{H_1} - \dfrac{Q_{\text{пр}}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} + \frac{\Omega_2}{\sqrt{H_2} - \dfrac{Q_{\text{пр}}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\Omega_2}{\sqrt{H_2} - \dfrac{Q_{\text{пр}}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} + \frac{\Omega_3}{\sqrt{H_3} - \dfrac{\Omega_{\text{пр}}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} \right) + \ldots \right] =$$

$$= \frac{\Delta h}{2\mu\omega\sqrt{2g}} \left[\frac{\Omega_1}{\sqrt{H_1} - \dfrac{Q_{\text{пр}}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Omega_2}{\sqrt{H_2} - \dfrac{Q_{\text{пр}}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} + \ldots + \frac{\Omega_n}{\sqrt{H_m} - \dfrac{Q_{\text{пр}}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} \right]. \quad (11.7)$$

Значения $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ находятся по кривой $\Omega = f(H)$.

В формуле (11.7) время уменьшения напора от H_1 до H_m получается суммированием промежутков времени, необходимого для вытекания каждого из слоев, на которые разделен по высоте объем той части водохранилища, которая заключена между отметками H_1 и H_m.

Тот же расчет можно выполнить несколько иначе. После определения объема каждого слоя ΔW следует вычислить средний напор для каждого слоя

$$H_{\text{ср}} = \frac{H_{n-1} + H_n}{2},$$

затем найти средний расход при вытекании из водохранилища данного слоя

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_{\text{ср}}}$$

и вычислить необходимое для этого время

$$\Delta t = \frac{\Delta W}{Q - Q_n}.$$

Затем следует просуммировать полученные интервалы времени Δt.

11.3. Истечение из призматического резервуара через незатопленное и затопленное отверстия при отсутствии притока

При истечении жидкости в атмосферу без притока в резервуар (рис. 11.4, *а*) уровень в резервуаре понижается, напор над центром выходного отверстия со временем непрерывно уменьшается, следовательно, скорость струи и расход уменьшаются.

При истечении через затопленное отверстие жидкости из резервуара *А* с постоянным уровнем в резервуар *Б* (рис. 11.4, *б*) из-за подъема уровня во втором резервуаре напор уменьшается.

Оба случая можно рассматривать как частный случай истечения [см. (11.4)], но в условиях, когда нет притока ($Q_{пр} = 0$, $H_{пр} = 0$). Тогда изменение напора от H_1 до H_2 произойдет за время

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right). \qquad (11.8)$$

Приняв $H_2 = 0$, получим время полного опорожнения резервуара для случая, приведенного на рис. 11.4, *а*. Время выравнивания уровней в резервуарах для случая, приведенного на рис. 11.4, *б*, составит

$$T = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}, \qquad (11.9)$$

где Ω — площадь поперечного сечения резервуара *Б*.

Выражения для времени опорожнения T можно представить в следующем виде:

$$T = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}} = \frac{2W}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}}.$$

В первом случае (рис. 11.4, *а*) $W = \Omega H_1$ — объем жидкости, вытекающей из резервуара за время T; $\mu\omega\sqrt{2gH_1}$ — расход жидкости, соответствующий напору H_1.

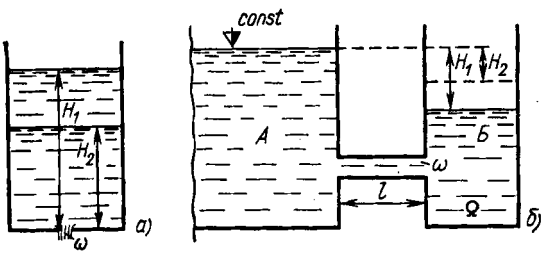


Рис. 11.4

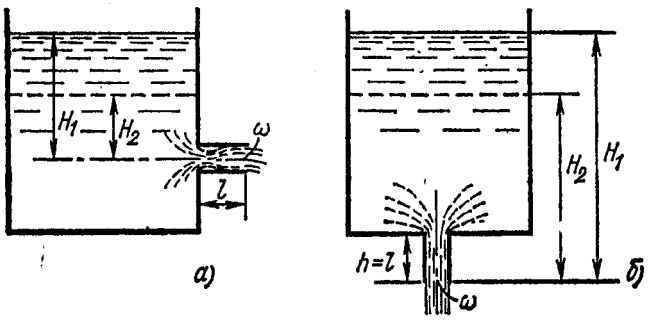


Рис. 11.5

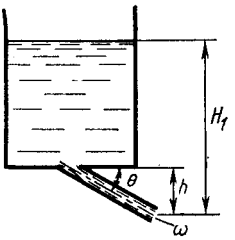


Рис. 11.6

Учитывая, что объем W вытекает из резервуара при постоянном напоре H_1 за время

$$t = \frac{W}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}}, \qquad (11.10)$$

получаем $T = 2t$, т. е. время опорожнения призматического резервуара при переменном напоре и отсутствии притока вдвое больше, чем время, за которое этот же объем жидкости вытечет при постоянном напоре, равном начальному напору.

При использовании формул, в которые входят напоры H_1 и H_2, следует помнить, что при истечении под уровень (затопленное выходное отверстие) действующим напором является разность уровней в резервуарах z (в соответствующие моменты времени t_1 и t_2), а при истечении в атмосферу (незатопленное отверстие) напор определяется над центром выходного отверстия.

Значение коэффициента расхода μ принимается в соответствии с рекомендациями, изложенными в гл. 10. При $l = 0$ (рис. 11.4, *б*, 11.5, *а*, *б*) происходит истечение через отверстие, при $l = (3 \div 4)\,d$ жидкость вытекает через насадок, а при большей относительной длине l/d — через трубу или систему труб. В последнем случае, как указывалось в § 10.13, μ вычисляется как коэффициент расхода системы, т. е. с учетом всех коэффициентов сопротивлений. Сохраним здесь за коэффициентом расхода обозначение μ, но при этом следует помнить, что в зависимости от конструкции выпускного устройства (отверстие, насадок или система труб) численные значения μ различны.

Применительно к случаям истечения жидкости через вертикальные или наклонные насадки и короткие трубы конечный напор в момент полного опорожнения резервуара (но не отводящей трубы, в которой еще имеется жидкость) будет равен, естественно, не нулю,

а h (рис. 11.5, *б*, 11.6). Для таких схем истечения время вытекания всей жидкости из резервуара

$$T = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{h}\right). \qquad (11.11)$$

11.4. Истечение при изменении уровней в обоих резервуарах

Рассмотрим два резервуара A и $Б$ (рис. 11.7), заполненных жидкостью и соединенных системой труб, через которые жидкость перетекает из одного резервуара в другой. Площадь выходного сечения трубы ω, площади поперечных сечений резервуаров неизменны по высоте и равны Ω_1 и Ω_2. Начальный перепад напоров в резервуарах равен H_1. Уровень жидкости в резервуаре A понижается, а в резервуаре $Б$ повышается. Это приводит к уменьшению действующего напора (здесь — разность уровней жидкости в резервуарах). Процесс истечения закончится, когда уровни в резервуарах сравняются и напор станет равным нулю.

Определим время изменения напора от H_1 до некоторого значения H_2. В некоторый промежуточный момент времени напор $H = z_1 - z_2$. За время $\mathrm{d}\,t$ под действием напора из резервуара A в резервуар $Б$ через выходное отверстие соединительной трубы площадью ω перетечет объем жидкости

$$\mathrm{d}\,W = \mu_{\text{сист}}\omega\sqrt{2gH}\;\mathrm{d}\,t, \qquad (11.12)$$

где $\mu_{\text{сист}}$ — коэффициент расхода, в данном случае системы труб.

Уровень в резервуаре A понизится на $\mathrm{d}\,z_1$, а в резервуаре $Б$ повысится на $\mathrm{d}\,z_2$, что приведет к изменению действующего напора $H = z_1 - z_2$ на

$$\mathrm{d}\,H = \mathrm{d}\,z_1 - \mathrm{d}\,z_2. \qquad (11.13)$$

Объем, перетекший за время $\mathrm{d}\,t$ из резервуара A в резервуар $Б$,

$$\mathrm{d}\,W = -\Omega_1\mathrm{d}\,z_1 = \Omega_2\mathrm{d}\,z_2. \qquad (11.14)$$

Подставив $\mathrm{d}\,W$ из (11.12) в (11.14), получим

$$\mu\omega\sqrt{2gH}\;\mathrm{d}\,t = -\Omega_1\mathrm{d}\,z_1,$$

откуда

$$\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\,\frac{\Omega_1\mathrm{d}\,z_1}{\sqrt{H}}. \qquad (11.15)$$

Для интегрирования нужно выразить Ω_1 и $\mathrm{d}z_1$ через H и $\mathrm{d}H$.

Для резервуаров, в которых площади поперечных сечений не зависят от H, выразим $\mathrm{d}z_1$ только через $\mathrm{d}H$.

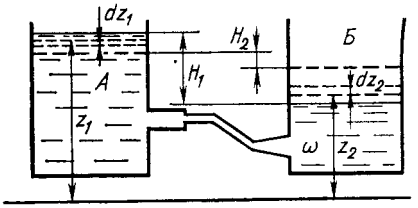


Рис. 11.7

Из (11.14) $\mathrm{d}z_2 = -\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\mathrm{d}z_1$.

Подставив это выражение в (11.13), получим

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}z_1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\mathrm{d}z_1 = \frac{\Omega_1+\Omega_2}{\Omega_2}\mathrm{d}z_1.$$

Тогда

$$\mathrm{d}z_1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2}\mathrm{d}H. \qquad (11.16)$$

Подставив $\mathrm{d}z_1$ из (11.16) в (11.15), получим

$$t = -\frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_2}\frac{\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2}\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = \frac{\Omega_1\Omega_2}{(\Omega_1+\Omega_2)\,\mu\omega\sqrt{2g}}\int_{H_2}^{H_1}\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}}$$

или

$$t = \frac{2\Omega_1\Omega_2}{(\Omega_1+\Omega_2)\,\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right). \qquad (11.17)$$

Найдем время выравнивания уровней в резервуарах, т. е. время, за которое напор изменится от H_1 до $H_2 = 0$:

$$T = \frac{2\Omega_1\Omega_2\sqrt{H_1}}{(\Omega_1+\Omega_2)\,\mu\omega\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega_2}{\Omega_1+\Omega_2}\frac{\Omega_1 H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}}.$$

Если площадь поперечного сечения одного из резервуаров (например, Ω_1) значительно больше, чем площадь поперечного сечения второго резервуара Ω_2, то, преобразуя (11.7), получим с учетом $\Omega_2/\Omega_1 \ll 1$

$$T = \frac{2\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1\left(1+\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right) = \frac{2\Omega_2}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right).$$

Здесь Ω_2 — площадь поперечного сечения меньшего резервуара

Если $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, то

$$t = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right). \qquad (11.18)$$

11.5. Контрольные вопросы и примеры

1. Какие допущения приняты при рассмотрении истечения жидкости при переменном напоре?

2. Могут ли при истечении в условиях переменности напора наблюдаться случаи, когда напор увеличивается во времени? А когда напор с течением времени уменьшается?

3. Влияют ли геометрические параметры сосудов (резервуаров) на конечные результаты расчета? Если влияют, какие именно и каким образом?

4. Запишите формулу для определения времени, в течение которого происходит определенное изменение напора, при истечении из призматического резервуара через отверстия (без притока жидкости извне). Зависит ли это время от числа Рейнольдса, от относительного напора и от каких-либо других факторов?

5. Определите время вытекания одного и того же объема жидкости при постоянном и переменном напоре (прочие условия см. в § 11.3).

6. Какие особенности имеет истечение жидкости при изменении уровней в обоих резервуарах? Запишите расчетные формулы.

Пример 11.1. В призматическом резервуаре с постоянной по глубине площадью поперечного сечения $\Omega = 5$ м^2 глубина воды $h = 4$ м. В дне резервуара находится отверстие с острыми кромками площадью $\omega = 0{,}03$ м^2. Определить: 1) время t_1, в течение которого из резервуара вначале вытечет половина имеющегося объема воды; 2) время t_2, за которое вытечет через отверстие оставшаяся половина объема воды. Притока воды в резервуар нет. Истечение — в атмосферу.

Решение. 1. При вытекании половины объема воды напор над донным отверстием будет изменяться от $H_1 = h = 4$ м до $H_2 = \frac{h}{2} = 2$ м. Время, затрачиваемое на эту часть процесса, определим по формуле (11.8):

$$t_1 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right) = \frac{2 \cdot 5}{0{,}61 \cdot 0{,}03 \cdot 4{,}43}\left(\sqrt{4} - \sqrt{2}\right) =$$

$$= 72{,}28 \text{ с} = 1 \text{ мин } 12{,}3 \text{ с}.$$

2. Оставшаяся часть объема воды вытечет за время

$$t_2 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{\frac{h}{2}} - \sqrt{0}\right) = \frac{2 \cdot 5}{0{,}61 \cdot 0{,}03 \cdot 4{,}43}\sqrt{2} =$$

$$= 174{,}4 \text{ с} = 2 \text{ мин } 54 \text{ с}.$$

Следует обратить внимание на то, что время, необходимое на вторую часть процесса, заметно больше времени, необходимого на первую часть. Кроме того, отметим, что коэффициент расхода условно принят постоянным. На самом деле при изменении напора H изменяются значения числа $\mathrm{Re}_H = \frac{\sqrt{2gH}\,d}{\nu}$ и соответственно изменяются и значения коэффициента расхода μ (см. рис. 10.4 и § 11.1).

Пример 11.2. Определить время t опорожнения резервуара (рис. 11.8) через отверстие с острой кромкой в центре дна. Диаметр верхней части, $d_1 = 5$ м, глубина воды в верхней части резервуара $h_1 = 1{,}5$ м. Диаметр нижней части $d_2 = 1{,}8$ м, глубина $h_2 = 1{,}2$ м. Диаметр отверстия $d = 0{,}1$ м. Притока нет.

Решение. Время t опорожнения резервуара сложится из двух периодов времени:

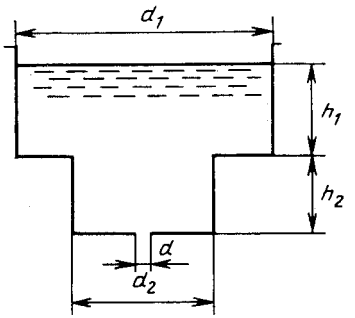


Рис. 11.8

1) времени t_1 изменения напора над центром отверстия от $H_1 = h_1 + h_2 = 2{,}7$ м до $H_2 = h_2 = 1{,}2$ м. По (11.8) получим

$$t_1 = \frac{2\Omega_1}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right) = \frac{2 \cdot 0{,}785 \cdot 5^2}{0{,}61 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}1^2 \cdot 4{,}43} \times$$

$$\times \left(\sqrt{2{,}7} - \sqrt{1{,}2}\right) = 1013{,}1 \text{ с}.$$

2) времени t_2 изменения напора над центром отверстия от $h_2 = 1{,}2$ м до нуля:

$$t_2 = \frac{2\Omega_2}{\mu\omega\sqrt{2g}}\sqrt{H_2} = \frac{2 \cdot 0{,}785 \cdot 1{,}8^2\sqrt{1{,}2}}{0{,}61 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}1^2 \cdot 4{,}43} = 262{,}7 \text{ с}.$$

Время опорожнения резервуара $t = t_1 + t_2 = 1275{,}8$ с $= 21$ мин 16 с.

Пример 11.3. Определить время шлюзования теплохода из верхнего бьефа в нижний через двухкамерный шлюз (рис. 11.9) при размерах камер: ширина $b = 20$ м, длина $l = 250$ м, площадь отверстий $\omega = 16$ м^2 (что соответствует подъему затворов на 0,8 м при ширине $b = 20$ м). Отметки уровня воды: в верхнем бьефе (ВБ) — 100 м, в верхней (№ 1) камере 90 м, в нижней (№ 2) камере и нижнем бьефе (НБ) — 10 м. Отметки центра отверстий: верхнего — 95 м, среднего — 82 м, нижнего — 65 м. Коэффициент расхода отверстий (большие отверстия) принять $\mu = 0{,}7$. На открытие шлюзовых ворот и передвижение теплохода затрачивается время $t_0 = 15$ мин.

Решение. Время T шлюзования будет складываться из пяти периодов, определяемых из уравнений, отражающих закономерности изменения напора при наполнении и опорожнении камер шлюза:

1) времени t_1 наполнения камеры № 1 до отметки центра отверстия, равной 95 м, т. е. времени истечения объема $W = bl\,(95-89)$ через отверстие при постоянном напоре, которое определится из зависимости $t_1 = \dfrac{W}{Q}$, где Q — расход из отверстия при постоянном напоре $H_1 = 100-95 = 5$ м, определяемый по формуле (10.8):

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0{,}7 \cdot 16 \cdot 4{,}43\sqrt{5} = 110{,}95 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Объем W камеры от отметки 26 м до отметки 30 м будет

$$W = 20 \cdot 250\,(95 - 89) = 30\,000 \text{ м}^3; \quad t_1 = \frac{30\,000}{110{,}95} = 270{,}4 \text{ с}.$$

2) времени t_2 наполнения камеры № 1 от отметки 95 м до отметки ВБ, т. е. при изменении напора от $H_1 = 100-95 = 5$ м до 0 м, или времени выравнивания уровня в камере № 1 с уровнем ВБ, которое определится по формуле (11.8)

$$t_2 = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot 250 \cdot 20\sqrt{5}}{0{,}7 \cdot 16 \cdot 4{,}43} = 450{,}7 \text{ с},$$

т. е. за время t_2 происходит истечение из-под постоянного уровня под переменный уровень в камеру № 1. Уровень воды при этом повышается от отметки 95 м до отметки 100 м. По истечении времени $t_1 + t_2$ теплоход проходит в камеру № 1 шлюза;

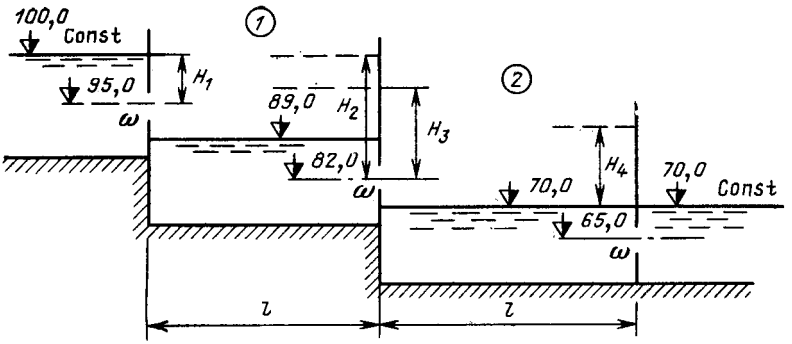


Рис. 11.9

3) времени t_3 наполнения камеры № 2 от отметки 70 м до отметки 82 м — центра отверстия. При этом напор изменяется от $H_2 = 100—70 = 30$ м до напора $H_3 = 88—82 = 6$ м. Повышение уровня в нижней камере от отметки 70 м до отметки 82 м вызовет понижение уровня в камере № 1 также на 12 м, т. е. до отметки 88 м (размеры камер шлюза в плане одинаковы). Будет происходить истечение из-под переменного уровня в камере № 1 в атмосферу. Время t_3 определится по формуле (11.8):

$$t_3 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{H_2} - \sqrt{H_3}) = \frac{2\cdot 250\cdot 20}{0{,}7\cdot 16\cdot 4{,}43}(\sqrt{30} - \sqrt{6}) =$$

$$= 610{,}7 \text{ с}.$$

4) времени выравнивания уровня в камерах № 1 и 2 при изменении напора от $H_3 = 6$ м до $H_4 = 0$, т. е. времени истечения при обоих переменных уровнях, которое определится по формуле (11.18):

$$t_4 = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{H_3} - \sqrt{H_4}) = \frac{250\cdot 20}{0{,}7\cdot 16\cdot 4{,}43}\sqrt{6} = 246{,}8 \text{ с}.$$

После выравнивания уровень в камерах № 1 и № 2 установится на отметке 85 м и теплоход может из первой камеры проследовать во вторую;

5) времени t_5 выравнивания уровня в камере № 2 с уровнем в НБ, которое будет происходить через затопленное нижнее отверстие при изменении напора от $H_4 = 85—70 = 15$ м до $H_5 = 0$. Время t_5, т. е. время процесса истечения из-под переменного верхнего уровня под постоянный нижний уровень, определится по (11.8):

$$t_5 = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{H_4} - \sqrt{H_5}) = \frac{2\cdot 250\cdot 20}{0{,}7\cdot 16\cdot 4{,}43}\sqrt{15} = 780{,}6 \text{ с}.$$

После этого периода теплоход может проследовать из шлюза в НБ. Время шлюзования будет равно сумме $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 900 + 270{,}4 + 450{,}7 + 610{,}7 + 246{,}8 + 780{,}6 = 3259$ с = 54 мин 19 с.

Глава 12

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СТРУИ

12.1. Классификация струй

Потоки жидкости или газа, не имеющие твердых границ, называются соответственно жидкими или газовыми струями.

Струи классифицируются по ряду признаков. Прежде всего различают затопленные и незатопленные струи.

К затопленным относятся струи, которые движутся в жидкости, свойства которой однородны со струей, или в пространстве, занятом другой жидкостью. Струя может распространятбся в движущейся жидкости или газе (в спутном или во встречном потоке)

Незатопленная жидкая струя движется в газовом пространстве, например в воздухе. Таковы струи дождевальных и пожарных установок, фонтанов, гидромониторов.

Различают также струи, движущиеся в неограниченном пространстве (свободные струи), и ограниченные струи, движение которых происходит в присутствии стенки (пристенная струя) или в тупиковой конструкции.

По форме поперечного сечения струи делят на осесимметричные (круглое сечение) или плоские.

Температура (а следовательно, и плотность, и вязкость) струи может отличаться от температуры пространства, где она движется, например при сбросе воды из тепловых или атомных электростанций в охладители-водохранилища (пруды).

Режим движения струй может быть ламинарным или турбулентным. Здесь будем рассматривать турбулентные струи как наиболее часто встречающиеся.

12.2. Затопленные струи

При истечении в неподвижную однородную жидкость (рис. 12.1) струя постепенно расширяется. Считается, что в начальном сечении струи плоская эпюра скоростей прямоугольная. На границе струи с окружающей неподвижной жидкостью образуются вихри, поверхность струи по границам «взрыхленная». Осредненные очертания границ струи прямолинейные. На границе и вблизи нее формируется струйный пограничный турбулентный слой. Интенсивные пульсации скорости и перемешивание приводят к тому, что между струей и окружающей жидкостью происходит обмен количеством движения, струя подтормаживается, расширяется и одновременно увлекает с собой часть «внешней» жидкости.

Давление по длине струи сохраняется постоянным и равным давлению в окружающем пространстве. Количество движения струи по длине также не изменяется.

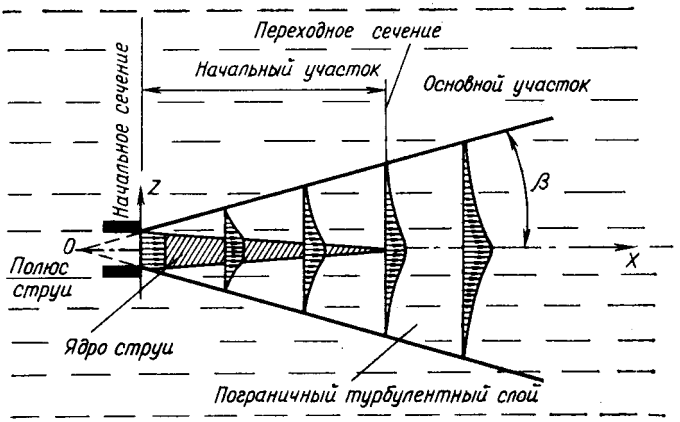


Рис. 12.1

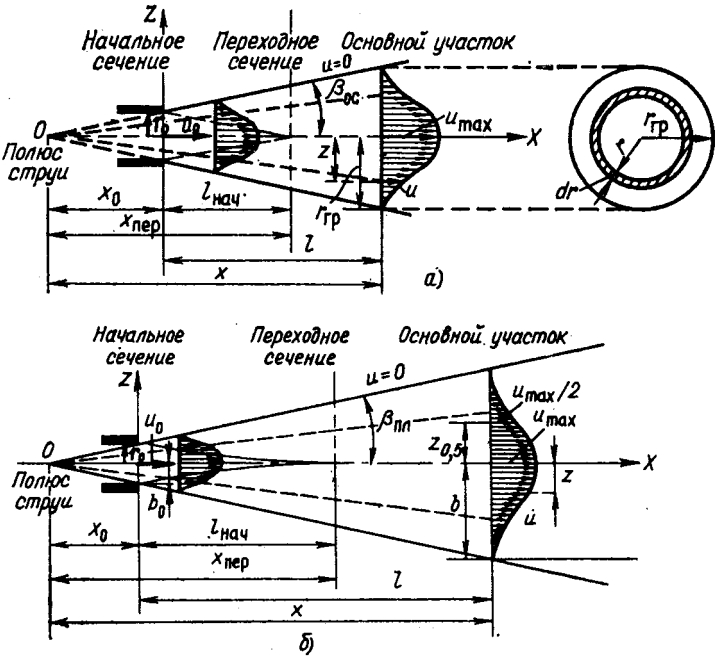


Рис. 12.2

При выходе из насадка и на некотором расстоянии от него в центральной части струи существует я д р о струи с постоянными осредненными скоростями. С увеличением поперечного размера пограничного слоя толщина ядра уменьшается. Затем ядро с равномерным распределением скоростей исчезает. Сечение, где это про-

исходит, называют переходным, оно разделяет начальный и основной участки струи. На основном участке осевая скорость уменьшается. Если принять угол расширения границ струи β одинаковым на основном и начальном участках (на самом деле они несколько различаются) и продлить внешние границы основного участка, найдем точку их пересечения — так называемый полюс струи (точка O). Поперечные составляющие скорости в струях всегда заметно меньше, чем продольно направленные.

Расширение струи зависит от структуры и интенсивности турбулентности ε_0 на выходе из насадка (сопла) и от формы поперечного сечения струи.

Угол расширения характеризуется значениями $\operatorname{tg}\beta$, которые для осесимметричных струй (рис. 12.2, *а*) составляют

$$\operatorname{tg}\beta_{\text{ос}} = 3{,}4a; \tag{12.1}$$

для плоских струй (рис. 12.2, *б*)

$$\operatorname{tg}\beta_{\text{пл}} = 2{,}4a, \tag{12.2}$$

где a — коэффициент, характеризующий влияние турбулентности струи на ее расширение. При малой интенсивности турбулентности $a = 0{,}066 \div 0{,}08$, за решетками, специально турбулизирующими поток на выходе, $a \approx 0{,}27$. В среднем для осесимметричных струй при малых ε_0 принимают $a \approx 0{,}07 \div 0{,}08$, а для плоских струй $a \approx 0{,}09 \div 0{,}12$.

Рассмотрим (рис. 12.2), как изменяются продольные скорости по длине струи (по координате x). Примем обозначения: u_0 — скорость в ядре, u_{max} — максимальная скорость в сечении струи (на ее оси) за пределами начального участка; r_0 и b_0 — радиус и полувысота начального (выходного) сечения струи; $r_{\text{гр}}$ — изменяющийся по длине радиус границы струи; b — высота (по оси OZ) плоской струи; ρ_0 — плотность жидкости в выходном сечении.

Установлено, что эпюры безразмерных скоростей u/u_{max} в основном участке струи подобны, т. е. в принадлежащих разным сечениям по длине точках, характеризующихся одним и тем же значением относительной координаты z/x, относительные скорости u/u_{max} одни и те же.

Прямолинейность границ струй приводит к связи $r_{\text{гр}} = x \operatorname{tg}\beta_{\text{ос}}$ и $b = x \operatorname{tg}\beta_{\text{пл}}$ (x отсчитывается от полюса струи). Поэтому часто профили (эпюры) безразмерных скоростей представляют в виде

$$u/u_{max} = f(z/r_{\text{гр}}) \quad \text{и} \quad u/u_{max} = f_1(z/b).$$

Так как точное определение границ струи, т. е. геометрического места точек, где $u = 0$, затруднительно, то в качестве опорной точки, по отношению к которой ведется отсчет координаты z, при-

нимают точку, в которой $u = 0{,}5\ u_{max}$. Тогда

$$u/u_{max} = (z/z_{0,5}), \qquad (12.3)$$

где $z_{0,5}$ — расстояние струи до точки, где $u = 0{,}5\ u_{max}$.

На рис. 12.3 иллюстрируется универсальность эпюр безразмерных скоростей.

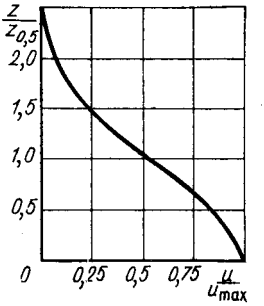


Рис. 12.3

Перейдем к определению закономерностей изменения максимальной скорости на оси струи по длине основного участка. Теоретически найдено, что на основном участке максимальная скорость на оси струи круглого сечения изменяется по гиперболической зависимости

$$u_{max} = \text{const}/r_{гр} \approx \text{const}/x. \qquad (12.4)$$

Формула вида (12.4) была впервые получена А. Я. Миловичем в 1918 г. Также получено

$$r_{гр}/r_0 = 3{,}28u_0/u_{max}. \qquad (12.5)$$

В начале основного участка, т. е. в переходном сечении, где исчезает ядро струи и $u_0 = u_{max}$, радиус границы

$$r_{гр.\ пер} = 3{,}28r_0. \qquad (12.6)$$

Для осесимметричной струи с учетом (12.1)

$$r_{гр} = 3{,}4ax. \qquad (12.7)$$

Из (12.5) с учетом (12.7) имеем

$$u_{max}/u_0 = 3{,}28r_0/3{,}4a/x = 0{,}96r_0/ax. \qquad (12.8)$$

Тогда расстояние от полюса струи до переходного сечения

$$x_{пер} = 0{,}96r_0/a, \qquad (12.9)$$

а от полюса до начального сечения

$$x_0 = 0{,}29r_0/a. \qquad (12.10)$$

Длина начального участка струи (от начального сечения до переходного)

$$l_{нач} = x_{пер} - x_0 = 0{,}67r_0/a. \qquad (12.11)$$

Если отсчитывать расстояния от начального сечения l (рис. 12.2), тогда из (12.9) и (12.8) получим

$$x = l + x_0 = l + 0{,}29r_0/a;$$

$$\frac{u_{max}}{u_0} = \frac{0{,}96r_0}{a\,(l + 0{,}29r_0/a)}$$

или

$$\frac{u_{max}}{u_0} = \frac{0{,}96}{al/r_0 + 0{,}29}. \qquad (12.12)$$

Таким образом, подтверждается уменьшение u_{max}/u_0 по гиперболической зависимости с увеличением расстояния вдоль оси OX на основном участке. Формула (12.12) получена Г. Н. Абрамовичем. Эту формулу применяют также в виде

$$\frac{u_{max}}{u_0} = \frac{0{,}48}{a + 0{,}145 d_0/l} \frac{d_0}{l}, \qquad (12.13)$$

где d_0 — диаметр выходного сечения струи ($d_0 = 2\,r_0$).

Длина начального участка по Г. Н. Абрамовичу при $a = 0{,}07 \div 0{,}08$ равна $l_{нач} = (4{,}8 \div 4{,}2)\,d_0$. Геометрические параметры струи сильно зависят от интенсивности турбулентности ε_0 в начальном сечении. Изменяя ε_0, можно изменять и эти параметры.

Диаметр осесимметричной струи в соответствии с (12.13) в любом сечении на расстоянии l от насадка при $a = 0{,}07$ равен

$$d = d_0 + 0{,}475 l. \qquad (12.14)$$

Уравнение изменения кинетической энергии струи $E_{кин}$ на основном участке по сравнению с $E_{кин\,0}$ (в начальном сечении) при $a = 0{,}07$ и $l > 4{,}8\,d_0$, данное Г. Н. Абрамовичем, имеет вид

$$\frac{E_{кин}}{\rho Q_0 v_0^2/2} = \frac{0{,}295}{0{,}07 l/d_0 + 0{,}145}. \qquad (12.15)$$

Для плоских струй получено

$$u_{max}/u_0 = \text{const}/\sqrt{b} \approx \text{const}/\sqrt{x}. \qquad (12.16)$$

Максимальная скорость на оси плоской струи уменьшается вдоль струи менее интенсивно:

$$\frac{u_{max}}{u_0} = \frac{1{,}2}{\sqrt{a x/b_0 + 0{,}41}}. \qquad (12.17)$$

Другие характерные параметры для плоских струй:

$$x_0 = 0{,}41 b_0/a; \quad l_{нач} = 1{,}03 b_0/a \approx 10 b_0 \text{ (при } a = 0{,}1).$$

В практических расчетах часто применяют формулы, аппроксимирующие распределение скоростей в струях. Для основного участка струи используется формула, полученная Шлихтингом для избыточной относительной скорости,

$$\frac{u - u_п}{u_{max} - u_п} = (1 - \eta^{1{,}5})^2, \qquad (12.18)$$

где u — скорость в точке на расстоянии z от оси струи; $u_п$ — скорость спутного или встречного потока (в котором распространяется струя);

$$\eta = z/b \text{ или } z/r_0.$$

При $u_п = 0$ имеем

$$u/u_{max} = (1 - \eta^{1{,}5})^2. \qquad (12.19)$$

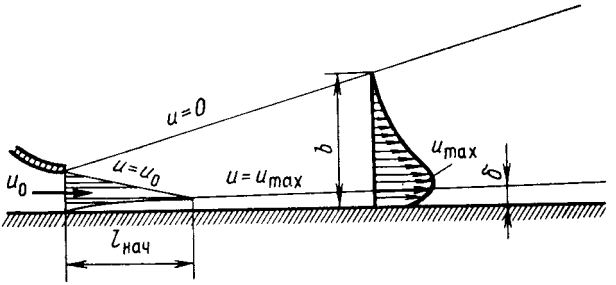


Рис. 12.4

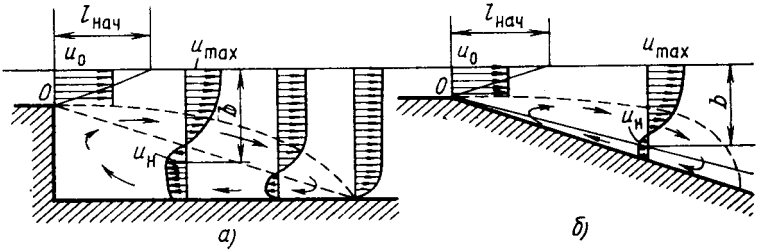


Рис. 12.5

Применяют и другие формулы, например профиль продольных составляющих скоростей выражают в виде полинома 3-й или 4-й степени.

Затопленные струи могут распространяться не только в неподвижной жидкости, но и в спутном или встречном потоке (например, струя, вытекающая в реку). Такие струи изучены меньше, чем свободные. Приближенно считают, что в спутном водном потоке вытекающая из насадка диаметром d_0 струя рассеивается на расстоянии $l = 300\ d_0$.

Для определения радиуса струи на расстоянии l от начального сечения Н. Н. Кременецкий предложил формулу

$$r = 0{,}208A\,(l + nr_0), \tag{12.20}$$

где

$$A = \left(1 + 2{,}55\sqrt{v/v_0}\right)^{-1};$$

$$n = 17{,}3 - 13{,}3u_{max\ oc}/v_0.$$

Здесь v — средняя скорость потока; v_0 — средняя скорость истечения из насадка; $u_{max\ oc}$ — скорость на оси в начальном сечении; r_0 — радиус струи в начальном сечении.

В гидротехнике часто встречаются случаи движения струй в более сложных условиях, чем разобранные выше, например пристенные струи (рис. 12.4).

Струи, вытекающие через насадок или трубу, с одной стороны ограничены твердой поверхностью, например дном. Струйный поток при этом характеризуется появлением придонного пограничного слоя, где скорость распределяется по логарифмическому закону. Толщина этого слоя обозначена на рис. 12.4 как δ. Остальные обозначения известны.

При увеличении глубины безнапорного потока, например, за счет уступа (рис. 12.5, *а*) или сопрягающего откоса (рис. 12.5, *б*) происходит движение струйного типа. Но здесь явление осложняется еще и образованием циркуляционной (водоворотной) зоны, в связи с чем появляются скорости, направленные противоположно основному потоку. Существуют и другие схемы, где движение имеет струйный характер.

12.3. Незатопленные струи

Рассмотрим струю воды, вытекающую через круглое отверстие в атмосферу. Техническое применение таких струй весьма разнообразно.

В незатопленных струях различаются три части: компактная, раздробленная и распыленная (рис. 12.6).

Компактная часть струи имеет цилиндрическую или близкую к ней форму, сплошность потока здесь сохраняется. В раздробленной части происходит расширение струи и ее разрушение на отдельные крупные части. В распыленной части струя состоит из отдельных капель.

При полете струи на нее действуют сила тяжести, сопротивление воздуха и силы внутри струи, связанные с турбулентностью и колебательно-волновым движением жидкости в струе. Совместное действие всех этих сил приводит струю к распаду. Капли, образовавшиеся после распада, находятся под действием еще и сил поверхностного натяжения.

Рассмотрим некоторые виды струй.

Гидромониторные струи, используемые для разработки грунтов, должны иметь компактную часть максимально возможной длины, так как эта часть струи обладает необходимой мощностью. Для этого конструкция выходной части гидромонитора имеет такую поверхность, которая уменьшает начальную интенсивность турбулентности на выходе и создает возможность большего подавления внутренних колебаний струи, которые могут уменьшить устойчивость движущейся струи.

По экспериментальным данным Н. П. Гавырина установлено, что участок компактной струи гидромонитора с мощностью, необходимой для разработки грунтов, заканчивается от выходного сечения гидромонитора на расстоянии

$$l \approx 0{,}415 \sqrt[3]{\theta H^2 d_0}, \qquad (12.21)$$

где d_0 — диаметр выходного отверстия, мм; H — напор перед выходным отверстием, м; θ — угол наклона оси ствола к горизонту, град.

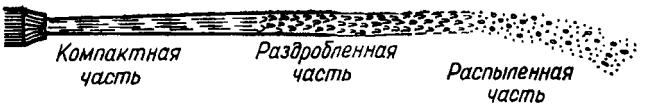


Рис. 12.6

Формула (12.21) справедлива для $d_0 \leqslant 0{,}05$ м, $H \leqslant 80$ м, $\theta = 5 \div 32°$.

Высота вертикальных струй $H_в$ (рис. 12.7, *а*) меньше, чем напор H на выходе из насадка. Это связано с сопротивлением окружающего воздуха движению струи. Высота компактной части струи $H_к < H_в$,

$$H_к = \beta H_в. \tag{12.22}$$

Согласно экспериментальным данным отношение $H_к/H_в = \beta$ уменьшается с увеличением $H_в$ (рис. 12.8).

Запишем потери напора удельной энергии, затрачиваемой на преодоление сопротивлений при движении струи в воздухе, условно в виде

$$\left.\begin{aligned} h_{тр} &= H - H_в; \\ h_{тр} &= k \frac{H_в}{d_0} \frac{v_0^2}{2g}, \end{aligned}\right\} \tag{12.23}$$

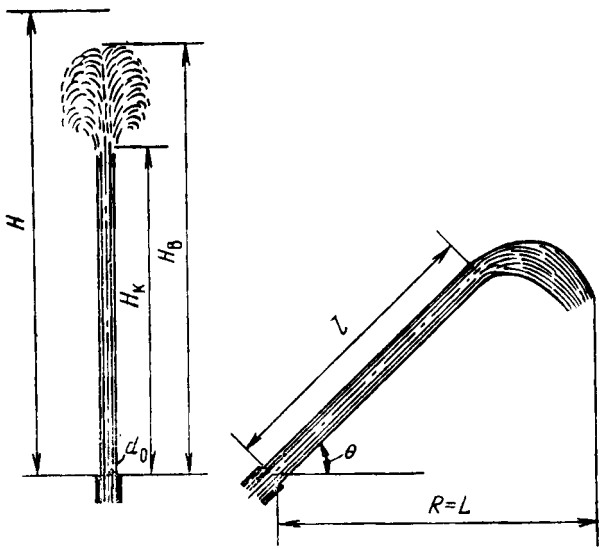


Рис. 12.7

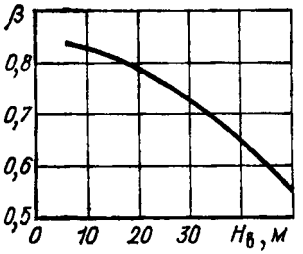


Рис. 12.8

где d_0 — диаметр выходного отверстия насадка; v_0 — скорость в выходном сечении насадка; k — коэффициент.

Так как для насадка (см. гл. 10) $v_0 = \varphi\sqrt{2gH}$ (φ—коэффициент скорости), то

$$\left.\begin{aligned} h_{тр} &= H - H_в = k\frac{H_в}{d_0}\varphi^2 H; \\ H_в &= \frac{H}{1+\frac{k\varphi^2}{d_0}H} = \frac{H}{1+\psi H}, \end{aligned}\right\} \quad (12.24)$$

где $k\varphi^2/d_0$ обозначено через ψ.

Коэффициент ψ (при $\varphi \approx 1$) определяется по эмпирической формуле

$$\psi = \frac{0{,}00025}{d_0 + (10d_0)^3},$$

где d_0 — в метрах.

График зависимости ψ от d_0 представлен на рис. 12.9.

Наклонные струи (см. рис. 12.7, *б*) при уменьшении угла наклона струи на выходе из насадка к горизонту θ_0 описывают кривую $a'b'c'$, дальше которой от выходного сечения ($l = 0$) не попадают даже отдельные капли (рис. 12.10). При отсутствии специальных устройств для дробления струи или распылителей область, поливаемая компактной струей A, ограничена кривой abc. Между линиями abc и $a'b'c'$ расположена область B, поливаемая раздробленной и распыленной частями струи.

По экспериментальным данным в ориентировочных расчетах принимается, что расстояние $R_к$ от насадка до геометрического места конца компактной части струи (до линии abc на рис. 12.10) равно высоте компактной части вертикальной струи:

$$R_к = H_к. \quad (12.25)$$

Расстояние от насадка до внешней границы распыленной части наклонной струи (до линии $a'b'c'$ на рис. 12.10)

$$R_р = kH_в, \quad (12.26)$$

где $k = k_0(\theta)$ (рис. 12.11), а θ — угол наклона к горизонту линии, соединяющей насадок и данную точку на граничной кривой $a'c'$.

Дождевальные струи. Можно выделить дождевальные струи, получающиеся при применении среднеструйных аппаратов, и пленки (плоские струи малой толщины), образующиеся при использовании короткоструйных насадков. Пленка при выходе через насадки различных конструкций вблизи аппарата распадается на капли, причем чем мельче капли, тем ближе к насадку

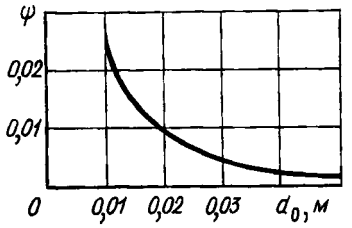


Рис. 12.9

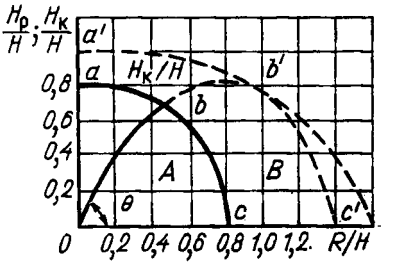


Рис. 12.10

они выпадают. На участке движения воды в виде пленки особенно значительна роль поверхностного натяжения.

Короткоструйные насадки (дефлекторные, щелевые, центробежные) обычно имеют давление на входе от 0,05 до 0,2 МПа (что соответствует напору 5—20 м). Дождевальные аппараты, из ствола которых вылетает струя, вначале имеющая компактную часть, а затем раздробленную и распыленную части, работают при давлениях от 0,1 до 0,8 МПа.

При отсутствии сопротивления воздуха координаты траектории струи (рис. 12.12)

$$x = v_0 \cos \theta_0 t; \quad z = v_0 \sin \theta_0 t - gt^2/2.$$

В этих соотношениях $v_0 = \sqrt{2gH}$ — скорость струи на выходе из насадка; t — время; θ_0 — угол вылета.

Уравнение траектории струи

$$z = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x^2}{4H \cos^2 \theta_0}. \qquad (12.27)$$

При движении струи в воздухе происходят потери на преодоление сопротивления воздуха движению струи $h_{тр}$. Если принять длину траектории $l \approx x/\cos \theta_0$, а $h_{тр} = \lambda \frac{l}{d_0} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d_0} H$, то подстановка в (12.27) вместо H разности $(H - h_{тр})$ и последующие преобразования приведут к уравнению траектории струи с учетом сопротивления воздуха

$$z = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x^2}{4H\left(1 - \frac{\lambda x}{d_0 \cos \theta_0}\right) \cos^2 \theta_0}, \qquad (12.28)$$

где λ — коэффициент сопротивления при движении струи в воздухе, может быть найден только по эмпирическим зависимостям. Одна из них имеет вид (В. М. Марквартде)

$$\lambda = 0{,}25\left(1 - e^{-\frac{H}{1600 d_0}}\right),$$

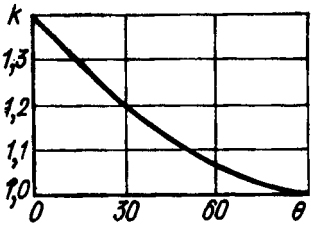


Рис. 12.11

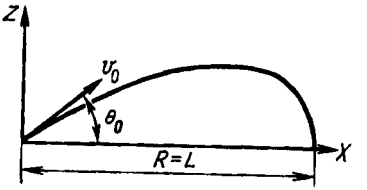


Рис. 12.12

где H — напор, м; d_0 — диаметр выходного сечения насадка, м.

Дальность полета L или радиус действия струи R (горизонтальная проекция траектории)

$$L = R = \frac{2H \sin 2\theta_0}{1 + 4\lambda \frac{H}{d_0} \sin \theta_0}. \qquad (12.29)$$

При $\lambda = 0$ получим $R_1 = 2H \sin 2\theta_0$.

Из (12.29) после дифференцирования по θ_0 и приравнивания первой производной нулю получим уравнение для вычисления углов θ_0, обеспечивающих максимальную дальность полета струи:

$$4\lambda \frac{H}{d_0} \sin^3 \theta_0 + 2 \sin^2 \theta_0 - 1 = 0.$$

Если задаваться различными значениями $4\lambda H/d_0$, различные значения угла вылета θ_0 будут обращать уравнения в тождество. Это и будут углы θ_0, при которых для данного отношения H/d_0 дальность полета струи будет максимальной. Для отношения, $H/d_0 = 2500 \div 3000$, характерного для большинства дождевальных аппаратов, $\theta_0 = 32°$.

Дальность полета струи отсчитывается по горизонтали и при $H/d_0 \geqslant 1000$ определяется по формуле Ф. И. Пикалова

$$L = 0{,}42H + 1000d_0, \qquad (12.30)$$

при $H/d_0 > 800$ — по формуле Б. М. Лебедева

$$L = \frac{H}{0{,}5 + 0{,}00025H/d_0}, \qquad (12.31)$$

где H и d_0 — в метрах.

Зависимости относительных длин, найденных по (12.30) и (12.31), от отношения H/d_0 показаны на рис. 12.13. Эти формулы дают близкие результаты.

Необходимая для орошения частота вращения ствола дождевального аппарата 0,1—1 об/мин приводит к уменьшению дальности полета струи на 5—15 %.

На радиус действия (дальность полета) струи оказывает влияние также ветер. Если в безветренную погоду орошаемая площадь

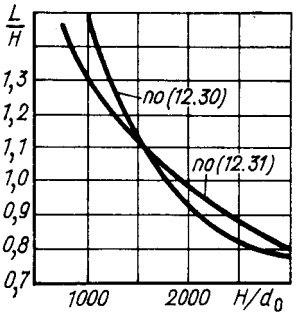


Рис. 12.13

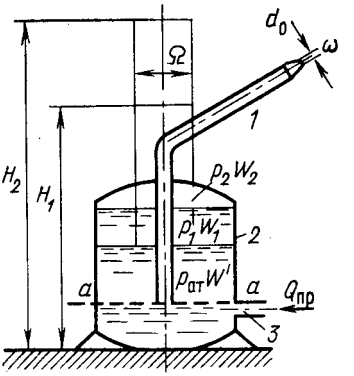


Рис. 12.14

представляет круг, при ветре, если не изменять угол наклона ствола, она превращается в вытянутый по направлению ветра эллипс. Поэтому рекомендуется при поливе навстречу ветру уменьшать угол наклона ствола до некоторого значения θ_{min}, а при направлении струи, совпадающем с направлением ветра, увеличивать угол наклона до θ_{max}. Например, при скорости ветра 8 м/с $\theta_{max} = 37°$, $\theta_{min} = 15°$.

В зависимости от H/d_0 при дождевании получаются различными размер капель и интенсивность дождя (слой, выпавший в единицу времени). Так, при $H/d_0 = 1500$ получают капли воды средним диаметром $d_{ср.\,кап} \approx 1{,}75$ мм; при $H/d_0 \geqslant 3500$ получают $d_{ср.\,кап} \lesssim 1$ мм. Средний диаметр капель рекомендуется не более 1—2 мм.

Импульсные дождевальные струи. Для некоторых видов растений целесообразно подавать воду с помощью дождевальных аппаратов импульсного действия или «дождевальных пушек». При этом дождевальная струя «выстреливается» через определенные промежутки времени. Гидравлические расчеты импульсных дождевальных аппаратов в основном разработаны И. И. Агроскиным.

Упрощенная схема дождевального аппарата показана на рис. 12.14. Дождевальный аппарат со стволом *1* установлен на водовоздушном резервуаре (баке) *2*. Объем воздуха в баке W_1, давление воздуха p_1. Принцип действия этого аппарата состоит в следующем. При закрытом стволе (имеется специальный механизм для перекрытия выходного отверстия — затвор игольчатого типа) в резервуар по трубе *3* поступает вода с расходом $Q_{пр}$. Воздух в резервуаре сжимается, его давление постепенно повышается до значения p_2 (объем воздуха в этот момент равен W_2), при котором затвор, перекрывающий выходное отверстие, автоматически открывается, при этом некоторый объем воды $W_в$ выбрасывается в атмо-

сферу. Воздух в аппарате расширяется. Его давление падает до значения p_1, затвор аппарата закрывается. Затем цикл повторяется.

Если процесс сжатия воздуха условно принять изотермическим, тогда $pW = \text{const}$ и далее получаем

$$p_{ат}W' = p_1W_1 = p_2W_2,$$

где $p_{ат}$ — атмосферное давление; W' — объем полезно используемой части в резервуаре (объем выше a—a). Для расчета объема выбрасываемой воды $W_в$ используют формулу

$$W_в = W' p_{ат} \frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}.$$

Время, за которое происходит подача (выброс) объема воды $W_в$ при переменном напоре, изменяющемся от $H_2 = p_2/\rho g$ до $H_1 = p_1/\rho g$, определяется по формуле

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1} + \sqrt{H_{пр}}\ln\frac{\sqrt{H_{пр}} - \sqrt{H_2}}{\sqrt{H} - \sqrt{H_1}}\right), \tag{12.32}$$

где $H_{пр} = Q^2_{пр}/\mu^2\omega^2 2g$ (см. § 11.2), $\Omega = (W_1 - W_2)/(H_2 - H_1)$;

μ — коэффициент расхода; ω — площадь выходного отверстия.

Используя в импульсных установках стволы с бо́льшим диаметром на выходе, чем в обычных аппаратах, при тех же напорах можно получить бо́льшую дальность полета струи (так как L обратно пропорциональна H/d_0).

Не останавливаясь на конструктивных особенностях, отметим, что давления p_1 и p_2, диаметр d_0 назначают исходя из необходимых значений H/d_0, от которых зависят дальность полета струи и качество дождевания (размер капель, интенсивность).

Применение полимерных и других добавок (см. § 8.14) в водяных струях в настоящее время получило широкое распространение. Добавки повышают компактность, дальнобойность и силу удара пожарных струй, что особенно важно. Применение полимерных добавок малой концентрации для среднеструйных дождевальных аппаратов (Б. А. Васильев, В. К. Груколенко) показало, что при подаче добавки в подводящий к аппарату трубопровод потери напора в нем заметно уменьшаются, вследствие чего напор перед аппаратом возрастает. Дальность полета струи при определенных условиях возрастает приблизительно на 20 %.

12.4. Динамические свойства струи

Струя оказывает динамическое воздействие на преграду, находящуюся на ее пути. Это воздействие особенно велико, если преграда расположена на участке компактной струи.

Рассмотрим воздействие компактной части струи на неподвижную твердую преграду. Пусть на криволинейную преграду набегает

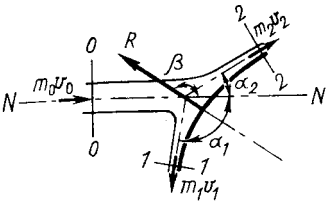


Рис. 12.15

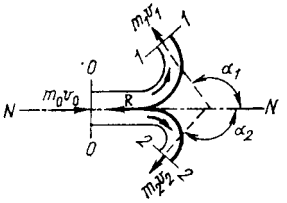


Рис. 12.17

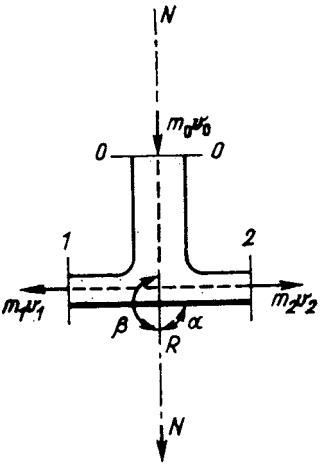


Рис. 12.16

плоская струя (рис. 12.15) шириной b, имеющая скорость v_0. На преграде струя делится на две струи, которые покидают преграду со скоростями v_1 и v_2, образующими углы α_1 и α_2 с направлением скорости струи v_0 (ось NN).

Применим теорему об изменении количества движения для массы жидкости в отсеке 0—0, *1—1* и *2—2*, при этом считаем коэффициент количества движения $\alpha' = 1$, а также пренебрегаем влиянием трения и пульсационных скоростей:

$$R\cos\beta = m_1v_1\cos\alpha_1 + m_2v_2\cos\alpha_2 - m_0v_0, \qquad (12.33)$$

где R — сила воздействия преграды на струю, направленная под углом β к оси струи.

В самом простом случае при ударе о плоскую поверхность [$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 0$; $\cos\beta = -1$ (рис. 12.16)]:

$$R = m_0v_0 = \rho\omega_0v_0^2, \qquad (12.34)$$

где ω_0 — живое сечение струи в сечении 0—0.

Сила воздействия струи на преграду P равна R по значению и противоположна по направлению.

В связи с искривлением линий тока при растекании фактическое значение

$$P = (0{,}92 \div 0{,}95)\,\rho\omega_0v_0^2. \qquad (12.35)$$

Если плоская преграда (стенка) перемещается со скоростью u, совпадающей с направлением скорости струи, сила P определится как

$$P = \rho\omega_0v_0(v_0 - u). \qquad (12.36)$$

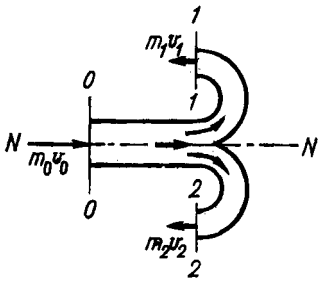


Рис. 12.18

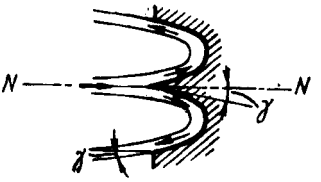


Рис. 12.19

Если преграда движется навстречу струе со скоростью u, тогда

$$P = \rho\omega_0 v_0 (v_0 + u). \qquad (12.37)$$

При этом надо иметь в виду уменьшение фактических значений P согласно (12.35).

Изменение углов α_1 и α_2 может привести к изменению силы P.

Для криволинейных поверхностей, показанных на рис. 12.17, углы $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > \pi/2$.

При $m_1v_1 = m_2v_2 = 0{,}5\ m_0v_0$ для этих поверхностей

$$P = m_0v_0 - 2m_1v_1 \cos\alpha = m_0v_0 (1 - \cos\alpha). \qquad (12.38)$$

Если угол $\alpha = \pi$ (рис. 12.18), тогда $\cos\alpha = -1$. Следовательно,

$$P = m_0v_0 + 2m_1v_1 = 2m_0v_0 = 2\rho\omega_0 v_0^2, \qquad (12.39)$$

т. е. сила воздействия струи на криволинейную поверхность возрастет в 2 раза по сравнению с силой P в случае плоской стенки. Это используется при создании рабочих колес ковшовых турбин. На ободе колеса такой турбины расположены лопасти, выполненные в виде ковшей. Бьющая струя воды развивает на ковшах усилия, создающие момент, вращающий колесо турбины вместе с валом, на котором оно закреплено.

В реальных турбинах угол α немного меньше, чем π. В результате на выходе кромки составляют некоторый малый угол γ, равный $(\pi - \alpha)$, с направлением, параллельным оси NN (рис. 12.19). Соответственно для турбин с углами $\alpha = \pi - \gamma$ сила будет несколько меньше, чем по (12.39):

$$P = m_0v_0 [1 - \cos(\pi - \gamma)].$$

Значение в скобках близко к 2.

Таким образом, сила воздействия струи на изогнутые лопатки рабочего колеса турбины (если рассматривать все колесо в целом, т. е. систему лопаток, которые последовательно попадают под удары струи) приблизительно вдвое больше, чем на плоские.

12.5. Контрольные вопросы и примеры

1. Какие бывают струи? Перечислите признаки их классификаций.
2. Что такое полюс струи, начальное сечение, начальный участок, переходное сечение, основной участок, ядро струи?
3. Каково свойство эпюр безразмерных скоростей в основном участке струи?
4. Как изменяется максимальная скорость осесимметричной струи на основном участке? Какова зависимость уменьшения максимальной скорости на оси по длине для плоской струи?
5. Опишите случаи струйных течений в пределах гидротехнических сооружений.
6. На какие части условно делят незатопленные струи?
7. Какие особенности имеют дождевальные струи? Как влияет сопротивление воздуха на дальность полета струи?
8. Запишите зависимости для определения силы воздействия струи на различные твердые преграды.

Примеры

Пример 12.1. Определить силу удара P о вертикально поставленную неподвижную пластинку струи, вытекающей под напором $H = 20$ м из вертикального отверстия диаметром $d = 0{,}05$ м в тонкой стенке.

Решение. Струю при известных напоре и диаметре отверстия можно принять за горизонтальную (рис. 12.20). Тогда по формуле (12.34) определяем

$$P = \rho\omega_0 v_0^2 = 1000 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}05^2 \cdot 19{,}21^2 = 463{,}5 \text{ Н},$$

где $\omega_0 = \omega_c = \varepsilon\omega = 0{,}64 \cdot 0{,}785 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}001256$ м², $v_0 = \varphi\sqrt{2gH} = 0{,}97 \times \times \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 20} = 19{,}21$ м/с.

Действительное значение силы удара будет по (12.35) равно

$$P_{\text{дейст}} = (0{,}92 \div 0{,}96)\, P = 0{,}94 \cdot 463{,}5 = 435{,}7 \text{ Н}.$$

Пример 12.2. Определить по данным примера 12.1 силу давления на пластинку, изогнутую по дуге окружности с углом $\theta = 135°$ (рис. 12.21).

Решение. Воспользовавшись формулой (12.33) и приняв $v_2 = 0$ и $m_0 v_0 = m_1 v_1$, получим $m_1 v_1 \cos\theta - m_0 v_0 = R\cos\beta$.

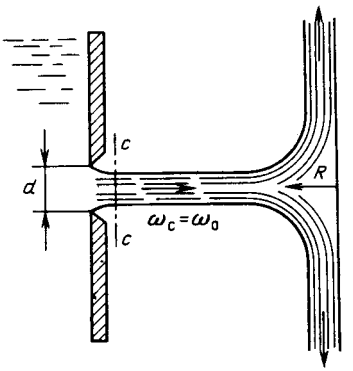


Рис. 12.20

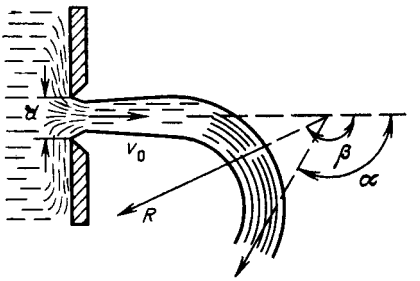


Рис. 12.21

Для решения составим уравнение приращения количества движения в проекциях на направление, перпендикулярное v_0. Получим $m_1 v_1 \sin\theta = R \sin\beta$.

Учитывая, что $m_0 v_0 = m_1 v_1$, находим

$$R = \sqrt{R^2 \sin^2\beta + R^2 \cos^2\beta} = m_0 v_0 \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta}$$

или

$$R = 2m_0 v_0 \sin(\theta/2) = 2\rho\omega v_0^2 \sin(\theta/2).$$

По данным примера 12.1 $\rho\omega v_0 = 463{,}5$ кН. Тогда $R = 463{,}5 \cdot 2 \sin(\theta/2) = 463{,}5 \cdot 1{,}848 = 856{,}5$ кН. В данном случае сила удара о пластинку в 1,96 раза больше, чем в примере 12.1.

Глава 13

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ НАПОРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

13.1. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

Простой трубопровод — трубопровод, не имеющий ответвлений и состоящий из труб одинакового диаметра, выполненных из одного материала. Движение жидкости в трубопроводе обусловлено напором, равным разности H напоров в резервуарах-питателе и приемнике (рис. 13.1) или разности напоров в резервуаре-питателе и в струе на выходе из трубы (рис. 13.2), если резервуар-приемник отсутствует. Если указанная разность напоров не будет изменяться во времени, движение установившееся.

На различных участках трубопровода движение жидкости может быть равномерным и неравномерным (участки вблизи конструктивных элементов, обусловливающих появление местных сопротивлений, и участки стабилизации). На каждом из участков происходит потеря части напора.

По соотношению напоров, потерянных (затраченных на преодоление сопротивлений движению жидкости) на участках равномерного и неравномерного движения, простые трубопроводы делятся на длинные и короткие.

В гидравлически длинном (или просто длинном) трубопроводе потери напора по длине настолько превышают местные потери и скоростной напор, что сумму $\Sigma h_м + \alpha v^2/2g$ не вычисляют, а принимают как некоторую часть потерь по длине $h_{дл}$.

При расчетах длинных трубопроводов находят потери напора по длине $h_{дл}$, а затем суммарные местные потери напора учитывают, увеличивая найденные значения $h_{дл}$ на 5—10 %.

В коротком трубопроводе потери напора по длине и местные потери сопоставимы по значению. При гидравлическом

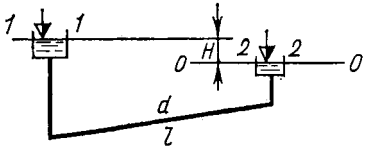


Рис. 13.1

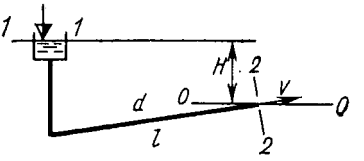


Рис. 13.2

расчете коротких трубопроводов учитываются как местные потери напора, так и потери напора по длине, а в балансе напоров учитываются скоростные напоры в сечениях потока.

По определяемым параметрам и методике расчета простых трубопроводов задачи делятся на три группы:

1) определение расхода Q при заданном напоре H, известной длине трубы l и шероховатости стенок трубы, а также плотности ρ и вязкости жидкости ν;

2) определение напора H при заданном расходе Q и при известных длине, диаметре и шероховатости трубы, а также плотности и вязкости жидкости;

3) определение необходимого диаметра d трубы при заданных расходе Q и напоре H и известных длине и шероховатости трубы, а также плотности и вязкости жидкости.

Каждая задача решается с помощью уравнения Бернулли и уравнения неразрывности.

13.2. РАСЧЕТ ДЛИННОГО ТРУБОПРОВОДА ПОСТОЯННОГО ДИАМЕТРА

Для решения любой из поставленных выше задач составляется уравнение Бернулли для сечений *1—1* и *2—2* (рис. 13.1 и 13.2). Пренебрегая местными потерями и скоростными напорами, получаем

$$H = h_{дл}.$$

Выразим потери напора через гидравлический уклон $h_{дл} = Jl$, откуда

$$J = H/l. \tag{13.1}$$

Подставив (13.1) в формулу Шези $v = C\sqrt{RJ}$, получим

$$v = C\sqrt{RH/l}. \tag{13.2}$$

Решая уравнение относительно H, имеем

$$H = v^2 l/(C^2 R). \tag{13.3}$$

Расход жидкости при равномерном движении равен

$$Q = \omega C\sqrt{RJ}. \tag{13.4}$$

Объединив параметры, зависящие от размеров (диаметра) трубы, представим их в виде так называемой расходной характеристики (модуля расхода)

$$K = \omega C \sqrt{R}. \tag{13.5}$$

Расходная характеристика K представляет собой расход в данной трубе при гидравлическом уклоне, равном единице. Получим

$$Q = K\sqrt{J}; \tag{13.6}$$

$$H = Q^2 l / K^2. \tag{13.7}$$

Напомним, что при равномерном движении гидравлический и пьезометрический уклоны равны.

Пренебрегая скоростным напором, получим, что линия удельной энергии (напорная линия) и пьезометрическая линия совпадают

Ясно, что расход Q и расходная характеристика K должны быть выражены в одних и тех же единицах.

Для вычисления напора запишем следующую формулу:

$$H = AlQ^2, \tag{13.8}$$

где

$$A = 1/K^2 = 1/\omega^2 C^2 R \tag{13.9}$$

— удельное сопротивление трубопровода.

Удельное сопротивление трубопровода численно равно напору, затрачиваемому на единице длины трубопровода при расходе, равном единице. Раскрывая значение A в (13.9), с учетом того, что $C = \sqrt{8g/\lambda}$, получим

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5} = 0{,}0827\lambda/d^5$$

при $g = 9{,}81$ м/с^2.

По выведенным формулам решаются основные задачи при расчетах простого трубопровода.

Неновые стальные и чугунные трубы, т. е. бывшие в эксплуатации при нормальных условиях («нормальные» трубы), имеют повышенную шероховатость стенок, оцениваемую в среднем высотой выступа условной разнозернистой («эквивалентной») шероховатости $\Delta \approx 1{,}0 \div 1{,}6$ мм.

Новые чугунные трубы характеризуются средним значением $\Delta \approx 0{,}5$ мм; новые стальные трубы имеют средние значения $\Delta \approx$ $\approx 0{,}45$ мм. При защитных покрытиях внутренней поверхности новых труб (битумизация, покрытие лаками и т. п.) шероховатость оценивается другими значениями.

Таблица 13.1

Вид труб	Скорость $v_{кв}$, м/с, при диаметре труб, мм								
	50	100	200	300	400	500	600	1000	1400
Новые стальные	2,8	3,2	3,5	3,7	3,8	3,9	4	4,2	4,4
Новые чугунные	2,5	2,8	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4
«Нормальные» (бывшие в эксплуатации)	0,8	0,9	1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3

Для воды (с температурой 10 °С) с использованием значения $Re_{кв}$ по (8.46) и указанных значений Δ найдены значения $v_{кв}$, при превышении которых наступает квадратичная область (табл. 13.1); для «нормальных» труб здесь принята $\Delta = 1{,}35$ мм.

При турбулентном режиме движения отношение коэффициента Шези $C_{кв}$ в квадратичной области к коэффициенту Шези C в переходной области, обозначенное $\theta_1 = C/C_{кв}$, согласно исследованиям Ф. А. Шевелева для каждого вида труб зависит только от средней скорости (при условии, если принять кинематическую вязкость жидкости $\nu = \text{const}$).

Исходя из того, что

$$C/C_{кв} = \sqrt{\lambda_{кв}/\lambda},$$

имеем

$$\lambda/\lambda_{кв} = 1/\theta_1^2.$$

Коэффициент $\theta_2 = 1/\theta_1^2$.

Значения коэффициентов θ_1 и θ_2 для новых стальных и чугунных труб, а также для «нормальных» труб приведены в табл. П.13.1.

Так как $K = \omega C\sqrt{R}$, а $K_{кв} = \omega C_{кв}\sqrt{R}$, то

$$K = \theta_1 K_{кв},$$

где $K_{кв}$ — расходная характеристика в квадратичной области сопротивления; K — расходная характеристика в любой, в том числе и в переходной области.

Отсюда расход жидкости определится по формуле

$$Q = \theta_1 K_{кв}\sqrt{J}. \qquad (13.10)$$

Из (13.7) с учетом (13.10) получим

$$H = \theta_2 Q^2 l/K_{кв}^2. \qquad (13.11)$$

При расчете трубопроводов достаточно большой протяженности часто формулу (13.11) применяют в виде

$$H = \theta_2 Q^2 L \cdot 1000/K_{кв}^2, \qquad (13.12)$$

где L — длина трубопровода, км. Следует помнить, что при расчетах для Q и $K_{кв}$ необходимо применять одинаковые единицы измерения физических величин.

Значения $K_{кв}$, $1000/K_{кв}^2$ и $K_{кв}^2/1000$, необходимые для расчета, приведены в табл. П.13.2.

Расходные характеристики $K_{кв}$ подсчитаны И. И. Агроскиным с учетом предложенной им формулы (8.50) для коэффициента Шези.

В квадратичной области сопротивления $\theta_1 = \theta_2 = 1$. В переходной области сопротивления $\theta < 1$, а $\theta_2 > 1$.

В соответствии с (13.10) получаем, что при движении жидкости в переходной области сопротивления при неизменных $K_{кв}$ и J расход Q будет меньше, чем в квадратичной области сопротивления.

При расчете трубопроводов часто используют формулы (13.8) или (13.9), при этом удельное сопротивление A определяют по формулам, предложенным Ф. А. Шевелевым. Рассмотрим эту методику на примере асбестоцементных, пластмассовых и железобетонных труб. Для асбестоцементных труб Ф. А. Шевелевым предложена формула

$$A = \frac{0{,}00091}{d_р^{5{,}19}}\left(1 + \frac{3{,}51}{v}\right)^{0{,}19}, \qquad (13.9а)$$

где $d_р$ — расчетный внутренний диаметр трубы. При $v = 1$ м/с эта формула примет вид

$$A' = 0{,}001212/d_р^{5{,}19}.$$

Значения A' при $v = 1$ м/с для асбестоцементных труб (класс ВТ9, тип 1 — наиболее распространенные) приведены в табл. П.13.3. При известном стандартном внутреннем диаметре труб класса ВТ6, ВТ12 и ВТ15 (см. табл. П.13.4) значения A можно найти непосредственно по (13.9а). Для асбестоцементных труб других классов и типов значения A определяют по значениям A', приведенным в табл. П.13.3, с учетом поправочного коэффициента k_1 (табл. П.13.5). В этом случае коэффициент $k_1 = 1$.

При $v \neq 1$ м/с удельное сопротивление A вычисляется по формуле

$$A = A'k_2,$$

где

$$k_2 = 0{,}751\left(1 + \frac{3{,}51}{v}\right)^{0{,}19}.$$

Значения k_2 приведены в табл. П.13.6.

Для пластмассовых труб (из полиэтилена и винипласта) удельное сопротивление находится по формуле

$$A = \frac{0{,}00111}{v^{0{,}226}d_р^{5{,}226}},$$

которая при $v = 1$ м/с приобретает вид

$$A' = 0{,}00111/d_р^{5{,}226}.$$

В табл. П.13.7 приводятся значения A' для пластмассовых труб.

При $v \neq 1$ м/с удельное сопротивление для пластмассовых труб вычисляется по формуле

$$A = A' k_3,$$

где

$$k_3 = 1/v^{0,226}.$$

Значения k_3 даны в табл. П.13.8.

Для железобетонных труб (виброгидропрессованных) значения удельных сопротивлений A определяются по формуле (В. С. Дикаревский)

$$A = \frac{0,001751}{v^{0,15}/d_{\text{п}}^{5,19}}.$$

При $v = 1$ м/с эта формула принимает вид

$$A' = 0,001751/d_{\text{р}}^{5,19}.$$

Значения A' для железобетонных труб приведены в табл. П.13.9.

При $v \neq 1$ м/с значение A для железобетонных труб вычисляется по формуле

$$A = A' k_4,$$

где

$$k_4 = 1/v^{0,15}.$$

Рассмотрим зависимость потерь напора в квадратичной области от диаметра трубопровода. Так как расходная характеристика

$$K_{\text{кв}} = \omega C_{\text{кв}} \sqrt{R} = \frac{\pi}{4} d^2 C_{\text{кв}} \frac{d^{0,5}}{2} = 0,392 C_{\text{кв}} d^{2,5},$$

то, приняв $C_{\text{кв}} = \frac{1}{n} R^y$, получим из (13.11) при $\theta_2 = 1$ $H = f = (d^{-(5+2y)})$. При $y = \frac{1}{6} = 0,167$ [см. (8.48)] потери напора обратно пропорциональны $d^{5,33}$.

Это обязательно следует учитывать при проектировании трубопроводов. При неизменных остальных значениях в квадратичной области уменьшение диаметра в 1,5 раза приведет к увеличению потерь примерно в 8,7 раза, а уменьшение диаметра труб в 2 раза вызовет увеличение потерь напора уже примерно в 40 раз.

13.3. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДА ИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ТРУБ

Рассмотрим систему из последовательно соединенных длинных труб различных диаметров и длин. В общем случае материал труб может быть различным. Система соединяет два резервуара (рис. 13.3).

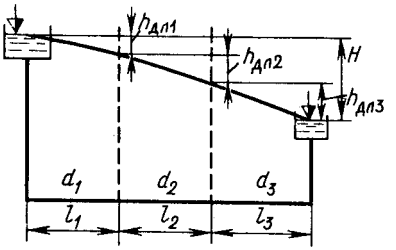


Рис. 13.3

Заданы расход Q, диаметры труб и длины участков. Расходные характеристики труб берутся из табл. П.13.2.

По трубопроводу, составленному из последовательно соединенных труб, проходит не изменяющийся по длине транзитный расход Q. На каждом i-м участке рассматриваемого трубопровода для пропуска расхода Q затрачивается часть суммарного напора H, равная

$$H_i = Q^2 l_i / K_i^2 = h_{дл\,i},$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ — номер участка трубопровода.

Поскольку местными потерями пренебрегаем, напор H затрачивается на преодоление потерь напора по длине и равен сумме потерь напора на отдельных участках:

$$H = H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \sum_{i=1}^{i=n} H_i.$$

Учитывая (13.11), получаем при постоянном расходе Q

$$H = Q^2 \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{2i} l_i / K_{кв\,i}^2 \qquad (13.13)$$

или

$$H = Q^2 \sum_{i=1}^{i=n} A_i l_i,$$

где A_i — удельное сопротивление i-го участка с учетом области сопротивления.

13.4. РАСЧЕТ ПАРАЛЛЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ТРУБ

При параллельном соединении длинных трубопроводов между точками M и N проходит несколько труб (рис. 13.4).

Заданы расход Q, длины, диаметры, материал трубы и расходные характеристики труб.

Разность пьезометрических напоров в начале и в конце труб составляет напор H, полностью затрачиваемый на преодоление сопротивлений. На каждом участке трубы движение происходит под действием одного и того же напора. Но в связи с различными длинами участков гидравлические уклоны на каждом участке будут разными

$$J_i = H / l_i,$$

где i — номер участка трубы.

Расход, проходящий по любому участку, равен

$$Q_i = K_i\sqrt{H/l_i} \qquad (13.14)$$

или

$$Q_i = \frac{1}{\sqrt{A_i}}\sqrt{H/l_i}\,. \qquad (13.15)$$

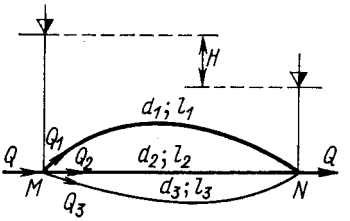


Рис. 13.4

Для всех n участков имеем n уравнений для Q в форме (13.14) или (13.15).

Сумма расходов на отдельных участках должна быть равна общему расходу, поступающему в систему параллельно соединенных трубопроводов в точке M и выходящему из системы в точке N:

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = \sum_{i=1}^{i=n} Q_i. \qquad (13.16)$$

Таким образом, имеем $n + 1$ уравнение: n уравнений вида (13.14) и уравнение (13.16).

В результате можем определить необходимый напор H и расход в каждой из параллельно соединенных линий.

Из (13.14) и (13.16) найдем

$$Q = \sqrt{H}\sum_{i=1}^{i=n} K_i/\sqrt{l_i} \qquad (13.17)$$

или

$$H = Q^2\Big/\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{K_i}{\sqrt{l_i}}\right)^2. \qquad (13.18)$$

Распределение расходов между отдельными участками заранее не известно. Поэтому все расходы на участках (пока не известные) выражают через какой-либо один, например через Q_1. Тогда, применяя (13.14), получаем

$$\frac{Q_i}{Q_1} = \frac{K_i}{K_1}\sqrt{\frac{l_1}{l_i}} \qquad (13.19)$$

или

$$Q_i = Q_1\frac{K_i}{K_1}\sqrt{\frac{l_1}{l_i}}\,. \qquad (13.20)$$

Подставив (13.20) в (13.16), найдем расход Q_1, а затем и остальные расходы.

При расчетах сначала предполагают, что область сопротивления на всех участках квадратичная, т. е. $\theta_1 = \theta_2 = 1$, а $K = K_{\text{кв}}$. С учетом этого предположения находят H и все Q_i, затем находят

средние скорости v_i на каждом участке и уточняют область сопротивления, сравнивая v_i с $v_{i\,кв}$. Если необходимо, следует ввести поправки и вновь определить напор H и расход Q в линиях.

13.5. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДА С НЕПРЕРЫВНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ РАСХОДА ПО ДЛИНЕ

Часто встречаются случаи, когда по длине трубопровода происходит раздача некоторой части расхода или всего расхода, причем отбор жидкости (воды) потребителями происходит в нескольких сечениях по длине трубопровода.

К таким трубопроводам относятся городские и сельские водопроводы, поливные трубопроводы, подающие воду в каждую борозду через отверстия, трубопроводы для систем внутрипочвенного и капельного орошения. Собирающие трубопроводы (дренажные коллекторы) работают в условиях увеличения расхода по длине.

Наиболее простая схема, применяемая при расчете таких трубопроводов,— непрерывное изменение раздаваемого или поступающего расхода $Q_р$ по длине. При такой схеме на каждой единице длины расход в трубопроводе изменяется (уменьшается или растет) в среднем на $Q_р/l$.

Рассмотрим трубопровод с непрерывным уменьшением расхода по пути, т. е. трубопровод с непрерывной раздачей расхода $Q_р$. Помимо расхода $Q_р$, линейно изменяющегося от $Q_р$ в начале трубопровода до нуля в конце трубопровода, в общем случае по такому трубопроводу может проходить без изменения еще транзитный расход $Q_т$. Тогда в начале трубопровода (рис. 13.5) расход равен $Q_т + Q_р$, а в конце $Q_т$.

Для точного определения потерь напора в трубопроводе необходимо решить дифференциальные уравнения движения жидкости с переменным расходом.

Отметим, что в связи с переменностью расхода по длине изменяется и средняя скорость (вплоть до $v = 0$ в конце трубопровода при $Q_т = 0$), а следовательно, и коэффициент Дарси λ, и расходная характеристика

$$K = \omega C \sqrt{R} = \omega \sqrt{8gR/\lambda}.$$

Но эти вопросы здесь не рассматриваются.

Определим потери напора в трубопроводе с непрерывной раздачей расхода при некоторых упрощающих допущениях.

Выделим на произвольном расстоянии x от начала участка сечение M, расход в котором Q_M меньше расхода в начальном сечении на расход, уже распределенный по длине x, т. е. на участке NM:

$$Q_M = Q_т + Q_р - \frac{Q_р}{l} x.$$

Условно считаем, что в данном случае в любом i-м сечении можно применить вытекающее из формулы Шези выражение для гидравлического уклона при равномерном движении

$$J = Q_i^2/K_i^2.$$

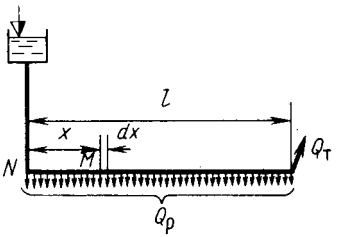


Рис. 13.5

В действительности при непрерывной раздаче скорость по длине не постоянна, а уменьшается, т. е. условия равномерного движения нарушены. В пределах выделенного элемента dx, примыкающего к сечению M, гидравлический уклон

$$J_M = Q_M^2/K^2 = \left(Q_т + Q_р - \frac{Q_р}{l}\,x\right)^2/K^2.$$

На длине элемента dx уменьшение напора определится следующим образом:

$$dH = J\,dx = \left[\frac{(Q_т + Q_р)^2}{K^2} - \frac{2Q_р}{lK^2}\,(Q_т + Q_р)\,x + \frac{Q_р^2}{l^2K^2}\,x^2\right] dx.$$

В результате интегрирования в пределах от 0 до l при допущении о постоянстве расходной характеристики $K = \text{const}$ получим расчетные формулы для необходимого напора:

$$H = \frac{1}{K^2}\left|(Q_т + Q_р)^2\,x - \frac{Q_р\,(Q_т + Q_р)}{l}\,x^2 + \frac{1}{3}\,\frac{Q_р^2}{l^2}\,x^3\right|_0^l.$$

Произведя упрощения, получим

$$H = \frac{l}{K^2}\left(Q_т^2 + Q_тQ_р + \frac{1}{3}\,Q_р^2\right). \qquad (13.21)$$

Ориентировочно можно принять

$$\left(Q_т^2 + Q_тQ_р + Q_р^2/3\right) \approx (Q_т + 0{,}55Q_р)^2.$$

Введем понятие «расчетный расход» $Q_{расч}$:

$$Q_{расч} = Q_т + 0{,}55Q_р.$$

Тогда вместо (13.21) запишем

$$H = Q_{расч}^2 l/K^2 = \theta_2 Q_{расч}^2 l/K_{кв}^2. \qquad (13.22)$$

Если $Q_р = 0$, то $Q_{расч} = Q_т$; если $Q_т = 0$, то $Q_{расч} = 0{,}55\ Q_р$; если $Q_т > 0$ и $Q_р > 0$, то $Q_{расч} = Q_т + 0{,}55\ Q_р$.

Если транзитный расход отсутствует, то

$$H = \frac{1}{3}\,\frac{Q_р^2 l}{K^2}. \qquad (13.23)$$

Интересно отметить, что положение пьезометрической линии при непрерывной раздаче расхода зависит, как показывают исследования, от значения $\lambda l/d$.

Если трубопровод короткий и пьезометрическая линия непрерывно повышается ($\lambda l/d \leqslant 2$), то может наблюдаться минимум напора примерно на $l/2$ (при $4 < \lambda l/d < 6$) и последующее увеличение напора к концу трубы вплоть до равенства напора в начале и в конце трубы.

Наконец, пьезометрическая линия может непрерывно понижаться ($\lambda l/d > 8$).

13.6. Расчет подводящего (всасывающего) трубопровода центробежного насоса

Всасывающий трубопровод обычно гидравлически короткий трубопровод (рис. 13.6), в котором должны быть учтены при расчете как потери по длине, так и детально местные потери напора. В таком трубопроводе вследствие работы центробежного насоса на входе в него (в сечении *2—2*) возникает разрежение (вакуум), благодаря чему жидкость течет по трубопроводу к насосу.

Цель расчета рассматриваемого трубопровода состоит в определении высоты установки насоса $z_{нас}$ или вакуумметрической высоты во всасывающем патрубке центробежного насоса.

Запишем уравнение Бернулли для сечений *1—1* и *2—2*, причем первое сечение выбрано на поверхности воды в водоеме (водотоке), а второе — непосредственно перед входом в насос во всасывающем патрубке. Плоскость сравнения совмещена с сечением *1—1*. Расход Q, подаваемый насосом, известен. Диаметр всасывающего трубопровода определяется при заданном расходе с учетом рекомендуемой СНиП средней скорости движения воды в трубопроводах насосных станций (табл. 13.2).

Зная Q и выбрав значение v, найдем

$$d = \sqrt{4Q/\pi v} = 1{,}13\sqrt{Q/v}\,.$$

Далее, приняв ближайший стандартный диаметр трубопровода, вновь находим среднюю скорость в трубопроводе и вводим ее в расчет.

Рассмотрим горизонтальный центробежный насос. Уравнение Бернулли имеет в данном случае вид

$$\frac{p_{ат}}{\rho g} = z_{нас} + \frac{p_{нас}}{\rho g} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + \Sigma h_{тр}\,.$$

Таблица 13.2

Диаметр трубы, м	Скорость движения воды в трубопроводе, м/с	
	всасывающем	напорном (нагнетательном)
До 0,25 м	0,7—1	1—1,5
0,3—0,8 м	1—1,5	1,2—2
Более 0,8	1,5—2	1,8—3

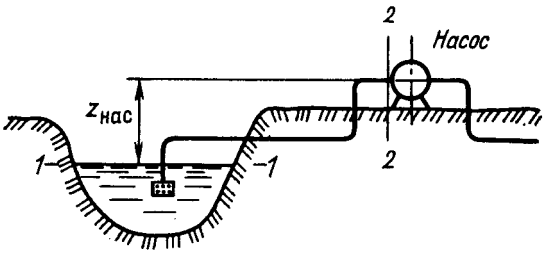


Рис. 13.6

Отсюда высота установки насоса (геометрическая высота всасывания) при $\alpha = 1$

$$z_{нас} = \frac{p_{ат} - p_{нас}}{\rho g} - \frac{v_2^2}{2g}(\alpha + \Sigma\zeta).$$

Геометрическая высота всасывания для горизонтального центробежного насоса определяется от уровня в водоеме (от минимального уровня при изменениях этого уровня) до оси насоса.

Вакуумметрическая высота всасывания

$$\frac{p_{ат} - p_{нас}}{\rho g} = h_{вак}.$$

Тогда

$$z_{нас} = h_{вак} - \frac{v_2^2}{2g}(\alpha + \Sigma\zeta).$$

Допустимое значение $h_{вак.\ доп}$ приводится заводом-изготовителем, обычно $h_{вак.\ доп} \leqslant 6 \div 7$ м.

Следовательно, допустимая высота установки насоса должна быть меньше $h_{вак}$ на $(v_2^2/2g)(\alpha + \Sigma\zeta)$, где $\Sigma\zeta = \Sigma\zeta_м + \lambda l/d$.

С помощью уравнения Бернулли, естественно, можно решить и другую задачу: определить $h_{вак}$ во всасывающем патрубке центробежного насоса при известной высоте установки насоса $z_{нас}$.

Допустимое значение $h_{вак}$ зависит от конструкции насоса, рода и температуры перекачиваемой жидкости. Для нормальных условий работы насоса необходимо, чтобы $h_{вак} \leqslant h_{вак.\ доп}$ при данной температуре. Иначе может начаться интенсивное выделение паров жидкости и газов, нормальный режим работы насоса нарушится и подача уменьшится.

13.7. Расчет экономически наивыгоднейшего диаметра нагнетательного трубопровода

Центробежный насос создает напор, благодаря которому жидкость подается на более высокие отметки (рис. 13.7), например в водонапорную башню, откуда вода поступает самотеком в распреде-

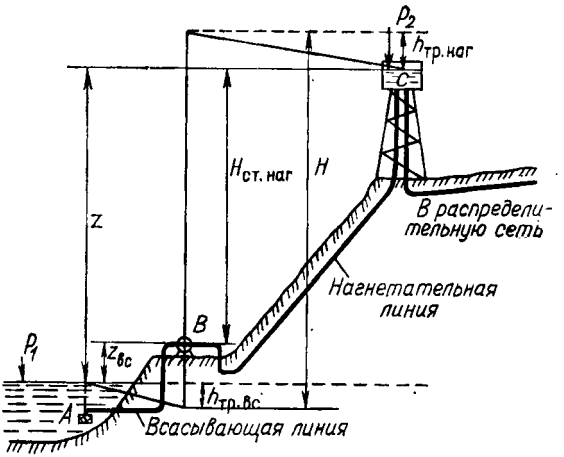


Рис. 13.7

лительную сеть и раздается потребителям. Могут быть и другие схемы.

Благодаря работе насоса каждая единица веса жидкости, пройдя через насос, получает дополнительно к той удельной энергии, которой эта единица веса обладала на входе в насос, определенную удельную энергию H. Эта дополнительная удельная энергия называется напором насоса и обычно выражается в метрах столба перекачиваемой жидкости.

При подаче жидкости на высоту z из водоема с давлением p_1 на поверхности в резервуар-приемник с давлением p_2 на поверхности напор равен (если $v_1 = 0$)

$$H = z + h_{тр} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g},$$

где v_2 — скорость в резервуаре-приемнике.

Если $p_1 = p_2$, а скоростным напором $v_2^2/2g$ можно пренебречь, то для подъема жидкости должен быть создан напор

$$H = z + h_{тр},$$

где $z = z_{вс} + z_{наг}$ — сумма геометрических высот всасывания и нагнетания, а $h_{тр} = h_{тр.\,вс} + h_{тр.\,наг}$ — сумма потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений во всасывающем и нагнетательном трубопроводах.

Высоту z называют геодезической (нивелирной, статической) высотой подъема.

Таким образом, каждой единице веса жидкости насосом должна быть сообщена дополнительная удельная энергия, равная

$$H = z_{вс} + z_{наг} + h_{тр.\,вс} + h_{тр.\,наг}.$$

Заданный расход жидкости Q может быть подан на требуемый уровень нагнетания (т. е. при заданной геодезической высоте подъема z) по трубам различного диаметра.

При рассмотрении задачи выбора диаметра нагнетательного трубопровода не известны ни диаметр d, ни напор H. В выражении для напора можно отделить параметры, не зависящие от диаметра нагнетательного трубопровода ($z_{вс}$, $z_{наг}$, $h_{тр.\,вс}$), от потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений в нагнетательном трубопроводе $h_{тр.\,наг}$.

При расходе жидкости (подаче насоса) Q и напоре H подводимая к двигателю насоса мощность

$$N = \frac{\rho g Q H}{\eta_{нас}\eta_{дв}}, \qquad (13.24)$$

где Q — расход (подача), м³/с; H — напор, м; $\eta_{нас}$, $\eta_{дв}$ — коэффициенты полезного действия насоса и двигателя.

Обозначив $\theta = \eta_{нас}\eta_{дв}$, получим для воды N, кВт,

$$N = \frac{\rho g Q H}{1000\eta} = \frac{9{,}81 Q H}{\eta}. \qquad (13.25)$$

Часть этой мощности $[9{,}81\ Q\,(z + h_{тр.\,вс})]$ расходуется на подъем жидкости на геометрическую (геодезическую) высоту $z = z_{вс} + z_{наг}$ и на преодоление гидравлических сопротивлений во всасывающем трубопроводе $h_{тр.\,вс}$. Все эти параметры от диаметра нагнетательной линии не зависят.

Часть мощности, равная $N_1 = 9{,}81\ h_{тр.\,наг}/\eta$, предназначена для преодоления сопротивлений в нагнетательном трубопроводе и, понятно, существенно зависит от диаметра этого трубопровода. Рассчитываемые нагнетательные трубопроводы систем водоснабжения обычно относятся к гидравлически длинным и $h_{тр} = h_{дл}$.

Оптимальный (экономически наивыгоднейший) диаметр нагнетательного трубопровода $d_{эк}$ определяют на основе технико-экономических расчетов.

Потери напора по длине трубопровода, как уже было показано в § 13.2, обратно пропорциональны диаметру трубы в степени, близкой к пятой. Увеличивая диаметр трубы, можно заметно уменьшить потери напора, следовательно, уменьшить мощность N_1 и затраты на электроэнергию, предназначенную для создания этой части мощности.

Но увеличение диаметра труб приводит к увеличению строительной стоимости трубопровода (капиталовложений в строительство трубопровода) и ежегодных амортизационных (и других) отчислений.

И наоборот, с уменьшением диаметра труб резко возрастает стоимость электроэнергии, затрачиваемой на преодоление гидравлических сопротивлений, но уменьшаются строительная стоимость и ежегодные отчисления.

Отсюда ясно, что экономически наивыгоднейшим диаметром следует считать такой, при котором приведенные годовые затраты будут минимальными.

Приведенные годовые затраты на 1 м трубопровода определяются следующим образом:

$$S' = S'_1 + \left(\frac{1}{T_{ок}} + \frac{R}{100}\right) S'_2. \qquad (13.26)$$

Здесь S' — приведенные годовые затраты; S'_1 — затраты на оплату электроэнергии, затрачиваемой на преодоление гидравлических сопротивлений (в нагнетательном трубопроводе) на длине 1 м:

$$S'_1 = \frac{9{,}81 Q h'_{дл.\ наг}}{\eta} t\sigma = \frac{9{,}81 Q J_{наг} \cdot 1}{\eta} t\sigma,$$

где штрих соответствует 1 м; η — коэффициент полезного действия насосного агрегата (насосной установки); t — число часов работы насосной станции (установки) в год, определяется с учетом изменения режима водопотребления и режима работы с изменением водоподачи; σ — тариф на электроэнергию для данного района [нормативный параметр, руб/(кВт·ч)].

Выражение для строительной стоимости единицы длины трубопровода, найденное из анализа сметной стоимости строительства, имеет вид

$$S'_2 = (b_0 + bd^{\alpha}),$$

где b_0 — постоянная (не зависящая от диаметра) часть строительной стоимости (табл. 13.3); b — нормированный коэффициент, зависящий от вида труб и от условий строительства; α — показатель степени, зависящий от вида труб и не зависящий от условий строительства.

Доля строительной стоимости 1 м трубопровода, отнесенная к одному году, равна

$$\frac{1}{T_{ок}} S'_2,$$

где $T_{ок}$ — нормативный срок окупаемости капиталовложений в строительство, для водоснабжения принимается равным 7—10 годам.

Таблица 13.3

Трубы	R	b_0	p при $T_{ок} = 7$	p при $T_{ок} = 10$
Стальные	4,6	6,9	0,189	0,146
Чугунные	3,3	8,4	0,176	0,133
Асбестоцементные	7,3	11	0,216	0,173
Полиэтиленовые	4,6	9	0,189	0,146

Сумма амортизационных отчислений (в том числе отчислений на текущий ремонт), отнесенная к одному году, равна

$$\frac{R}{100} S_2',$$

где R — сумма нормированных отчислений в процентах (табл. 13.3).

Обозначим

$$\frac{1}{T_{ок}} + \frac{R}{100} = p.$$

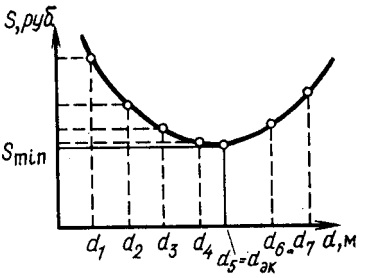


Рис. 13.8

Значения b_0, R, p (при различных $T_{0к}$) по нормативным данным для труб из различных материалов приводятся в табл. 13.3. Приведенные годовые затраты на строительство 1 м трубопровода составляют

$$S' = S_1' + pS_2' = BQ^{n+1}d^{-m} + p(b_0 + bd^{\alpha}).$$

Найдя первую производную от S' по d и приравняв ее нулю, получим общее выражение для $d_{эк}$, удовлетворяющего минимуму приведенных годовых затрат:

$$-BmQ^{n+1}d^{-(m+1)} + \alpha bd^{\alpha-1} = 0.$$

Отсюда

$$d_{эк} = \sqrt[\alpha+m]{\frac{BmQ^{n+1}}{\alpha b}}. \qquad (13.27)$$

Здесь был показан принципиальный гидравлический подход к определению экономически наивыгоднейшего диаметра одиночного нагнетательного трубопровода.

Задача об определении $d_{эк}$ может быть решена либо аналитически, либо подбором. Задаваясь различными значениями диаметра нагнетательной линии, находят соответствующие значения $S' = S_1' + pS_2'$ и строят график (рис. 13.8). Экономически наивыгоднейший диаметр соответствует минимуму приведенных годовых затрат.

13.8. Расчет распределительных водопроводных линий

Водопроводные сети, по которым вода из водонапорной башни (или резервуара) поступает к потребителям, делятся на разветвленные (тупиковые) (рис. 13.9) и кольцевые (рис. 13.10).

Расчет разветвленных сетей. Разветвленные сети состоят из основной магистральной линии и отходящих от узлов сети ответвлений, которые могут состоять из одной линии (простые ответвления) или нескольких участков трубопроводов (сложные ответвления).

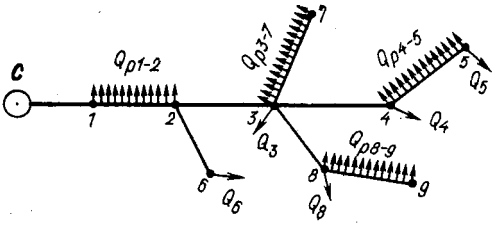


Рис. 13.9

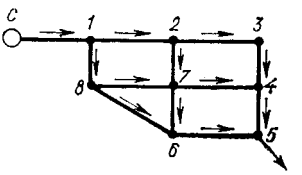


Рис. 13.10

При расчете разветвленной сети возможны две основные схемы: 1) отметка пьезометрической линии в начале сети не задана; 2) отметка пьезометрической линии в начале сети известна.

Расчет разветвленной сети по первой схеме. Отметка пьезометрической линии (отметка уровня воды в резервуаре водонапорной башни) не известна.

В начале расчета следует выбрать магистральную линию. Она должна соединять водонапорную башню с одним из конечных узлов. Кроме того, магистральная линия обычно имеет наибольшую длину, по ней проходит больший расход, чем по другим намечаемым основным линиям. За конечный узел часто принимается узел с наибольшей геодезической отметкой поверхности земли. Иногда для выбора магистральной линии приходится сравнивать различные варианты, исходя из обязательного обеспечения подачи необходимых расходов и требуемых свободных напоров.

После выбора магистрали определяются расчетные расходы по всем участкам сети. При этом по известным уже правилам учитывается наличие сосредоточенных и равномерно распределенных расходов.

По известным расчетным расходам определяются диаметры участков трубопроводов. При этом используются таблицы найденных по экономическим соображениям рекомендуемых Ф. А. Шевелевым предельных расходов и средних скоростей в водопроводных стальных, чугунных, асбестоцементных и полиэтиленовых трубах.

Предельные расходы и средние скорости для стальных труб, прокладываемых в центральных и западных районах европейской части СССР, приведены в табл. 13.4. Для районов Сибири и Урала (где более дешевая электроэнергия, но большие капиталовложения в строительство трубопроводов в связи с большой глубиной прокладки труб) приводимые в таблице значения предельных расходов должны быть увеличены на 10—15 %. Для южных районов СССР (где более дорогая электроэнергия, но меньшие затраты на строительство) указанные значения предельных расходов уменьшаются на 12—9 %.

Таблица 13.4

Диаметр трубопровода, мм	Рекомендуемая предельная скорость, м/с	Рекомендуемый предельный расход, л/с	Диаметр трубопровода, мм	Рекомендуемая предельная скорость, м/с	Рекомендуемый предельный расход, л/с
50	0,96	3,1	400	1,36	184
75	1,07	5,8	500	1,50	315
100	1,15	11,7	600	1,49	443
125	1,19	16,6	700	1,52	561
150	1,12	21,8	800	1,53	776
200	1,34	46	900	1,57	987
250	1,34	71	1000	1,68	1335
300	1,35	103	1200	1,69	1919
350	1,35	140			

Сравнивая расчетные расходы каждого участка с предельными расходами, назначают соответствующие диаметры труб на каждом участке и находят средние скорости на участках. Затем определяют потери напора по длине каждого i-го участка магистрали:

$$h_{\text{дл}i} = \theta_{2i} \frac{Q_{\text{расч}\,i} l_i}{K^2_{\text{кв}\,i}}.$$

Поправочные коэффициенты θ_2, как и выше, отражают увеличение потерь напора в переходной области сопротивления и зависят от средней скорости.

Из предварительных проработок при расчете известны геодезические отметки поверхности земли в узлах сети, материал труб, длины всех участков сети, сосредоточенные расходы в узлах сети (узловые расходы) и расходы, непрерывно раздаваемые на соответствующих участках. Также известны необходимые минимальные свободные напоры в концевых и других узлах сети. Требуемый свободный напор $h_{\text{св}}$ при расчетах принимается из нормативных документов. Минимальный свободный напор в сети водопровода при хозяйственно-питьевом водопотреблении на вводе в здание над поверхностью земли должен приниматься при одноэтажной застройке не менее 10 м, при большей этажности на каждый этаж следует добавить 4 м.

Магистральная линия представляет собой ряд последовательно соединенных участков. Поэтому напор, затрачиваемый при движении воды по магистрали, равен

$$H = \Sigma \theta_{2i} \frac{Q^2_{\text{расч}\,i} l_i}{K^2_{\text{кв}\,i}}.$$

Отметка пьезометрической линии в концевом узле магистрали равна

$$\nabla_к = z_к + h_{св.\,к\,min},$$

где $z_к$ — геодезическая отметка поверхности земли в концевом узле; $h_{св.\,к\,min}$ — минимальный свободный напор в этом же узле.

Отметка пьезометрической линии в начале магистрали [отметка уровня воды в водонапорной башне (точка C на рис. 13.7)]

$$\nabla_C = \nabla_к + \Sigma\theta_{2i}\frac{Q_{расч\,i}^2 l_i}{K_{кв\,i}^2}.$$

Свободный напор в начале сети (высота уровня воды в водонапорной башне над поверхностью земли в точке C) равен

$$h_{св\,C} = \nabla_C - z_C,$$

где z_C — геодезическая отметка поверхности земли в точке C.

При расчете необходимо проверить, чтобы свободные напоры в узлах были больше $h_{св\,min}$, рекомендуемых нормами.

Расчет ответвлений производится при известных отметке пьезометрической линии (полученной при расчете магистрали) в начале ответвления $\nabla_н$, геодезических отметках поверхности земли в начале z и в конце $z_к$ ответвления и в промежуточных узлах (если они имеются, т. е. если ответвление сложное) на ответвлении. Известны также расчетные расходы, материал и длины труб, требуемый минимальный свободный напор в концевом узле $h_{св.\,к}$.

Тогда отметка пьезометрической линии в конце ответвления

$$\nabla_к = z_к + h_{св.\,к}.$$

Следовательно, максимально возможный напор для преодоления сопротивлений в ответвлении равен

$$H_{отв} = \nabla_н - \nabla_к.$$

При простом ответвлении максимально возможный уклон

$$J = H_{отв}/l$$

и, следовательно, расходная характеристика

$$K = Q_{расч}/\sqrt{J}.$$

Найдя по значению K ближайший больший диаметр в табл. П.13.2, получим потери напора по длине в ответвлении:

$$h_{дл} = \theta_2 Q_{расч}^2 l/K_{кв}^2.$$

Далее определяем отметку пьезометрической линии $\nabla_к = \nabla_н + h_{дл}$ и свободный напор в конце ответвления $h_{св.\,к}$, который не может быть принят меньше рекомендуемого нормами $h_{св.\,к}$ без особого обоснования. Выбранный по значениям K ближайший

больший диаметр обеспечивает гидравлический уклон, меньший чем $J = H_{отв}/l$, т. е. $h_{св.\,к} \geqslant h_{св.\,к\,min}$.

При сложном ответвлении, состоящем из n участков, средний гидравлический уклон

$$J_{ср} = H_{отв}/\left(\sum_{n=1}^{i=n} l_i\right).$$

Расходная характеристика на каждом участке

$$K_i = Q_{расч\,i}/\sqrt{J_{ср}}.$$

В общем случае расходная характеристика на каждом участке не будет точно равна K (по табл. П.13.2), т. е. необходимо выбирать между ближайшими меньшим d_1 ($K_1 < K_i$) и большим d_2 ($K_2 > K_i$) диаметрами на каждом участке, рассматривая различные комбинации этих диаметров. Число таких комбинаций равно 2^n.

Если на всех участках принять только бóльшие диаметры, потери напора будут меньше, чем найденные по условиям задачи $H_{отв}$, но стоимость труб будет наибольшей.

Если на всех участках ответвления принять только меньшие диаметры, стоимость труб будет наименьшей, но потери напора превзойдут $H_{отв}$. При этом $h_{св.\,к}$ может быть меньше $h_{св\,min}$ или даже $h_{св\,min} \leqslant 0$. Такие варианты недопустимы. Поэтому последовательно перебирают 2^n вариантов, выбирая попеременно меньшие диаметры на одних участках (одном участке), а большие — на других.

За расчетный принимается вариант с максимально возможным использованием напора $H_{отв}$ при наименьшей массе труб, а следовательно, и их минимальной стоимости.

При необходимости в расчеты вводятся поправки на неквадратичность сопротивления.

Расчет разветвленной сети по второй схеме ведется аналогично расчетам сложных ответвлений. Назначается магистральная линия. Определяется максимально возможный для использования напор

$$H = \nabla_н - \nabla_к,$$

где $\nabla_н$ — заданная отметка пьезометрической линии в начале магистрали; $\nabla_к = z_к + h_{св.\,к\,min}$.

Далее определяется средний гидравлический уклон по магистрали:

$$J_{ср} = H/(\Sigma l_i).$$

Затем по вычисленным расчетным расходам находятся расходные характеристики на каждом участке

$$K_i = Q_{расч\,i}/\sqrt{J_{ср}}$$

и вновь рассматриваются 2^n вариантов сочетаний диаметров на участках.

Расчеты кольцевых водопроводных сетей. Кольцевые водопроводные сети представляют собой замкнутые смежные контуры или кольца. Такие сети обладают большей надежностью, чем разветвленные. В кольцевых сетях выключение одного или нескольких участков может быть компенсировано подачей воды по параллельным и обходным линиям. При этом снабжение водой временно выключается только на выключенном участке. Когда в сети возникают резкие и быстро сменяющие друг друга повышения и понижения давлений (гидравлический удар, см. гл. 14), в кольцевой сети это явление не так опасно, как в разветвленной.

Расчеты кольцевых водопроводных сетей представляют собой сложную задачу, при решении которой учитываются не только трубопроводы, но и все сооружения (насосные станции, станции подкачки, резервуары, водонапорные башни и другие сооружения). Учитывается необходимость обеспечения подачи воды без перебоев и остановок сети.

Основное значение при расчетах имеют технико-экономические требования. Расчеты кольцевых водопроводных сетей представляют собой важную комплексную технико-экономическую задачу, которую детально изучают в курсе водоснабжения. Здесь остановимся только на основных положениях расчета.

Исходными известными сведениями о кольцевой сети являются общая конфигурация сети, топография местности, длины участков, раздаваемые в узлах расходы; материал труб известен.

Если на каждом участке раздача расходов воды происходит равномерно, расход условно относят поровну к узлам в начале и в конце участка. Расчет ведется следующим образом.

Намечается направление движения воды (начальное потокораспределение). При этом должен обеспечиваться первый закон Кирхгофа, т. е. равенство нулю суммы расходов, поступающих в узел (положительные) и уходящих из узла (отрицательные):

$$\Sigma Q_i = 0, \tag{13.28}$$

где i — номер узла.

По приближенным формулам или по рекомендуемым предельным расходам определяются в первом приближении диаметры, соответствующие технико-экономическим требованиям.

Вычисляются потери напора на каждом участке. При этом условно считается, что в каждом кольце потери напора на участках, где намеченное движение воды происходит по часовой стрелке, положительные, а направление воды против часовой стрелки соответствует отрицательным потерям напора.

Потери напора в кольцах должны удовлетворять второму закону Кирхгофа, т. е. алгебраическая сумма потерь напора в каждом кольце должна быть равна нулю:

$$\Sigma h_{i-k} = 0, \tag{13.29}$$

где h_{i-k} — потери напора на участке между i-м и k-м узлами.

Очевидно, поскольку начальное потокораспределение производилось произвольно и диаметры округлялись до стандартных значений, условие (13.29) в начале расчета (первое приближение) не удовлетворяется.

В связи с этим производят так называемую «увязку» кольцевой сети. При этом вводят поправки к ранее назначенным расходам, затем вновь определяют $\Sigma h_{i-к}$. Расчет ведется до тех пор, пока невязка потерь напора в кольце не станет меньше заданного заранее значения невязки потерь или равной ему.

При расчете кольцевой водопроводной сети, имеющей m узлов и n колец, имеем m уравнений (13.28) баланса расходов в узлах и n уравнений (13.29) баланса потерь напора в кольцах.

Кроме того, при расчете сети с некоторыми водопитающими устройствами в уравнения, описывающие их совместную с сетью работу, вводятся данные о насосах и резервуарах.

Для расчета систем подачи и распределения воды сейчас широко используют аналоговые устройства и ЭВМ.

13.9. Основы гидравлического расчета подачи воды из двух резервуаров

Рассмотрим систему, состоящую из двух резервуаров и соединительных трубопроводов (рис. 13.11). Разбор воды осуществляется в промежуточной точке C. Известны пьезометрические напоры в точках A и B и расходные характеристики K_1, K_2 труб диаметрами d_1 и d_2, а также длины участков l_1 и l_2. Расход воды Q_C, забираемый в точке C, изменяется во времени.

В зависимости от значения Q_C возможны различные случаи работы данной системы.

1. При $Q_C = 0$ движение характеризуется пьезометрической линией AC_0B. По последовательно соединенным трубопроводам 1 и 2 вода поступает из резервуара A в резервуар B. Происходит только наполнение резервуара B, расход воды при этом равен

$$Q = \sqrt{H/\left(\Sigma l_i/K_i^2\right)}\,.$$

2. При расходе $Q_C > 0$ потери на линии AC увеличены по сравнению со случаем, когда $Q_C = 0$. Пьезометрическая линия имеет положение

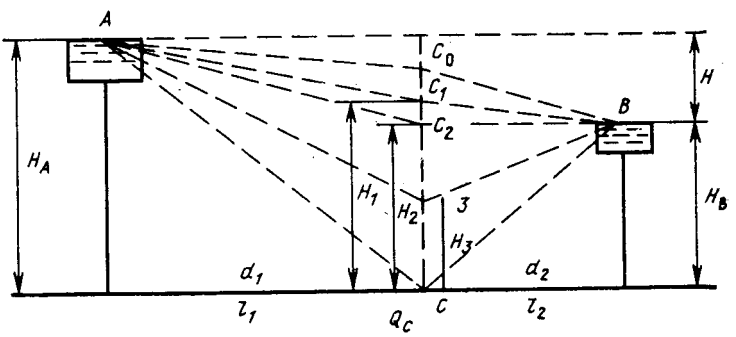


Рис. 13.11

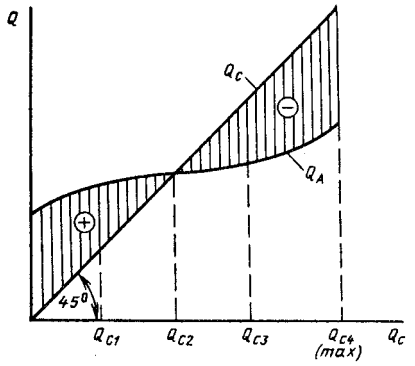


Рис. 13.12

AC_1B. В результате вода разбирается в точке C и поступает в резервуар B. Расход Q_{C1} равен

$$Q_{C1} = \sqrt{(H_A - H_1)/\left(\frac{l_1}{K_1^2}\right)}.$$

При этом расход Q_{B1} равен

$$Q_{B1} = \sqrt{(H_1 - H_B)/\left(\frac{l_2}{K_2^2}\right)}.$$

3. При дальнейшем увеличении расхода Q_C потери напора на линии AC увеличиваются еще больше, и при некотором расходе Q_{C_2} потери напора на первом участке AC станут равными напору $H = H_A - H_B$. В связи с этим пьезометрическая линия займет положение AC_2B, причем точка C_2 находится на одном уровне с точкой B, т. е. $H_2 = H_B$. Поступление воды в резервуар B прекратится, расход в точке C будет равен

$$Q_{C2} = \sqrt{(H_A - H_2)/(l_1/K_1^2)}.$$

Весь расход Q_{C_2} поступает из резервуара A по первому участку AC. Резервуар B в работе в этом случае не участвует.

4. При дальнейшем увеличении расхода в точке C до некоторого значения Q_{C3} пьезометрическая линия опустится и займет положение AC_3B. Расход в точке C будет равен сумме расходов, поступающих по линии AC из резервуара A и по линии BC — из резервуара B:

$$Q_{C3} = K_1\sqrt{\frac{H_A - H_3}{l_1}} + K_2\sqrt{\frac{H_B - H_3}{l_2}}.$$

5. При свободном истечении в атмосферу в точке C расход Q_{C4} будет максимальным и равным

$$Q_{C4\,max} = K_1\sqrt{\frac{H_A}{l_1}} + K_2\sqrt{\frac{H_B}{l_2}}.$$

Изменение расходов можно представить графически (рис. 13.12). Ось абсцисс является осью расходов в точке C. По оси ординат откладываются значения расхода из резервуара A—Q_A или значения Q_C.

Биссектриса координатного угла характеризует расходы Q_C. Разность между Q_A и Q_C на графике показывает значение расхода, поступающего в резервуар B (знак «+»), или расхода, вытекающего из резервуара B (знак «—») и забираемого в точке C.

Очевидно, что при $Q_C < Q_{C_2}$ вода накапливается в резервуаре B. При $Q_C > Q_{C_2}$ начинается использование воды из резервуара B потребителем в точке C.

13.10. Контрольные вопросы и примеры

1. Что такое простой трубопровод? В чем различие между гидравлически длинным и коротким трубопроводами?

2. Какие основные задачи решаются при расчетах установившегося напорного движения в простых трубопроводах?

3. На основе каких уравнений решаются указанные основные задачи?

4. В каком виде записывается формула Шези для расхода при расчетах гидравлически длинного трубопровода при установившемся напорном движении? Как учитываются при этом местные потери напора и скоростные напоры?

5. Как выражается напор при этом?

6. В связи с чем в формулы для расхода и для напора вводятся поправочные коэффициенты? Как определить, нужно ли применять указанные коэффициенты?

7. Как зависит изменение потерь напора в квадратичной области сопротивления от изменения диаметра трубопровода при остальных неизменных параметрах?

8. В чем гидравлические особенности работы трубопроводов из последовательно и из параллельно соединенных труб? Как учитываются при расчете этих трубопроводов области сопротивления?

9. Какие допущения сделаны при выводе формулы для потерь напора в трубопроводе с непрерывным изменением расхода по длине? Как располагается пьезометрическая линия при расчете таких трубопроводов?

10. Можно ли произвольным образом назначать среднюю скорость во всасывающем и нагнетательном трубопроводах насосных станций?

11. Что может произойти, если при расчете подводящего (всасывающего) трубопровода центробежного насоса принять $h_{вак} > h_{вак.\,доп}$?

12. Следует ли при расчете экономически наивыгоднейшего диаметра нагнетательного трубопровода учитывать геодезическую высоту подъема?

13. Какие технико-экономические соображения положены в основу указанного расчета? Какие гидравлические формулы использованы в этом расчете?

14. Как определяется мощность, необходимая для подъема жидкости?

15. Какие основные схемы расчета разветвленной сети могут встретиться на практике? Как выполняются расчеты для различных случаев разветвленной сети?

16. Что такое рекомендуемые предельная средняя скорость и расход в трубопроводе? Как они были получены?

17. Как используется в расчетах понятие «свободный напор»?

18. Каковы основные положения расчета трубопроводных сетей?

Пример 13.1. Определить расход воды, проходящей по трубопроводу длиной $l = 3200$ м, диаметром $d = 0{,}25$ м $= 250$ мм при напоре $H = 10$ м (см. рис. 13.1). Трубы нормальные.

Решение. Определим значение гидравлического уклона:

$$J = \frac{H}{l} = \frac{10}{3200} = 0{,}003125.$$

По табл. П.13.2 находим, что расходная характеристика для квадратичной области для нормальной трубы диаметром 250 мм равна $K_{кв} = 616{,}4$ л/с.

Предполагая, что область сопротивления квадратичная, находим

$$Q = K_{кв}\sqrt{J} = 616{,}4\sqrt{0{,}003125} = 34{,}46 \text{ л/с}.$$

Уточним, верно ли предположение о квадратичной области сопротивления. Средняя скорость равна

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{34{,}46 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 2{,}5^2} = 7{,}02 \text{ дм/с} \approx 0{,}7 \text{ м/с},$$

где расход — в литрах в секунду и диаметр — в дециметрах.

Сравнивая полученное значение $v = 0{,}7$ м/с с $v_{кв} = 1{,}05$ м/с (получено по табл. 13.1 для $d = 250$ мм), видим, что $v < v_{кв}$, т. е. предположение о том, что область сопротивления квадратичная, не подтверждается.

Введем поправку θ_1 к значению расхода, учитывающую, что область сопротивления — доквадратичная (переходная). По табл. П.13.1 при средней скорости 0,7 м/с для нормальных труб имеем $\theta_1 = 0{,}96$.

Тогда расход равен $Q = 0{,}96 \cdot 34{,}46 = 33{,}08$ л/с $= 0{,}033$ м^3/с.

Пример 13.2. Определить напор, необходимый для пропуска расхода $Q = 1$ м^3/с по трубопроводу из нормальных труб диаметром $d = 1{,}2$ м, если длина трубопровода $L = 25$ км. Трубопровод соответствует схеме, представленной на рис. 13.1.

Решение. Найдем напор, считая, что область сопротивления — квадратичная. Согласно (13.12)

$$H = \theta_2 Q^2 L \left(1000/K_{кв}^2\right).$$

Для указанной в условии примера трубы по табл. П.13.2 имеем $\dfrac{1000}{K_{кв}^2} = 0{,}671 \cdot 10^{-6}$.

Тогда при $\theta_2 = 1$ имеем $H = 1000^2 \cdot 25 \cdot 0{,}671 \cdot 10^{-6} = 16{,}77$ м.

Находим значение средней скорости:

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{1}{0{,}785 \cdot 1{,}2^2} = 0{,}885 \text{ м/с}.$$

Сравнивая это значение с $v_{кв} = 1{,}3$ м/с (см. табл. 13.1), видим, что область сопротивления не является квадратичной. Принимаем поправочный коэффициент $\theta_2 = 1{,}05$ (по табл. П.13.1). Тогда $H = 1{,}05 \cdot 16{,}77 = 17{,}61$ м.

Пример 13.3.

Определить расход воды, который будет подан по трем последовательно соединенным трубам из левого резервуара (рис. 13.3) при следующих данных: напор $H = 18$ м; трубы нормальные, $d_1 = 300$ мм; $d_2 = 200$ мм; $d_3 = 150$ мм; длина участков $l_1 = 300$ м; $l_2 = 900$ м; $l_3 = 600$ м.

Согласно (13.13) расход равен

$$Q = \sqrt{\frac{H}{\sum_{i=1}^{i=n} \theta_{2i} L_i \dfrac{1000}{K_{кв\,i}^2}}}.$$

Найдем значения $\dfrac{1000}{K_{кв}^2}$ (см. табл. П.13.2) для нормальных труб диаметром 300, 200 и 150 мм. Соответственно получаем значения

$$\frac{1000}{K_{кв1}^2} = 0{,}001; \quad \frac{1000}{K_{кв2}^2} = 0{,}00861; \quad \frac{1000}{K_{кв3}^2} = 0{,}03985.$$

Принимаем, что область сопротивления во всех трех трубах будет квадратичной, т. е. поправочные коэффициенты

$$\theta_{2.1} = \theta_{2.2} = \theta_{2.3} = 1.$$

Находим при этих условиях расход:

$$Q = \sqrt{\frac{18}{0{,}3 \cdot 0{,}001 + 0{,}9 \cdot 0{,}00861 + 0{,}6 \cdot 0{,}03985}} = 23{,}73 \text{ л/с}.$$

Площади живых сечений ω принимаем по табл. П.13.2: $\omega_1 = 7{,}07$ дм^2; $\omega_2 = 3{,}14$ дм^2; $\omega_3 = 1{,}767$ дм^2.

Тогда средние скорости $v_1 = Q/\omega_1 = 23{,}73/7{,}07 = 3{,}35$ дм/с $= 0{,}335$ м/с; $v_2 = Q/\omega_2 = 23{,}73/3{,}14 = 7{,}56$ дм/с $= 0{,}756$ м/с; $v_3 = Q/\omega_3 = 23{,}73/1{,}767 = 13{,}43$ дм/с $= 1{,}343$ м/с.

Согласно табл. 13.1 получаем, что в третьей трубе область сопротивления квадратичная и $\theta_{2.3} = 1$, а в трубах № 1 и № 2 значения средней скорости меньше, чем $v_{кв}$ (по табл. 13.1). По табл. П.13.1 находим $\theta_{2.1} = 1{,}2$ и $\theta_{2.2} = 1{,}071$.

Тогда с учетом найденных значений поправочных коэффициентов

$$Q = \sqrt{\frac{18}{1{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}001 + 1{,}071 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}00861 + 1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}03985}} = 23{,}5 \text{ л/с}.$$

Таким образом, при заданных условиях учет поправочных коэффициентов θ_2 привел к незначительному изменению расхода.

Глава 14

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДАХ

14.1. Гидравлический удар как неустановившееся напорное движение упругой жидкости в упругих трубопроводах

Неустановившееся движение характеризуется тем, что значения местных скоростей и давления в пространстве, занятом движущейся жидкостью, изменяются с течением времени, т. е.

$$u_x = u_x(x, y, z, t);$$
$$u_y = u_y(x, y, z, t);$$
$$u_z = u_z(x, y, z, t);$$
$$p = p(x, y, z, t).$$

Неустановившееся движение, так же как и установившееся, может быть безнапорным и напорным, одномерным, плоским и трехмерным, ламинарным и турбулентным. Примером неустановившегося напорного движения может служить гидравлический удар.

Гидравлический удар — явление, возникающее при напорном движении жидкости в трубе при быстром измерении скорости в одном из сечений. Это явление характеризуется возникновением волны повышенного или пониженного давления, которая распространяется от места изменения скорости и вызывает в каждом сечении колебания давления и деформации стенок трубопровода. При резком уменьшении скорости движения воды в стальных трубопроводах на каждое уменьшение скорости 1 м/с давление в трубопроводе возрастает приблизительно на 1—1,2 МПа, т. е. на 10—12 ат. Вследствие этого могут возникать осложнения в нормаль-

ной работе трубопровода вплоть до разрыва стенок и аварий оборудования насосных станций.

При гидравлическом ударе возможно также и резкое падение давления вплоть до давления насыщенных паров жидкости при данной температуре.

Как следствие появления столь низкого давления при гидравлическом ударе возможен даже разрыв жидкости. При этом может быть нарушена нормальная работа трубопровода. Вместе с тем в некоторых случаях гидравлический удар может иметь и положительное значение.

Первые исследования гидравлического удара были выполнены Н. Е. Жуковским в 1898 г. Им была детально проанализирована физическая картина процесса, были выведены дифференциальные уравнения удара, дано их общее решение, найдены основные расчетные зависимости для вычисления изменения давлений при гидравлическом ударе. Н. Е. Жуковский провел также экспериментальные исследования гидравлического удара на водопроводе г. Москвы. В дальнейшее развитие исследований и расчетов гидравлического удара большой вклад внесли советские ученые.

К возникновению гидравлического удара могут приводить различные причины: 1) быстрое закрытие или открытие запорных и регулирующих устройств; 2) внезапная остановка насоса; 3) выпуск воздуха через гидранты на оросительной сети при заполнении трубопроводов водой (обычно гидравлический удар может начаться в заключительной стадии выпуска воздуха); 4) пуск насоса при открытом затворе на нагнетательной линии.

Характер процесса гидравлического удара зависит от вызвавших его причин. Так, при резком закрытии затвора в конце трубопровода гидравлический удар начнется с повышения давления, которое от затвора будет распространяться вверх по трубопроводу, а затем сменится понижением давления. Если закрытый затвор в конце трубопровода резко откроется, гидравлический удар начнется с понижения давления, которое затем сменится повышением давления.

Кроме того, процесс гидравлического удара зависит и от многих других факторов.

14.2. Гидравлический удар при мгновенном закрытии затвора

Рассмотрим случай гидравлического удара при закрытии затвора, расположенного в конце горизонтальной прямолинейной цилиндрической трубы круглого поперечного сечения, подсоединенной к открытому резервуару (рис. 14.1).

Исходные данные для расчета: длина трубы L, диаметр D, площадь ω, толщина стенок трубы e, средняя скорость потока в трубе при установившемся движении (до гидравлического удара) v_0, мо-

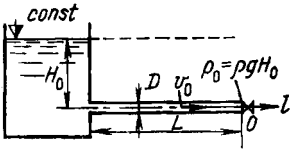


Рис. 14.1

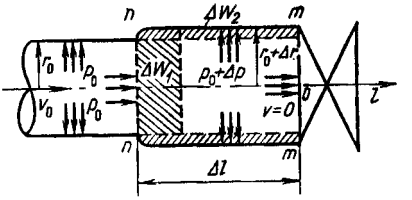


Рис. 14.2

дуль упругости материала стенок трубы E, модуль упругости жидкости E_0, плотность жидкости ρ; избыточный гидродинамический напор в трубопроводе до гидравлического удара $H_0 = p_0/\rho g$.

Кроме того, примем следующие допущения:

1) размеры резервуара столь велики, что уровень в нем остается постоянным независимо от явлений, происходящих в трубопроводе;

2) потери напора и скоростной напор до закрытия затвора малы, поэтому пьезометрическая линия практически совпадает с горизонтальной линией;

3) движение жидкости в трубе принимается одномерным, т. е. все местные скорости считаются равными средней скорости, давление также считается одинаковым во всех точках живого сечения от продольной координаты.

В момент времени t_0 затвор мгновенно закрылся. Если бы жидкость была абсолютно несжимаема ($E_0 = \infty$), а стенки трубопровода абсолютно неупругие ($E = \infty$), вся масса жидкости мгновенно остановилась бы и при этом произошло бы очень большое повышение давления.

В реальных условиях упругость стенок трубопровода и сжимаемость жидкости изменяют характер протекания процесса и значения возникающих повышений давления.

Поверхность n—n на рис. 14.2, отделяющая часть жидкости, находящейся под действием волны гидравлического удара, от невозмущенной гидравлическим ударом жидкости, есть фронт ударной волны.

За бесконечно малый отрезок времени Δt после мгновенного закрытия остановится слой $mmnn$, непосредственно примыкающий к затвору. Толщина этого слоя Δl зависит от упругих свойств жидкости и материала стенок трубопровода. В момент времени $t = t_0 + \Delta t$ слои жидкости, расположенные выше по течению от сечения n—n, продолжают двигаться со скоростью v_0 в сторону затвора. Под влиянием этих слоев остановившаяся масса жидкости в отсеке m—n сжимается, стенки трубопровода растягиваются, давление повышается на Δp и становится равным $p = p_0 + \Delta p$. В освободившийся в результате этого объем отсека m—n через сечение n—n за время Δt поступает часть жидкости еще не остановившихся слоев.

Повышение давления при гидравлическом ударе можно определить, применив теорему об изменении количества движения (импульсов) к массе остановившейся жидкости.

В проекциях на направление движения имеем:

импульс внешних сил, действующих на выбранную массу

$$-\Delta p\omega\Delta t;$$

изменение количества движения выбранной массы

$$-(\rho\omega_0\Delta l v_0+\rho\omega v_0\Delta t v_0),$$

где $\rho\omega v_0\Delta t$ — масса жидкости, втекшей в отсек mn за время Δt.

Приняв $\omega=\omega_0$, имеем

$$\Delta p\Delta t=\rho\Delta l v_0+\rho v_0^2\Delta t.$$

Обозначив $c=\Delta l/\Delta t$, получим формулу Н. Е. Жуковского

$$\Delta p=\rho c v_0+\rho v_0^2 \tag{14.1}$$

или

$$\Delta p/\rho g=\Delta H=cv_0/g+v_0^2/g, \tag{14.2}$$

где c — скорость распространения волны гидравлического удара вдоль трубопровода, т. е. скорость ударной волны. В общем случае c — скорость распространения любого малого возмущения в жидкости.

Так как $v_0\ll c$, обычно считают

$$\Delta p=\rho c v_0. \tag{14.1а}$$

После мгновенного закрытия затвора фронт n—n ударной волны распространяется вдоль трубопровода со скоростью c. Слои жидкости последовательно, начиная от ближайшего к затвору, останавливаются, их скорость гасится до нуля.

На рис. 14.3 показаны «мгновенный снимок» состояния трубопровода, эпюры распределения давления и скорости по длине трубопровода в момент времени $t=t_0+l/c$. Фронт n—n ударной волны прошел путь l за промежуток времени l/c после закрытия задвижки. На этом участке трубопровода давление увеличилось на Δp и стало равным $p=p_0+\Delta p$, а скорость движения жидкости погасилась до нуля, т. е. $v=0$, стенки трубопровода растянуты, жидкость находится в сжатом состоянии, плотность равна $p+\Delta p$.

В момент времени $t=t_0+L/c$ фронт n—n ударной волны достиг резервуара и занял положение $n'n'$ (рис. 14.4). В этот момент жидкость в трубопроводе находится в мгновенном состоянии покоя ($v=0$) по всей длине трубопровода L. Давление увеличилось на Δp и стало равным $p=p_0+\Delta p$, стенки трубопровода растянуты, жидкость сжата, плотность равна $p+\Delta p$. Такое состояние системы не является устойчивым, так как по исходному предположению

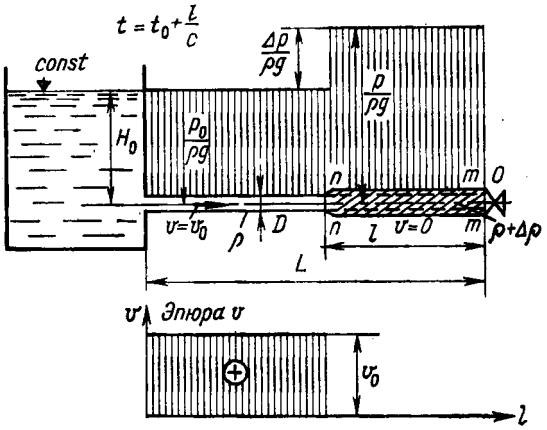


Рис. 14.3

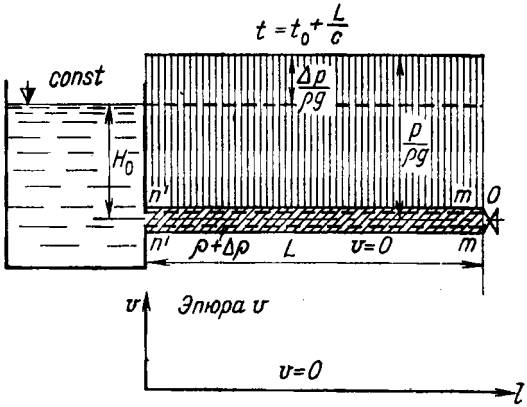


Рис. 14.4

уровень, а следовательно, и давление в резервуаре не зависят от явлений, происходящих в трубопроводе. Таким образом, давление в резервуаре на уровне оси трубопровода (рис. 14.4) сохранит свое первоначальное значение, равное p_0.

В связи с этим в момент времени $t = t_0 + L/c$ возникает движение жидкости из трубы в резервуар со скоростью $v_0 = |\Delta p/\rho c|$, равной первоначальной, но направленной в противоположную сторону, т. е. слой жидкости в трубопроводе, примыкающий к резервуару, начнет вытекать в сторону резервуара. При этом давление в трубопроводе падает до давления p_0 и стенки трубопровода восстанавливают первоначальную форму. Явление распространяется по трубопроводу к затвору. Следовательно, в момент времени $t = t_0 + L/c$ возникает обратная отраженная от резервуара

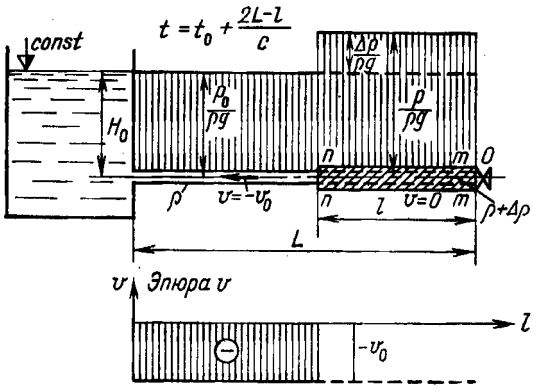


Рис. 14.5

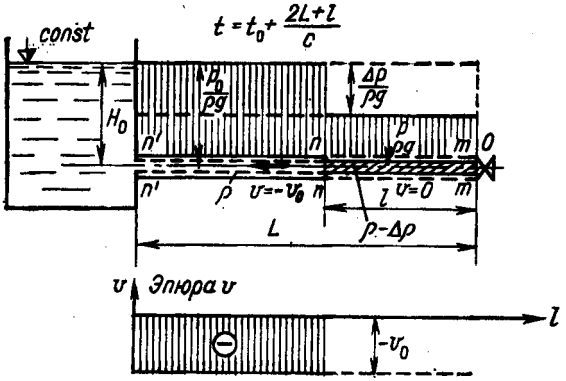


Рис. 14.6

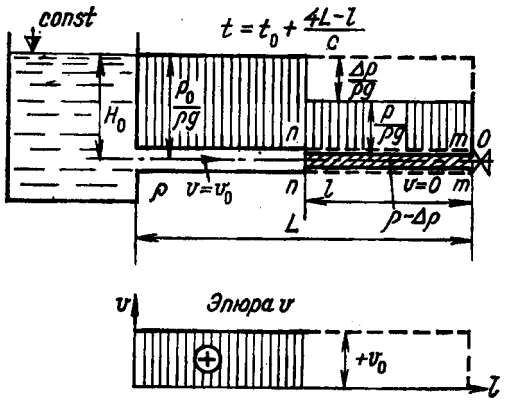


Рис. 14.7

волна, которая со скоростью c распространяется от резервуара к затвору. В трубопроводе восстанавливается первоначальное давление p_0 и создается скорость v_0. Рисунок 14.5 соответствует моменту времени $t = t_0 + L/c + (L-l)/c = t_0 + (2L-l)/c$. К этому моменту времени отраженная волна прошла путь $L-l$, равный расстоянию от резервуара до сечения $n-n$. На этом участке трубопровода давление равно p_0, скорость движения жидкости $v = -v_0$, стенки трубопровода и жидкость находятся в начальном состоянии, соответствующем давлению p_0. На участке трубопровода длиной l давление равно $p = p_0 + \Delta p$, скорость движения жидкости $v = 0$, стенки трубопровода растянуты, а жидкость находится в сжатом состоянии, плотность $\rho + \Delta\rho$.

В момент $t = t_0 + 2L/c$ отраженная волна достигнет задвижки и заключенная в трубопроводе масса жидкости приобретет всюду начальный объем и давление p_0, находясь, однако, в состоянии движения в сторону резервуара. Инерция движущейся массы приведет к тому, что в момент времени $t = t_0 + 2L/c$ давление в сечении $m-m$ у задвижки понизится на $\Delta p = \rho c v_0$.

Считаем, что давление при установившемся движении p_0 таково, что в процессе гидравлического удара давление в трубе остается выше давления насыщенных паров жидкости $p > p_{н.п}$ при данной температуре. Вследствие этого жидкость не может оторваться от затвора и внутри нее не образуются пустоты (каверны).

Понижение давления будет сопровождаться остановкой жидкости и деформацией стенок трубы. Явление будет распространяться от затвора к резервуару со скоростью c. Таким образом, в момент времени $t = t_0 + 2L/c$ у задвижки возникнет волна пониженного давления $p = p_0 - \Delta p$. Эта волна начнет распространяться со скоростью c от затвора к резервуару, создавая в трубопроводе новое состояние, характеризующееся падением скорости движения жидкости до $v = 0$ и сжатием стенок трубы.

К моменту времени $t = t_0 + 2L/c + l/c$ эта волна пройдет путь l, т. е. достигнет сечения $n-n$.

На рис. 14.6 показаны «мгновенный снимок» состояния трубопровода, эпюры распределения по длине трубопровода давления $p/\rho g$ и скорости v в момент времени $t = t_0 + (2L + l)/c$. На участке трубопровода длиной l в этот момент времени давление равно $p = p_0 - \Delta p$, скорость движения жидкости $v = 0$, жидкость находится в состоянии, соответствующем давлению $p = p_0 - \Delta p$, плотность $\rho - \Delta\rho$, стенки трубопровода сжаты; на участке трубопровода длиной $L-l$ в этот момент времени давление равно p_0, скорость движения жидкости $v = -v_0$, стенки трубопровода и жидкость находятся в начальном состоянии, соответствующем давлению p_0, плотность равна ρ.

В момент времени $t = t_0 + 3L/c$ волна пониженного давления достигнет резервуара.

Так как наступивший покой всей жидкости в этом разреженном (при $p < p_0$) состоянии не может сохраняться вследствие того, что в резервуаре давление постоянно ($p = p_0$), то в сечении $n'—n'$ снова появляется скорость движения жидкости v_0 в направлении от резервуара к затвору, т. е. в момент времени $t = t_0 + 3L/c$ возникает отраженная от резервуара волна, которая со скоростью c распространяется к затвору, создавая в трубопроводе новое состояние с первоначальным давлением p_0 и скоростью v_0.

В момент времени $t = t_0 + 3L/c + (L—l)/c$ эта волна достигнет сечения на расстоянии l от затвора.

На рис. 14.7 показаны «мгновенный снимок» состояния трубопровода, эпюры распределения скорости v и давления $p/\rho g$ по длине трубопровода в момент времени $t = t_0 + 3L/c + (L—l)/c$. На участке трубопровода длиной l в этот момент времени давление равно $p = p_0—\Delta p$, скорость движения жидкости $v = 0$, жидкость находится в разреженном состоянии, соответствующем указанному давлению, плотность $\rho—\Delta\rho$, стенки трубопровода сжаты. На участке трубопровода длиной $L—l$ в этот момент времени давление равно p_0, скорость движения жидкости $v = v_0$, стенки трубопровода и жидкость находятся в начальном состоянии, соответствующем давлению p_0, плотность равна ρ.

В момент времени $t = t_0 + 4L/c$ отраженная волна достигнет затвора. В этот момент времени вся жидкость в трубопроводе будет находиться в первоначальном состоянии с давлением p_0 и скоростью v_0, направленной в сторону закрытого затвора. В связи с этим произойдет новый гидравлический удар, давление у затвора опять мгновенно повысится до $p = p_0 + \Delta p$ и явление повторится в вышеописанной последовательности.

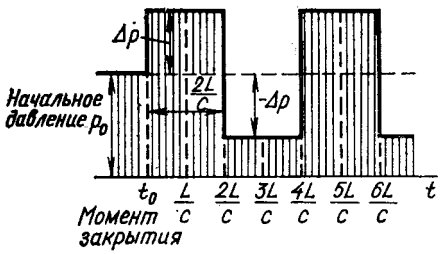


Рис. 14.8

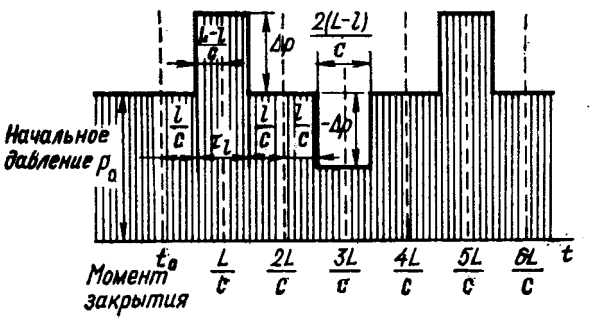


Рис. 14.9

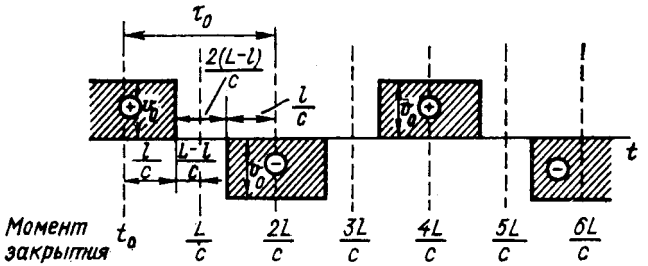


Рис. 14.10

На рис. 14.8 показано изменение давления в сечении m—m у затвора. Давление представлено отрезками, отличающимися от p_0 попеременно на $+\Delta p$ и $-\Delta p$, причем чередование происходит через промежуток времени $2L/c$, который называется ф а з о й у д а р а τ_0. Период колебаний масс жидкости при гидравлическом ударе равен $T_0 = 2\tau_0$.

Диаграмма давления в точке, находящейся на расстоянии l от затвора, показана на рис. 14.9. Промежутки времени, в течение которых давление в точке l отличается от p_0, будет меньше, чем в сечении у затвора. Длительность этих промежутков равна $\tau = 2(L-l)/c$ как для повышенного давления, так и для пониженного. Период же колебаний остается прежним: $T_0 = 2\tau_0$.

Изменение скорости в точке, находящейся на расстоянии l от затвора, показано на рис. 14.10. Здесь в соответствии с проведенным выше анализом чередуются фазы скорости $v = +v_0$ с фазами скорости $v = 0$ и $v = -v_0$. У входа в трубопровод скорость скачкообразно меняется от $+v_0$ на $-v_0$ в моменты времени L/c, $5L/c$, $9L/c$ и т. д. и от $-v_0$ на $+v_0$ в моменты $3L/c$, $7L/c$ и т. д.

Рассмотренный выше процесс гидравлического удара соответствует случаям, когда потерями на трение можно пренебречь.

Гидравлический удар, начинающийся с волны повышения давления, называют п о л о ж и т е л ь н ы м, а начинающийся с волны понижения давления — о т р и ц а т е л ь н ы м.

Если внезапно откроется прежде закрытое регулирующее устройство в конце трубопровода, давление у затвора вначале резко уменьшится на Δp, затем через интервал времени, равный фазе, сменится повышением давления и т. д. Процесс можно проанализировать так же, как для гидравлического удара, начинающегося с повышения давления.

С резкого понижения давления начинается и гидравлический удар при внезапной остановке насоса. Вода из нагнетательной линии после отражения с большой скоростью возвращается по направлению к насосу. Если на напорной линии за насосом установлен обратный клапан, при ударе воды об обратный клапан пониженное давление резко повысится.

14.3. Скорость распространения волны гидравлического удара

Определим скорость распространения ударной волны в упругом трубопроводе круглого поперечного сечения. Рассмотрим отсек длиной Δl (см. рис. 14.2).

В течение времени Δt движение жидкости выше рассматриваемого участка Δl происходит, как и до закрытия затвора, со скоростью v_0. За счет этого в рассматриваемый отсек за время Δt войдет объем жидкости

$$\Delta W = Q\Delta t = \omega_0 v_0 \Delta t. \tag{14.3}$$

Этот объем займет часть объема отсека Δl, который образовался за счет растяжения стенок трубопровода (ΔW_1) из-за повышения давления на Δp и за счет сжатия жидкости в отсеке (ΔW_2).

При растяжении стенок радиус трубы станет равным $r = r_0 + \Delta r$, площадь сечения трубы ω увеличится по сравнению с первоначальным значением ω_0 и

$$\Delta W_1 = (\omega - \omega_0)\,\Delta l = \Delta\omega\Delta l. \tag{14.4}$$

Первоначальный объем жидкости в отсеке $\omega_0\Delta l$ при увеличении давления на Δp уменьшится на некоторую часть

$$\Delta W_2 = \beta_c \omega_0 \Delta l \Delta p \tag{14.5}$$

или с учетом того, что $\beta_c = 1/E_0$ (см. § 1.5), на

$$\Delta W_2 = \omega_0 \Delta l \Delta p / E_0. \tag{14.6}$$

Понятно, что

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2.$$

Подставляя значения ΔW, ΔW_1 и ΔW_2 по (14.3), (14.4) и (14.6), получаем

$$\omega_0 v_0 \Delta t = \omega_0 \Delta l \frac{\Delta p}{E_0} + \Delta\omega\Delta l \tag{14.7}$$

или

$$v_0 \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{\Delta p}{E_0}. \tag{14.8}$$

Подставляя в (14.1) v_0 и переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho c^2} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_0} + \frac{\mathrm{d}p}{E_0}.$$

Отсюда скорость распространения ударной волны

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p/\rho}{\mathrm{d}p/E_0 + \mathrm{d}\omega/\omega_0}}. \tag{14.9}$$

Приведем формулу (14.9) к виду, удобному для использования в расчетах. Примем, что напряжение в стенках трубы подчиняется формуле Мариотта (2.46)

$$\sigma = pD/2e.$$

Далее принимаем, что деформации подчиняются закону Гука, E и E_0 не зависят от давления. С учетом сказанного

$$\frac{d\omega}{\omega_0} = \frac{d(\pi r^2)}{\pi r_0^2} = 2\frac{\pi r\, dr}{\pi r_0^2} = 2\frac{dr}{r_0}.$$

Заменяя относительное удлинение $dr/r_0 = d\sigma/E$, получаем

$$\frac{d\omega}{\omega_0} = 2\frac{d\sigma}{E}.$$

Подставив согласно формуле (2.46)

$$d\sigma = \frac{D}{2e}dp,$$

получим

$$\frac{d\omega}{\omega_0} = \frac{dp}{E}\frac{D}{e}. \qquad (14.10)$$

Подставив (14.10) в (14.9), найдем

$$c = \sqrt{\frac{E_0/\rho}{1 + \frac{D}{e}\frac{E_0}{E}}}. \qquad (14.11)$$

Если труба абсолютно жесткая ($E = \infty$), тогда

$$c_0 = \sqrt{E_0/\rho}. \qquad (14.12)$$

Последнее выражение представляет собой скорость распространения возмущений (в данном случае — ударной волны) при неупругих стенках трубопровода. Она равна скорости звука в жидкости, занимающей неограниченно большой объем.

Если стенки трубы упругие, то $(D/e)(E_0/E) > 0$ и $c < c_0$. При температуре воды 10 °С принимают $c_0 = 1425 \div 1435$ м/с. Для расчетов примем $E_0 = 20{,}3 \cdot 10^8$ Па, тогда

$$c_0 = \sqrt{\frac{20{,}3 \cdot 10^8}{1000}} = 1425 \text{ м/с},$$

для воды

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{e}\frac{E_0}{E}}}. \qquad (14.13)$$

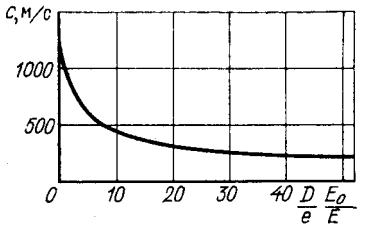


Рис. 14.11

Кроме того, так называемый приведенный модуль упругости жидкости определяется по формуле

$$E_{0\,\text{пр}} = \frac{E_0}{1 + \frac{D}{e}\frac{E_0}{E}}. \quad (14.14)$$

Тогда можно записать

$$c = \sqrt{E_{0\text{пр}}/\rho}. \quad (14.11а)$$

График зависимости скорости распространения ударной волны c от $\frac{D}{e}\frac{E_0}{E}$ приведен на рис. 14.11. Как видно, скорость распространения волны в трубопроводах очень велика и заметно уменьшается с ростом $(D/e) \times (E_0/E)$. В табл. 14.1 приведены отношения E_0/E для воды и некоторых материалов труб.

Чем больше отношение D/e, т. е. чем меньше относительная толщина стенки трубы, тем меньше при других одинаковых условиях скорость ударной волны. На значения скорости c также влияет эллипсовидность круглого поперечного сечения.

В формулах по расчету c также учитывают условия закрепления (опирания) трубопроводов, совместную работу трубопроводов с грунтом или бетонными одеждами и другие факторы.

Наблюдаемые скорости ударной волны могут быть значительно меньше, чем найденные по формуле (14.13) (могут составлять 50 % и ниже). Уменьшение скорости ударной волны в первую очередь можно объяснить наличием в жидкости нерастворенного газа (воздуха), а также твердых частиц. Воздух и твердые частицы в воде изменяют модуль упругости E_0, увеличивая знаменатель — в формуле для определения c [см.(14.13)]. Скорость ударной волны при этом уменьшается. Влияние воздуха и твердых частиц на c в трехфазном потоке зависит от давления, объемного содержания воздуха и твердой фазы, относительной плотности твердой фазы (по срав-

Таблица 14.1

Материал труб	E_0/E	Материал труб	E_0/E
Сталь	0,01	Асбестоцемент	0,11
Чугун	0,02	Оргстекло	0,5—0,8
Железобетон*	0,065—0,09	Полиэтилен	1—1,5
Бетон	~0,1	Резина	~120—350

* Отношение E_0/E уменьшается с увеличением содержания арматуры.

нению с водой), модулей упругости. Существенное влияние на скорость ударной волны оказывает закон, согласно которому происходят изменения (сжатие и расширение) пузырьков воздуха (изотермический или адиабатический закон). Важно также, понижается ли давление ниже давления p_2 [см. (1.16)], при котором воздух начинает выделяться из воды.

Для определения скорости звука c в трехфазной смеси, включающей газ (воздух) и твердую фазу, В. М. Алышевым предложена формула

$$c = \frac{\sqrt{E_0/\rho}}{\sqrt{(1-\varepsilon_{\text{н. г}}-\varepsilon_{\text{в. г}}-\varepsilon_{\text{тв}}) + \frac{D}{e}\frac{E_0}{E} + \varepsilon_{\text{н. г}}\frac{E_0}{\chi p} + a\frac{p_{\text{ат}}p_2}{p^2} \times E_0 + \varepsilon_{\text{тв}}\frac{E_0}{E_{\text{тв}}} + \varepsilon_{\text{тв}}\frac{D}{e}\frac{E_0}{E}\left(\frac{\rho_{\text{тв}}}{\rho}-1\right)}},$$

где $\varepsilon_{\text{н. г}}$ — объемное содержание нерастворенного газа (при давлении p); $\varepsilon_{\text{в. г}}$ — объемное содержание газа, выделившегося из жидкой фазы; $\varepsilon_{\text{тв}}$ — объемное содержание твердой фазы; χ — показатель степени политропы; $p_{\text{ат}}$ — атмосферное давление; p_2 — давление, при котором происходит растворение газа в жидкости; a — коэффициент, зависящий от объема растворенного воздуха; $E_{\text{тв}}$ — модуль упругости твердой фазы; $\rho_{\text{тв}}$ — плотность твердой фазы; ρ — плотность жидкости.

Формула справедлива при $\varepsilon_{\text{н.г}} \leqslant 0{,}02 \div 0{,}03$. Параметры $\varepsilon_{\text{в.г}}$ и $a\frac{p_{\text{ат}}p_2}{p^2}E_0$ в этой формуле учитывают процесс выделения растворенного газа, который происходит при $p \leqslant p_2$. При $p > p_2$ параметры не учитываются.

14.4. Гидравлический удар при постепенном закрытии затвора

В реальных условиях время закрытия затвора или другого регулирующего устройства $T_з$ всегда больше нуля, т. е. при самом быстродействующем устройстве мгновенного закрытия достигнуть нельзя. В зависимости от соотношения $T_з$ и фазы удара τ_0 повышение и понижение давления достигают различных значений.

Различают прямой гидравлический удар (при $T_з < \tau_0$) и непрямой гидравлический удар, когда $T_з < \tau_0$. Напомним, что $\tau_0 = 2L/c$.

Прямой гидравлический удар $T_з < \tau_0$. В процессе закрытия затвора изменяется площадь выходного сечения и, следовательно, изменяется средняя скорость потока в трубопроводе по некоторому закону $v_t = v(t)$, который определяется конструкцией затвора и зависимостью проходного сечения затвора от времени. При $t = 0$

средняя скорость $v_t = v_0$, в промежуточный момент времени t средняя скорость равна текущему значению v_t, а при $t = T_з$ имеем $v = v_{Tз} = 0$.

При немгновенном закрытии затвора изменение средней скорости потока можно представить в виде ряда ступенчатых понижений скорости Δv_t, которые вызывают в соответствии с описанным выше механизмом явления ряд повышений давления $\Delta p_t = \rho c \Delta v_t$. Суммируя эти повышения давления (они, очевидно, нарастают вплоть до момента закрытия), можно в любой момент времени t найти $\Delta p_t = p_t - p_0$.

При прямом гидравлическом ударе ($T_з < 2L/c$) максимальное повышение происходит при $t = T_з$ ($v_t = 0$):

$$\Delta p = \rho c v_0.$$

При $t < T_з$ повышение давления будет меньше, чем по (14.1), так как разность средних скоростей, входящая в проекцию изменения количества движения (см. § 14), в этом случае равна $\Delta v_t = v_0 - v_t$ и

$$\Delta p_t = \rho c (v_0 - v_t). \qquad (14.15)$$

На диаграмме изменения во времени давления у затвора при $T_з < 2L/c$ (рис. 14.12) видно, что при $t < T_з$ повышение давления равно $\Delta p_t = \rho c (v_0 - v_t)$. Характер диаграммы и ординаты определяются взаимодействием волн повышения и понижения давления в трубопроводе.

Первая волна повышения давления, возникшая в момент t_0, дойдет до резервуара за время L/c, отразится от входного сечения и в момент $t = \tau_0 = 2L/c$ вернется к сечению у затвора. При $t = T_з$ имеем $p_{Tз} = p_0 + \Delta p$.

В момент $2L/c$ начнется уменьшение давления — сначала до p_0, а затем давление будет уменьшаться, пока в момент времени $(T_з + 2L/c)$ не достигнет значения $(p_0 - \Delta p)$.

В момент $4L/c$ волна понижения давления начнет гаситься следующей волной повышения давления и т. д. Поскольку здесь не учитывались потери на трение, процесс — незатухающий.

На рис. 14.12 волны повышения и понижения давления обозначены соответственно знаками «+» и «—».

Непрямой гидравлический удар $T_з > 2L/c$. В этом случае явление осложняется тем, что при $T_з > 2L/c$ первая волна повышения давления пройдет за время $2L/c$ до резервуара и вернется к затвору, когда он еще не полностью закрыт.

При этом понижение давления начнется при не полностью погашенном повышении давления, при частично открытой задвижке и наличии скорости поступательного движения. Если $T_з > 4L/c$, то, вернувшись в момент $4L/c$ к затвору, волна понижения давления сменится следующей волной повышения давления, опять-таки

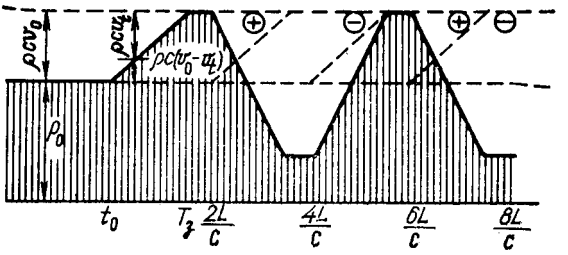


Рис. 14.12

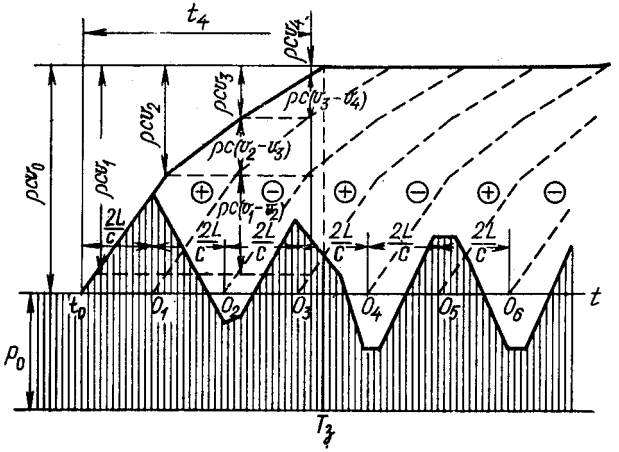


Рис. 14.13

не полностью погашенной, при открытой еще задвижке и наличии поступательной скорости.

На диаграмме изменения давления у затвора при $T_з > 6L/c$ (рис. 14.13) видно, что вторая волна повышения вернется к затвору в момент $6L/c$, когда затвор все еще не полностью закрыт, и не будет полностью погашена.

Диаграмма на рис. 14.13 построена способом, при котором в каждый данный момент времени алгебраически суммируются отрезки соседних полос, обозначенных знаками «+» и «—». Это учитывает одновременное суммарное действие нескольких волн (и повышения, и понижения давления).

Непрямой гидравлический удар при линейном изменении скорости. В этом случае, как и ранее, по (14.15)

$$\Delta p_t = \rho c (v_0 - v_t).$$

Так как $T_з > 2L/c$, то максимальное в данном случае повышение давления будет наблюдаться при $t = \tau_0 = 2L/c$, когда волна

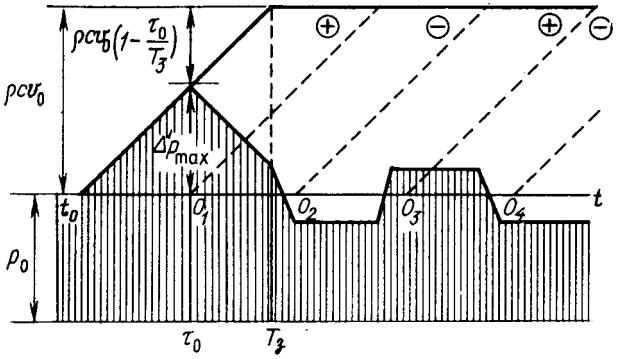


Рис. 14.14

повышения давления еще не начала гаситься последующими волнами.

При линейном изменении скорости

$$v_t = v_0 (1 - t/T_з).$$

При $t = 2L/c$

$$v_{\tau_0} = v_0 (1 - \tau_0/T_з).$$

Тогда в момент $t = \tau_0$

$$\Delta p = 2\rho L v_0 / T_з \qquad (14.16)$$

или

$$\Delta H = 2L v_0 / (g T_з).$$

Пример диаграммы давления у затвора при $T_з = 4L/c$ приведен на рис. 14.14.

Вопросы гидравлического удара при постепенном закрытии регулирующих устройств весьма сложны. Они детально рассматриваются при изучении ряда специальных дисциплин.

Расчеты гидравлического удара успешно выполняются на ЭВМ.

14.5. Дифференциальные уравнения неустановившегося движения вязкой сжимаемой жидкости в напорных трубопроводах

Рассмотрим неустановившееся напорное движение в прямолинейном трубопроводе круглого сечения (рис. 14.15).

Направим ось l вдоль потока и выделим бесконечно малый элемент длиной $\mathrm{d}\,l$. Составим уравнение движения этого элемента:

$$\Delta M \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \Delta P + \Delta G + \Delta T.$$

Найдем сумму проекций на направление движения всех сил (массовых и поверхностных), действующих на жидкость в пределах выделенного элемента.

Сумма проекций поверхностных сил (сил гидродинамического давления ΔP и касательных сил ΔT, приложенных по боковой поверхности стенок, при постоянстве τ_0 по всему периметру χ) равна

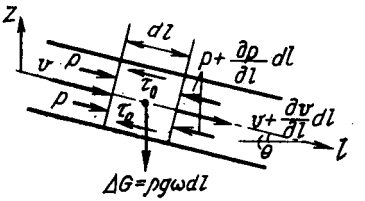


Рис. 14.15

$$-\frac{\partial(p\omega)}{\partial l}\,\mathrm{d}\,l-\tau_0\mathrm{d}\,l\chi,$$

или с учетом того, что $\chi = \omega/R$,

$$-\frac{\partial(p\omega)}{\partial l}\,\mathrm{d}l-\frac{\tau_0}{R}\,\omega\,\mathrm{d}l.$$

Далее приняв, как и при установившемся движении, $\tau_0/R = \rho gJ$ (гипотеза квазистационарности сопротивления), найдем проекцию поверхностных сил в виде

$$-\frac{\partial(p\omega)}{\partial l}\,\mathrm{d}l-\rho g\omega J\,\mathrm{d}l.$$

Проекция силы тяжести элемента равна

$$\rho g\omega\,\mathrm{d}l\sin\theta=-\rho g\omega\,\mathrm{d}l\,\frac{\partial z}{\partial l}.$$

Проекция сил инерции равна

$$-\rho\omega\,\mathrm{d}l\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=-\rho\omega\,\mathrm{d}l\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\,\frac{\partial v}{\partial l}\right).$$

Суммируя и приравнивая нулю сумму проекций сил, имеем

$$\frac{1}{\rho g}\,\frac{\partial p}{\partial l}+\frac{\partial z}{\partial l}+J+\frac{1}{g}\,\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2g}\right)=0. \qquad (14.17)$$

Считая, что изменения ρ в связи с изменением давления p по длине малы, представим (14.17) в виде

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}\right)=-\frac{1}{g}\,\frac{\partial v}{\partial t}-J \qquad (14.18)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}\right)+J=-\frac{1}{g}\,\frac{\partial v}{\partial t}. \qquad (14.19)$$

Применим уравнение неразрывности (3.21) для элементарной струйки:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial l}+\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t}=0;$$

$$\rho\,\frac{\partial Q}{\partial l}+Q\,\frac{\partial\rho}{\partial l}+\rho\,\frac{\partial\omega}{\partial t}+\omega\,\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \qquad (14.20)$$

Аналогично предыдущему, приняв, что изменением ρ по длине можно пренебречь, найдем

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial l} + \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{14.21}$$

Найдем выражения для каждого члена. Имеем

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial l} = \rho \frac{\partial (\omega v)}{\partial l} = \rho\omega \frac{\partial v}{\partial l} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial l} \cong \rho\omega \frac{\partial v}{\partial l}, \tag{14.22}$$

так как анализ показывает, что $\omega \dfrac{\partial v}{\partial l} \gg v \dfrac{\partial \omega}{\partial l}$.

Далее

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \rho \frac{\partial (\pi r^2)}{\partial t} = 2\pi r \rho \frac{\partial r}{\partial t}.$$

Учитывая, что по закону Гука

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{r}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

а по формуле Мариотта

$$\sigma = pD/2e,$$

имеем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{D}{2e};$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{r}{E} \frac{D}{2e} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Тогда

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\rho\omega D}{Ee} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{14.23}$$

Для жидкости изменение плотности связано с изменением давления:

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\partial p}{E_0}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial p}{\partial t}$$

и

$$\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = \omega \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{14.24}$$

Подставив (14.22)—(14.24) в (14.21)

$$\rho\omega \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\rho\omega D}{Ee} \frac{\partial p}{\partial t} + \omega \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad (14.25)$$

и сократив на ω, получим

$$\rho \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\rho}{E_0} \frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{D}{e} \frac{E_0}{E} + 1 \right) = 0.$$

Отсюда

$$\rho \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1 + \frac{D}{e} \frac{E_0}{E}}{E_0/\rho} = 0. \qquad (14.26)$$

Поскольку

$$\frac{E_0/\rho}{1 + \frac{D}{e} \frac{E_0}{E}} = c^2,$$

то

$$\rho \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0,$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \frac{\partial v}{\partial l}. \qquad (14.27)$$

Из выражения пьезометрического напора

$$H = z + p/\rho g$$

имеем

$$p = \rho g (H - z);$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g (H - z) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho g \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (14.28)$$

Подставив $\partial p/\partial t$ по (14.28) в (14.24), получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial H}{\partial t} \left[1 - \frac{g (H - z)}{c_0^2} \right]^{-1}, \qquad (14.29)$$

где для воды $c_0 = 1425$ м/с.

Второй член в скобках в (14.29) пренебрежимо мал. Тогда, подставив значение $\partial p/\partial t$ по (14.29) в (14.27), получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial l}. \qquad (14.30)$$

Уравнения (14.19) и (14.30) являются общими дифференциальными уравнениями неустановившегося напорного движения реальной сжимаемой жидкости в упругих трубопроводах.

Если при рассмотрении гидравлического удара пренебречь потерями на трение ($J = 0$) и членом $v^2/2g$, изменение которого несопоставимо мало ($v^2/2g = 0{,}05 \div 1$ м при $v = 1 \div 4{,}5$ м/с) по сравнению с изменениями пьезометрического напора, получим вместо (14.19)

$$\frac{\partial H}{\partial l} = -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{14.31}$$

Уравнения (14.30) и (14.31) являются дифференциальными уравнениями изучаемого неустановившегося движения невязкой жидкости.

Определение H (или p) и v при заданных условиях представляет собой основную задачу при изучении гидравлического удара. Зная изменения давления Δp, можно выразить и изменения пьезометрического напора H с учетом изменения количества движения при гидравлическом ударе. Формулу Жуковского для Δp при мгновенном закрытии затвора можно получить и из дифференциальных уравнений. Продифференцировав (14.31) по l, а (14.30) — по t и приравняв смешанные производные, исключим переменную v

$$\frac{\partial^2 H}{\partial l^2} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial l};$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -\frac{c^2}{g}\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial l};$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial l^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \tag{14.32}$$

Чтобы исключить переменную H, продифференцируем (14.31) по t, а (14.30) — по l:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial l^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{14.33}$$

Уравнения (14.32) и (14.33) называются волновыми уравнениями. Их решения имеют вид

$$H - H_0 = F\left(t - \frac{l}{c}\right) + f\left(t + \frac{l}{c}\right); \tag{14.34}$$

$$v - v_0 = \frac{g}{c}\left[F\left(t - \frac{l}{c}\right) - f\left(t + \frac{l}{c}\right)\right]. \tag{14.35}$$

Функция F характеризует изменения напора (давления) и скорости, распространяющиеся по направлению оси l со скоростью c. Функция f характеризует изменения напора (давления) и скорости, распространяющиеся в направлении, противоположном направлению оси l, со скоростью c. Рассмотрим случай закрытия затвора в конце трубопровода, присоединенного к большому резервуару с жидкостью. Воспользуемся (14.34) и (14.35) для определения повышения давления при мгновенном ударе в первой полуфазе удара,

т. е. при $t < L/c$, когда волна повышения давления еще не дошла до резервуара и волны отражения нет: $f(t + l/c) = 0$.

В сечении у затвора $l = 0$, после закрытия $v = 0$. Тогда

$$-v_0 = \frac{g}{c} F(t).$$

Подставляя $F(t) = H - H_0 = \Delta H$, получаем формулу Жуковского в виде (14.2):

$$\Delta H = cv_0/g$$

или в виде (14.1):

$$\Delta p = \rho c v_0.$$

14.6. Гидравлический удар при резком понижении давления (с разрывом сплошности потока)

Если $p \leqslant p_2$ [см. (1.16)], при дальнейшем повышении давления часть воздуха вновь поглощается водой. Так как при ударе чередуются волны повышения давления (волны сжатия) и волны понижения давления (волны разрежения), то процесс выделения и последующего поглощения воздуха происходит довольно сложно.

При давлении $p \lesssim p_2$ выделившийся воздух, содержавшийся в жидкости в объеме 2 %, займет до 8 % объема и более. Эти полости воздуха обязательно окажут заметное влияние на работу трубопровода. При очень большом содержании воздуха могут образоваться воздушные «пробки» довольно большой протяженности, сплошь перекрывающие трубу.

Если давление в трубопроводе понизится до давления (упругости) насыщенных паров жидкости при данной температуре, начнется «холодное кипение», образуются пары жидкости. При резком уменьшении давления могут образоваться полости, заполненные смесью пара и воздуха (при достаточно низком давлении), т. е. произойдет разрыв сплошности потока, разрыв «колонны» жидкости. Так как движение жидкости в трубопроводе не остановилось, то при возникновении отраженных волн с изменением направления массы жидкости устремляются к месту разрыва сплошности. При быстром сжатии полости с пониженным давлением происходит соударение масс (колонн) жидкости. Повышение давления при этом превышает Δp, найденное по формуле Жуковского.

По исследованиям различных авторов повышение давления при разрыве сплошности $\Delta p_{\text{р. сп}}$ может быть найдено по следующему соотношению:

$$\Delta p_{\text{р. сп}} = \rho c v_0 + (1 \div 2)\, p_0,$$

где p_0 — давление при установившемся движении.

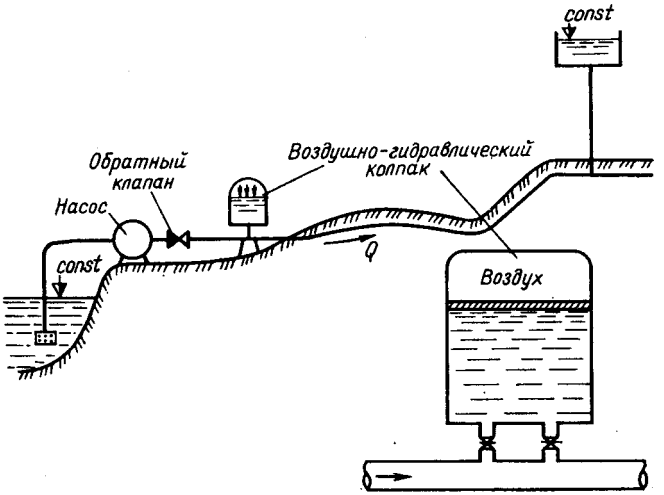


Рис. 14.16

Для уточнения значения коэффициента перед p_0 требуется дальнейшее накопление экспериментальных данных.

Гидравлический удар с разрывом сплошности потока может произойти при внезапной остановке насоса (рис. 14.16). Подача воды насосом прекращается, а движение воды по инерции по трубопроводу еще происходит. При этом в потоке могут возникнуть разрывы сплошности. При перемене направления движения, которая произойдет вследствие отражения и преломления волн гидравлического удара, разорвавшиеся части колонны жидкости встречаются и давление очень сильно возрастает по сравнению с гидравлическим ударом без разрыва сплошности.

На характер и количественные характеристики гидравлического удара с разрывом сплошности помимо указанных факторов (модуля упругости жидкости и материала стенок трубопровода, отношения диаметра к толщине стенки, относительного времени закрытия регулирующего устройства, воздухосодержания, объемного содержания твердых частиц и т. д.) влияют и такие важные факторы, как режимы работы насосной станции, очертание трассы трубопровода (наличие переломов в вертикальном профиле и конфигурация сети в плане, наличие обратных клапанов, тупиковых участков, отводов, мест разделения и соединения потоков, резких поворотов трубопроводов и т. д.).

Влияние этих факторов на место образования разрывов сплошности, на объемы полостей, образующихся при разрыве, на длины и скорости движения соударяющихся колонн приводятся в нормативных документах.

Разрыв сплошности потока возможен, если повышение давления при гидравлическом ударе, найденное по формуле Жуковского, будет больше, чем сумма давления $\rho g H_0$ и практически максимально возможного вакуумметрического давления, т. е.

$$\rho c v_0 > \rho g (H_0 + h_{\text{вак max}}).$$

Как известно, максимальное значение $h_{\text{вак } min} \approx 7 \div 8$ м. Наиболее опасными с точки зрения возникновения разрыва сплошности являются места непосредственно у насосной станции (у насосов) и места переломов трассы с выпуклостью на продольном профиле, обращенной вверх.

14.7. Защита от воздействия гидравлических ударов

При проектировании гидросистем должны предусматриваться как мероприятия по недопущению опасных повышений и понижений давления в трубопроводе, так и меры по защите, если возникнут опасные колебания давления. Эти меры отражены в нормативных документах.

Ниже приводятся основные меры по гашению гидравлических ударов.

1. Сброс части жидкости из трубопровода при повышении давления, если такой сброс возможен по соображениям охраны окружающей среды.

Воду сбрасывают в какие-либо понижения местности, в водоемы или обратно в источник водоснабжения. В последнем случае вода может быть пропущена через насос и всасывающую линию, если на напорном (нагнетательном) трубопроводе нет обратного клапана; через обводные линии (байпасы) в обход обратного клапана и насоса; через медленно закрывающиеся обратные клапаны. В этих случаях необходимо учитывать, что насос при обратном направлении движения воды и отсутствии тормозов может работать как турбина с недопустимой частотой вращения. При большой скорости движения воды в обводных линиях могут появиться кавитационные явления, что уменьшает расход, проходящий по этим линиям.

К мерам защиты относится и сброс воды через специальные предохранительные клапаны или другие устройства (например, разрывные мембраны). При превышении давления клапаны, градуированные на определенное давление, открываются и давление понижается. Разрывные мембраны, изготовленные из тонкого листа металла, устанавливаются на отводе от основного трубопровода. Мембрана полностью перекрывает поперечное сечение отвода. При превышении определенного давления мембрана разрушается и часть жидкости выливается. После сброса жидкости предохранительные клапаны должны автоматически закрываться.

2. Впуск и защемление воздуха. Если возможно образование разрыва сплошности потока, эффективным средством борьбы с чрезмерным повышением давления в трубопроводе служит впуск воздуха в места образования разрыва спошности и последующее защемление воздуха. Для впуска и защемления воздуха служат специальные устройства — клапаны. Защемленный в местах разрыва сплошности потока воздуха не позволяет разошедшимся волнам воды при обратном движении соударяться, ибо такое соударение вызвало бы, как ранее указывалось, очень сильное повышение давления.

Воздух после гашения гидравлического удара должен быть удален из трубопровода, причем это удаление должно выполняться так, чтобы в трубопроводе не возникли нежелательные колебания давления.

3. Впуск воды в трубопровод осуществляется из бассейнов, которые отделены от защищаемых трубопроводов обратными клапанами.

При понижении давления в трубопроводе вследствие остановки насосов на соединительной линии (бассейн — трубопровод) открывается обратный клапан и необходимый объем воды из бассейна поступает в трубопровод. Когда давление начнет подниматься (но не до того большого значения, как это было без впуска воды), обратный клапан закроется и впуск воды в трубопровод прекратится.

Впуск и защемление воздуха и впуск воды целесообразно осуществлять во всех сечениях, где возможен разрыв сплошности потока, или по крайней мере в нескольких, наиболее опасных местах (см. § 14.6).

Воздушно-гидравлические колпаки применяются для гашения гидравлических ударов, возникающих в напорных трубопроводах. Размеры колпаков при установке их на напорных трубопроводах насосных станций определяются из условий пуска и остановки насосного агрегата.

14.8. Гидравлический таран

Особый интерес представляют неэнергоемкие механизмы, в частности для водоснабжения. Одним из таких механизмов является гидравлический таран, в котором процессы, происходящие при гидравлическом ударе, используются для подъема воды.

Гидравлический таран (рис. 14.17) состоит из ударного клапана *1*, нагнетательного клапана *2*, воздушного колпака *3*. Через питающую трубу *4* таран соединяется с бассейном *5*, через нагнетательный трубопровод *6* — с приемным резервуаром *7*.

Представим, что в начальный момент времени нагнетательный и ударный клапан закрыты, избыточное давление в воздушном колпаке $p_к = \rho g H_2$, а вода в питающей трубе *4* неподвижна. Для того чтобы таран начал автоматически работать, необходимо резко открыть ударный клапан *1*. Через клапан начнется истечение воды, скорость которой вследствие инерции воды, находящейся в питающей трубе *4*, будет постепенно увеличиваться от нуля в первоначальный момент времени до какого-то конечного значения v, стремясь в пределе к скорости установившегося движения v_0, соответствующей напору H_1 и гидравлическим сопротивлениям системы питательный трубопровод — ударный клапан.

С увеличением скорости истечения гидродинамическое давление, действующее снизу вверх на ударный клапан, будет увеличиваться. Когда сила

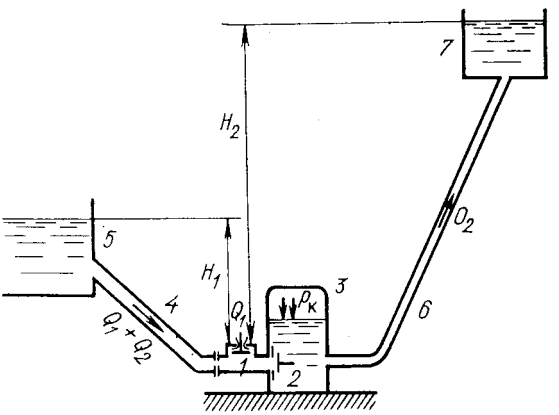


Рис. 14.17

гидродинамического давления превысит вес клапана, он резко закроется. Произойдет гидравлический удар, давление в трубе *4* перед нагнетательным клапаном повысится до некоторого значения $p > p_к$, нагнетательный клапан *2* откроется и вода под повышенным давлением начнет поступать в воздушный колпак *3*, сжимая в нем воздух. Из воздушного колпака вода по нагнетательному трубопроводу *6* поступит в приемный резервуар *7*. В момент закрытия ударного клапана *1* в питающей трубе *4* начнется волновой процесс, который приведет к уменьшению скорости и изменению давления в питающем трубопроводе *6*. В связи с этим спустя некоторое время после закрытия ударного клапана давление в питательном трубопроводе падает, нагнетательный клапан *2* закрывается, а ударный клапан *1* автоматически открывается: начинается новый цикл, протекающий так же, как и первый. Таран начинает работать автоматически, подавая воду определенными порциями в воздушный колпак, который сглаживает изменение скорости нагнетаемой воды, обеспечивая сравнительно равномерное движение (во времени) в нагнетательном трубопроводе. Таран непосредственно использует энергию падающей воды для подъема части этой воды на необходимую высоту.

Если через Q_1 обозначить расход воды, сбрасываемой через ударный клапан *1*, а через Q_2 — расход воды, поступающей в приемный резервуар, коэффициент полезного действия таранной установки выразится отношением

$$\eta = \frac{Q_2 H_2}{(Q_1 + Q_2) H_1}.$$

Такие простые установки, какими являются гидравлические тараны, могут обеспечивать подъем воды на высоту $H_2 = (2 \div 10)\ H_1$. При этом расход $Q_2 = (0{,}4 \div 0{,}07)\ Q_1$, а коэффициент полезного действия $\eta \approx (0{,}85 \div 0{,}2)$. Надо отметить, что при работе гидравлического тарана имеются большие непроизводительные потери воды.

14.9. Контрольные вопросы и примеры

1. Чем характеризуется одномерное, плоское и трехмерное (пространственное) неустановившееся движение?
2. Чем характерен гидравлический удар? Какие основные причины могут привести к возникновению гидравлического удара?
3. Какие допущения принимаются при рассмотрении гидравлического удара при мгновенном закрытии затвора в трубопроводе?
4. Как применяется теорема об изменении количества движения при выводе зависимости для определения повышения давления в трубопроводе при гидравлическом ударе и мгновенном закрытии затвора?
5. Как изменяется давление в различные моменты времени и в различных сечениях по длине трубопровода при мгновенном закрытии затвора, как в этом случае изменяются средние скорости по живому сечению?
6. Каковы особенности диаграммы изменения давлений в различных сечениях трубопровода по длине, если закрытие затвора произошло мгновенно?
7. От каких факторов зависит повышение давления при мгновенном закрытии затвора (при гидравлическом ударе)?
8. От каких факторов зависит скорость распространения волны гидравлического удара в трубопроводе? Запишите формулу для указанной скорости.
9. Зависит ли скорость распространения волны гидравлического удара, например, от солености воды?
10. Одинакова ли при прочих равных условиях скорость распространения ударной волны в трубопроводе, изготовленном из стали и из железобетона?
11. Как влияет на скорость распространения ударной волны наличие воздуха в воде (или в жидкости) и наличие твердых частиц в жидкости?

12. Как влияет время закрытия затвора трубопровода на процессы, происходящие при гидравлическом ударе? Будет ли повышение давления при постепенном закрытии затвора таким же, как при мгновенном?

13. Может ли повышение давления при немгновенном закрытии затвора быть бо́льшим, чем повышение давления при мгновенном закрытии затвора?

14. Что называется длительностью фазы гидравлического удара, прямым и непрямым гидравлическим ударом? Запишите формулу для повышения давления в трубопроводе для случая изменения скорости в трубопроводе по определенному закону изменения средней скорости во времени.

15. Какие изменения происходят в значении максимального повышения давления при непрямом гидравлическом ударе в зависимости от конкретного закона изменения средней скорости трубопровода?

16. Запишите дифференциальные уравнения неустановившегося движения вязкой сжимаемой жидкости в напорных трубопроводах. Как эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений для такого же движения, но несжимаемой жидкости?

17. Каковы основные особенности гидравлического удара, характеризующегося резким понижением давления?

18. Опишите основные черты некоторых способов борьбы с вредным воздействием гидравлических ударов в трубопроводе.

19. В чем преимущество и недостатки гидравлического тарана?

Пример 14.1. Определить скорость распространения волны гидравлического удара c и повышение давления Δp при мгновенном закрытии затвора в конце стального трубопровода, по которому подается пресная вода. Диаметр трубопровода $d = 0{,}6$ м (600 мм), толщина стенки $e = 7$ мм. Длина трубопровода $L = 1200$ мм, давление $p_0 = 2{,}5$ МПа. Скорость установившегося движения воды в трубопроводе (до гидравлического удара) $v_0 = 2$ м/с. Построить графики изменения давления в сечении трубопровода у затвора $x = 0$ и в сечении трубопровода на расстоянии от затвора $x = 0{,}3\,L$ (рис. 14.18).

Решение. Определяем скорость распространения волны гидравлического удара по формуле (14.13), предварительно определив по табл. 14.1, что в данном случае (вода—сталь) $E_0/E = 0{,}01$. Тогда

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \dfrac{600 \cdot 0{,}01}{7}}} = 1045{,}7 \text{ м/с}$$

и $\Delta p = \rho c v_0 = 1000 \cdot 1045{,}7 \cdot 2 = 2\,091\,400$ Па $= 2{,}09$ МПа. Длительность фазы гидравлического удара

$$\tau_0 = \frac{2L}{c} = \frac{2000}{1045{,}7} = 1{,}91 \text{ с};$$

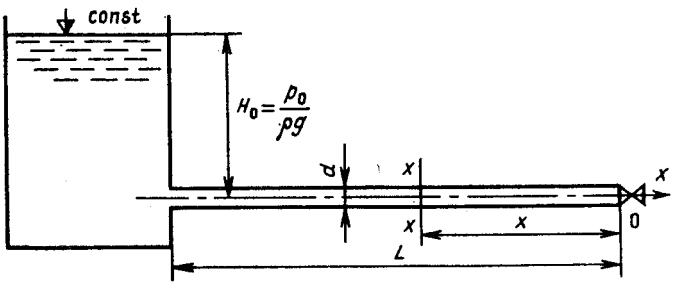


Рис. 14.18

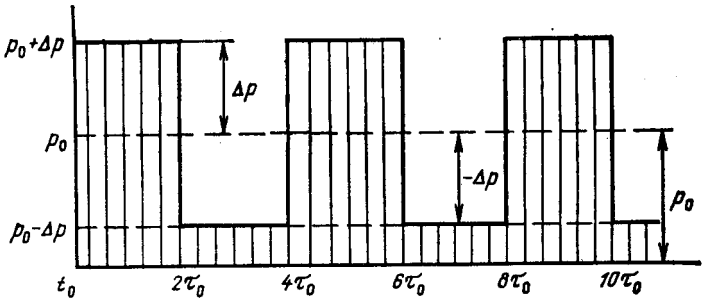


Рис. 14.19

период колебаний $T = 2\tau_0 = 3{,}82$ с. Графики изменения давления в сечении у затвора и на расстоянии $x = 0{,}3\ L$ от затвора показаны на рис. 14.19 и 14.20 соответственно.

Пример 14.2. Определить скорость распространения волны гидравлического удара и повышение давления в полиэтиленовом трубопроводе с пресной водой при тех же исходных данных, что и в примере 14.2 ($d = 600$ мм; $e = 7$ мм; $v_0 = 2$ м/с, мгновенное закрытие затвора).

Решение. Определяем по табл. 14.1, что отношение E_0/E для воды и полиэтилена равно 1—1,5. Принимаем значение этого отношения равным 1,25. Тогда

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \dfrac{600 \cdot 1{,}25}{7}}} = 13{,}18 \text{ м/с}$$

и $\Delta p = \rho c v_0 = 1000 \cdot 13{,}18 \cdot 2 = 26\,360$ Па $= 26{,}36$ кПа.

Очевидно, что скорость распространения волны гидравлического удара и повышение давления в результате гидравлического удара в полиэтиленовом трубопроводе оказались меньше, чем в стальном трубопроводе, примерно в 79 раз.

Отметим, что реальные значения отношения E_0/E для полиэтиленовых труб зависят от конкретного состава материала, из которого изготовлены трубы (легкий, плотный и т. п. полиэтилен).

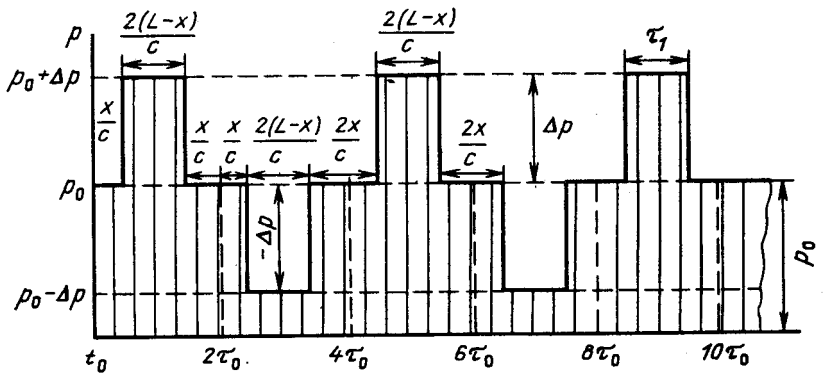


Рис. 14.20

Пример 14.3. Определить скорость распространения волны гидравлического удара и максимальное повышение давления в стальном трубопроводе диаметром $d = 1$ м (1000 мм) с толщиной стенки $e = 12$ мм при постепенном закрытии затвора за время: $T_{з1} = 3{,}5$ с; $T_{з2} = 7$ с. При закрытии затвора скорость изменяется по линейному закону. Длина трубопровода $L = 2500$ м, скорость при установившемся движении пресной воды в трубопроводе (до гидравлического удара) $v_0 = 1{,}7$ м/с; давление $p_0 = 2{,}7$ МПа.

Решение. Определяем скорость распространения гидравлического удара:

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \dfrac{1000 \cdot 0{,}01}{12}}} = 1052{,}4 \text{ м/с}.$$

Тогда длительность фазы гидравлического удара $\tau_0 = 2L/c = 5000/1052{,}4 = 4{,}75$ с.

Так как в первом случае $T_{з1} = 3{,}5$ с $< \tau_0 = 4{,}75$, то рассчитываем прямой гидравлический удар. В этом случае максимальное повышение давления достигает значения $\Delta p = \rho c v_0$ и равно $\Delta p_{max\ 1} = 1000 \cdot 1952{,}4 \cdot 1{,}7 = 1\,689\,080$ Па $\approx 1{,}79$ МПа. График изменения давления в сечении у затвора будет иметь вид, показанный на рис. 14.12.

При $T_{з2} = 7$ с $> \tau_0 = 4{,}75$ с максимальное повышение давления в этом случае будет наблюдаться в момент времени $t = \tau_0 = 2L/c$. Согласно (14.16) для непрямого гидравлического удара в указанный момент времени

$$\Delta p_{max2} = 2\rho L v_0 / T_з = 2 \cdot 1000 \cdot 2500 \cdot 1{,}7/7 = 1\,214\,285 \text{ Па} = 1{,}21 \text{ МПа}.$$

Уменьшение повышения давления при непрямом гидравлическом ударе по сравнению с прямым гидравлическим ударом при прочих равных условиях очевидно (см. рис. 14.14).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1.1. **Кинематическая вязкость ν хозяйственно-бытовых сточных вод, 10^{-3} м²/с**

t, °С	Количество взвешенных веществ, мг/л						
	менее 100	100	200	300	400	500	600
2	167	217	267	317	367	417	467
3	161	183	205	227	249	271	293
4	156	168	180	192	204	216	228
5	152	160	168	176	184	192	200
6	147	152	158	163	169	174	180
7	142	146	150	154	158	162	167
8	139	142	145	148	151	154	158
9	135	137	140	142	145	147	149
10	131	133	135	137	139	141	143
11	127	129	130	132	134	135	137
12	124	125	127	128	130	131	132
13	121	122	123	125	126	127	128
14	117	118	119	120	121	122	123
15	114	115	116	117	118	118	119
16	111	112	113	113	114	115	116
17	109	110	110	111	112	112	113
18	106	107	107	108	108	109	110
19	103	104	104	105	105	106	106
20	101	102	102	102	103	104	104
21	99	100	100	100	101	101	102
22	95	96	97	97	98	98	98
23	93	94	95	95	96	96	96
24	91	92	93	93	93	94	94
25	90	90	91	91	91	92	92

Таблица П.2.1. **Моменты инерции, координаты центра тяжести площадки и центра давления плоских фигур**

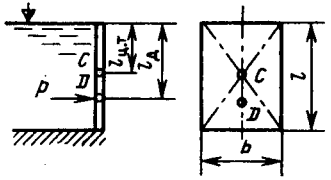
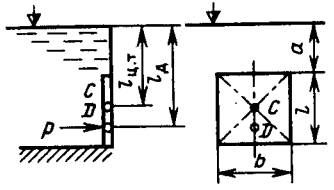
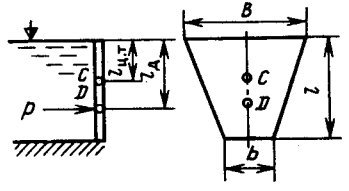
Схема	Площадь стенки ω	Центральный момент инерции площади стенки J_0	Координата центра тяжести площадки $l_{ц.т}$	Координата центра давления $i_{ц.т}$	Сила давления жидкости на стенку P
	bl	$\frac{bl^3}{12}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{2}{3}\,l$	$\rho g\,\frac{bl^2}{2}$
	bl	$\frac{bl^3}{12}$	$a+\frac{l}{2}$	$a+\frac{l}{3}\,\frac{3a+2l}{2a+l}$	$\rho g b l\left(a+\frac{l}{2}\right)$
	$(B+b)\,\frac{l}{2}$	$\frac{l^3}{36}\left(B+b+\frac{2bB}{B+b}\right)$	$\frac{1}{3}\,\frac{B+2b}{B+b}$	$\frac{l}{2}\,\frac{B+3b}{B+2b}$	$\rho g\,\frac{l^2}{6}\,(B+2b)$

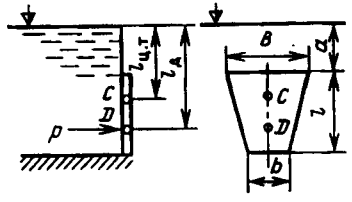
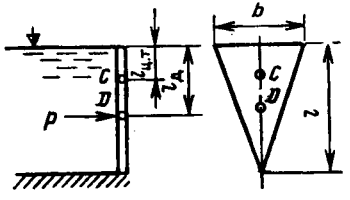
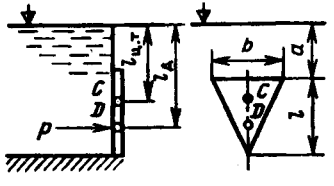
Схема	Площадь стенки ω	Центральный момент инерции площади стенки J_0	Координата центра тяжести площадки $l_{ц.т}$	Координата центра давления $l_{ц.т}$	Сила давления жидкости на стенку P
	$(B+b)\frac{1}{2}$	$\frac{l^3}{36}\left(B+b+\frac{2bB}{B+b}\right)$	$a+\frac{l}{3}\times\frac{B+2b}{B+b}$	$a+l\frac{2a(B+2b)+l(B+3b)}{6a(B+b)+2l(B+2b)}$	$\rho g\frac{al}{2}(B+b)+\rho g\frac{l^2}{6}(B+2b)$
	$\frac{bl}{2}$	$\frac{bl^3}{36}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{\rho gbl^2}{6}$
	$\frac{bl}{2}$	$\frac{bl^3}{36}$	$a+\frac{l}{3}$	$a+\frac{l}{2}\frac{2a+l}{3a+l}$	$\frac{\rho gbl}{3}\left(a+\frac{l}{3}\right)$

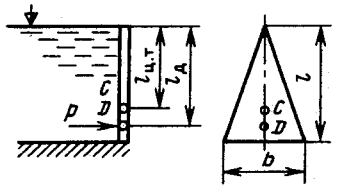
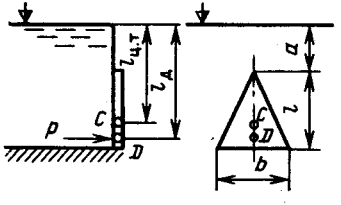
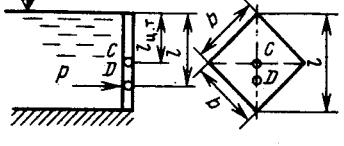
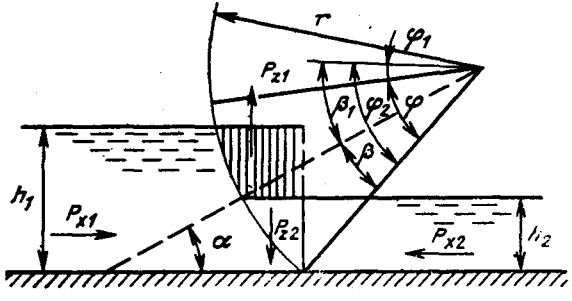
Схема	Площадь стенки ω	Центральный момент инерции площади стенки J_0	Координата центра тяжести площадки $l_{ц.т}$	Координата центра давления $l_{ц.т}$	Сила давления жидкости на стенку P
	$\frac{bl}{2}$	$\frac{bl^3}{36}$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{3}{4}l$	$\rho g\frac{bl^2}{3}$
	$\frac{bl}{2}$	$\frac{bl^3}{36}$	$a+\frac{2}{3}l$	$a+\frac{l}{2}\,\frac{4a+3l}{3a+2l}$	$\frac{\rho gbl}{2}\left(a+\frac{2}{3}l\right)$
	b^2	$\frac{b^4}{12}$	$\frac{l}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}b$	$\frac{7\sqrt{2}}{12}b$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho gb^3$

Таблица П.2.2. **К определению силы P_z для сегментного затвора**

Сегментный затвор	P_z
Ось вращения расположена выше уровня воды в ВБ 	$P_z = \frac{1}{2}\rho g r^2 b \left[\frac{\pi\varphi}{180^\circ} + 2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}\times\right.$ $\left.\times(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)\right]$

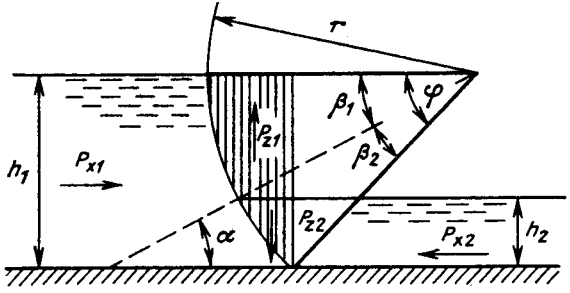
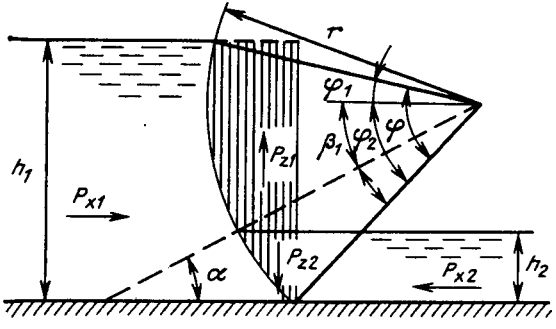
Сегментный затвор	P_z
Ось вращения расположена на отметке УВБ 	$P_z = \frac{1}{2}\,\rho g r^2 b \left[\frac{\pi\varphi}{180^\circ} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]$
Ось вращения расположена ниже отметки УВБ 	$P_z = \frac{1}{2}\,\rho g r^2 b \left[\frac{\pi\varphi}{180^\circ} - 2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}\times\right.$ $\left.\times\,(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)\right]$

Таблица П.8.1. **Абсолютная эквивалентная шероховатость $\Delta_э$ для стальных напорных водоводов**

Группа шероховатости	Характеристика поверхности, методы производства работ, условия эксплуатации	$\Delta_э$, мм
	А. Новые чистые	
1	Бесшовная (стыки отсутствуют), тщательное исполнение работы	0,015—0,04 / 0,025
2	С продольным сварным швом, тщательное исполнение работы	0,03—0,12 / 0,05
3	С поперечными сварными стыками, тщательное исполнение работы	0,08—0,17 / 0,12
	Б. Новые чистые с покрытием изнутри	
4	Покрытие битумом, выполнение в заводских условиях	0,014—0,018 / 0,016
5	То же со сварными поперечными стыками	0,2—0,6 / 0,4
	В. Старые, но чистые	
8	Незначительная коррозия или легкая инкрустация	0,1—0,3 / 0,2
9	Умеренная коррозия или легкие отложения	0,3—0,7 / 0,5
10	Значительная коррозия	0,8—1,5 / 1,0
11	Очищенные после сильного зарастания или ржавления	0,15—0,2 / 0,18
	Г. После нескольких лет эксплуатации	
12	Цельносварные, до 2 лет эксплуатации, без отложений	0,12—0,24 / 0,18
13	То же, до 20 лет эксплуатации, без отложений, наростов	0,6—0,5 / 2,8
14	При наличии железобактериальной коррозии (большие отложения, сильно заржавленная поверхность)	3,0—4,0 / 3,5

Группа шероховатости	Характеристика поверхности, методы производства работ, условия эксплуатации	$\Delta_э$, мм
15	Очень сильная коррозия и инкрустация (толщина отложений от 1,5 до 5 мм)	3,5—5,0 / 4,2
16	То же с толщиной отложений от 5 до 25 мм	6,0 и более
17	Покрытие изнутри битумом (кузбасслаком, каменноугольной смолой), срок эксплуатации до 3 лет	0,1—0,35 / 0,25

Примечание. В числителе дроби указаны пределы изменения $\Delta_э$ для данной группы шероховатости, в знаменателе — наиболее вероятное значение $\Delta_э$.

Таблица П.8.2. **Абсолютная эквивалентная шероховатость $\Delta_э$ для бетонных напорных водоводов и туннелей с бетонной облицовкой**

Группа шероховатости	Характеристика поверхности, методы производства работ, условия эксплуатации	$\Delta_э$, мм
	А. Поверхность водоводов без отделки (штукатурка, затирка и т. п.)	
1	Новые, с исключительно гладкой (полированной) поверхностью, выполненной с помощью стальной опалубки при первоклассном качестве работ (секции тщательно состыкованы, стыки хорошо загрунтованы и заглажены)	0,05—0,15 / 0,10
2	Бывшие в эксплуатации, с корродированной и волнистой поверхностью; формованные с помощью деревянной опалубки	1—4 / 2,5
3	Старые, плохо выполненные, не тщательно уложенные, поверхность заросшая, при наличии отложений песка, гравия, глинистых частиц	3,0—6,0 / 4,5
4	Очень старые, с сильно разрушенной и заросшей поверхностью в процессе длительной эксплуатации	5,0 и более
	Б. Поверхность водоводов с последующей отделкой (оштукатуренная, заглаженная и т. п.)	
5	Новые, с очень гладкой поверхностью, выполненной с помощью стальной или промасленной стальной опалубки при первоклассном качестве работ; отделочный слой тщательно сглажен вручную мастерками, карборундовым камнем; стыки загрунтованы и сглажены (без выступов)	0,1—0,2 / 0,15

Группа шероховатости	Характеристика поверхности, методы производства работ, условия эксплуатации	$\Delta_э$, мм
6	Новые или бывшие в эксплуатации, с гладкой поверхностью, а также монолитные (отлитые в стальной опалубке) или сборные трубы длиной секции по 4 м при хорошем качестве работ: отделочный слой — цементная поверхность, сглаженная вручную, стыки хорошие	0,15—0,35 / 0,25
7	Бывшие в эксплуатации, без отложений, с умеренно гладкой поверхностью, а также трубы монолитные, выполненные в стальной или деревянной опалубке с затиркой поверхности, стыки загрунтованы, но не сглажены	0,3—0,6 / 0,45
8	Заводского изготовления и монолитные (изготовленные на месте), бывшие в эксплуатации, с цементной штукатуркой, заглаженной деревянной теркой, стыки шероховатые	0,5—1,0 / 0,75
	В. Поверхность водоводов торкретированная или из набрызг-бетона	
9	Тщательно заглаженный торкрет или тщательно заглаженный набрызг-бетон по бетонной поверхности	0,5
10	Затертый щетками торкрет или затертый щетками набрызг-бетон по бетонной поверхности	2,3
11	Незаглаженный торкрет или незаглаженный набрызг-бетон по бетонной поверхности	3,0—6,0 / 5,0
12	Заглаженный торкрет или заглаженный набрызг-бетон по поверхности скалы	6,0—17,0 / 10,0

Примечание. В числителе дроби указаны пределы изменения $\Delta_э$ для данной группы шероховатости, в знаменателе — наиболее вероятное значение $\Delta_э$.

Таблица П.8.3. **Абсолютная эквивалентная шероховатость $\Delta_э$ для необлицованных туннелей**

Породы	Диаметр туннеля, м	$\Delta_э$, м
Гнейс	3—13,5	0,3—0,7
Гранит	3—9	0,2—0,7
Сланец	9—12	0,25—0,65
Кварц, кварциты	7—10	0,2—0,6
Осадочные породы	4—7	0,4
Нефритоносные породы	3—8	0,2

Таблица П.8.4. **Абсолютная эквивалентная шероховатость $\Delta_э$ для напорных туннелей в скальных грунтах (без обделки)**

Группа шероховатости	Методы производства работ, характеристика поверхности	$\Delta_э$, м
1	Туннели, высеченные гладким взрыванием в массиве со слабой трещиноватостью	0,1—0,14
2	Туннели, высеченные гладким взрыванием в массиве с выраженной трещиноватостью	0,13—0,5
3	Туннели, грубо высеченные, с весьма неровными поверхностями	0,5—1,5

Таблица П.8.5. **Эквивалентная абсолютная шероховатость $\Delta_э$ для канала с бетонной облицовкой**

Группа шероховатости	Характеристика поверхности, методы производства работ, условия эксплуатации	$\Delta_э$, мм
	А. Поверхность каналов без отделки (штукатурка, затирка и т. п.)	
1	Бетонирование очень тщательное в лабораторных условиях	0,02—0,3 / 0,15
2	Гладкая бетонная поверхность, выполненная очень тщательно с помощью хорошо строганной сплоченной деревянной опалубки, без выступов и впадин	0,2—2,0 / 1,0
3	Шероховатая бетонная поверхность, выполненная с помощью грубой деревянной опалубки, видны места стыков, впадин и отпечатки опалубки	2,0—15,0 / 6,0
4	Бетонные плиты заводского изготовления без затирки поверхности	8,0—20,0 / 12,0
5	Бетонные плиты заводского изготовления с гладкой поверхностью (или в хорошем состоянии после эксплуатации)	0,04—3,0 / 1,5
6	То же, но при плохом состоянии поверхности после эксплуатации	0,5—6,0 / 3,0
7	Бетонная облицовка в неблагоприятных условиях эксплуатации (со следами тины, при наличии коррозии, водорослей, мха, травы, отложений песка, камней, гравия и пр.)	1,0—30,0 / 10,0
8	Бетонирование по скале (поверхность сильно шероховатая, с глубокими выбоинами)	2,0—15,0 / 10,0
9	Бетонная поверхность, покрытая мхом	10,0—50,0 / 25,0

Группа шероховатости	Характеристика поверхности, методы производства работ, условия эксплуатации	$\Delta_э$, мм
	Б. Поверхность каналов с последующей отделкой (оштукатуренная, заглаженная и т. п.)	
10	Бетонная поверхность, тщательно оштукатуренная и затертая в лабораторных условиях	0,25—0,65 / 0,3
11	Цементная штукатурка толщиной до 10 см, поверхность ровная и затертая вручную, качество работ хорошее	0,3—1,5 / 0,8
12	Чистая цементная штукатурка, выполненная по шероховатой бетонной поверхности	1,0—2,5 / 2,0
13	Цементная штукатурка в неблагоприятных условиях эксплуатации (с отложениями песка, ила, гравия и пр.)	2,0—50,0 / 25,0
14	Бетонные плиты заводского изготовления с затиркой поверхности	0,8—2,8 / 1,4
	В. Каналы с торкретированной поверхностью	
15	Бетонная поверхность разравнивалась перед нанесением торкрета, поверхность которого также заглаживалась	0,6—3,0 / 1,5
16	Торкретированная поверхность не обрабатывалась, не шлифовалась, шероховатая и неровная	2,0—9,0 / 5,0
17	Торкретированная поверхность в неблагоприятных условиях эксплуатации (отложения ила, песка, водоросли и пр.)	2,0—17,0 / 9,0

Примечание. В числителе дроби указаны пределы изменения $\Delta_э$ для данной группы шероховатости; в знаменателе — наиболее вероятное значение $\Delta_э$.

Таблица П.8.6. **Коэффициенты шероховатости n по Н. Н. Павловскому**

Категория	Характеристика поверхности	n	$1/n$
I	Исключительно гладкие поверхности; поверхности, покрытые эмалью и глазурью	0,009	111,1
II	Весьма тщательно остроганные доски, хорошо пригнанные. Штукатурка из чистого цемента	0,01	100
III	Цементно-песчаная штукатурка (1/3 песка). Чистые (новые) гончарные, чугунные и железные трубы, хорошо уложенные и соединенные. Хорошо остроганные доски	0,011	90,9
IV	Нестроганые доски, хорошо пригнанные. Водопроводные трубы в нормальных условиях, без заметной инкрустации; весьма чистые водосточные трубы; весьма хорошая бетонировка	0,012	83,3

Категория	Характеристика поверхности	n	$1/n$
V	Тестовая кладка в лучших условиях, хорошая кирпичная кладка. Водосточные трубы в нормальных условиях; несколько загрязненные водопроводные трубы	0,013	76,9
VI	Загрязненные трубы (водопроводные и водосточные); бетонировка канала в средних условиях	0,014	71,4
VII	Средняя кирпичная кладка, облицовка из тесаного камня в средних условиях. Значительно загрязненные водостоки	0,015	66,7
VIII	Хорошая бутовая кладка; старая (расстроенная) кирпичная кладка; сравнительно грубая бетонировка. Гладкая, хорошо разработанная скала	0,017	58,8
IX	Каналы, покрытые толстым устойчивым илистым слоем; каналы в плотном лёссе и в плотном мелком гравии, затянутые сплошной илистой пленкой (в отличном состоянии)	0,018	55,6
X	Средняя (вполне удовлетворительная) бутовая кладка; булыжная мостовая. Каналы, чисто высеченные в скале. Каналы в лёссе, затянутые илистой пленкой (в нормальном состоянии)	0,02	50,0
XI	Каналы в плотной глине. Каналы в лёссе, гравии, земле, затянутые несплошной (местами прерываемой) илистой пленкой. Большие земляные каналы в условиях эксплуатации выше средних	0,0225	44,4
XII	Хорошая сухая кладка. Земляные каналы: большие — в средних, малые — в хороших условиях эксплуатации	0,025	40
XIII	Земляные каналы: большие — в условиях ниже средних, малые — в средних условиях эксплуатации	0,0275	36,4
XIV	Земляные каналы в сравнительно плохих условиях (например, местами с водорослями, булыжниками или гравием по дну; заметно заросшие травой; с местными обвалами откосов и пр.)	0,03	33,3
XV	Каналы в плохих условиях (с неправильным профилем; заметно засоренные камнями и водорослями и пр.)	0,035	28,6
XVI	Каналы в исключительно плохих условиях (значительные промоины и обвалы; заросли камыша; густые корни, крупные камни по руслу и пр.)	0,04 и большее	25 и меньшее

Таблица П.8.7. **Коэффициенты шероховатости n каналов в земляном русле**

Характеристика канала, грунт	Значения для каналов	
	оросительных	коллекторно-дренажных и осушительных
Расход воды свыше 25 м³/с:		
связный, песчаный	0,020	0,025
гравелисто-галечниковый	0,0225	0,0275
Расход воды от 1 до 25 м³/с:		
связный, песчаный	0,0225	0,030
гравелисто-галечниковый	0,025	0,0325
Расход воды менее 1 м³/с	0,025	0,035
Постоянная сеть периодического действия	0,0275	—
Оросительные каналы	0,030	—

Таблица П.8.8. **Коэффициенты шероховатости каналов в скале**

Характеристика поверхности ложа канала	n
Хорошо обработанная	0,2—0,025
Посредственно обработанная:	
без выступов	0,03—0,035
с выступами	0,04—0,045

Таблица П.8.9. **Коэффициенты шероховатости n креплений каналов**

Тип креплений	n
Бетонная облицовка с хорошо отделанной поверхностью	0,012—0,014
Бетонная облицовка с грубо отделанной поверхностью, плиты и блоки из пористого бетона	0,015—0,018
Железобетонные сборные плиты и лотки	0,013—0,015
Булыжная мостовая	0,02—0,025
Покрытие из асфальтобитумных материалов	0,013—0,016
Одерновка, залужение (в нормальных условиях эксплуатации)	0,030—0,035
Пригрузка (наброска) из гравия и щебня	0,025—0,030
Наброска из камня	0,030—0,035
Фашины, хворостяные канаты и плетневые стенки	0,028—0,034
Крепления из синтетических и стекловолокнистых материалов	0,012—0,017

Таблица П.8.10. **Коэффициенты шероховатости *n* обделок туннелей**

Характер обработки туннеля	Значения *n* при		
	обычном взрывании	контурном взрывании	комбинированном проходе
Без покрытия	0,035—0,04	0,025—0,03	0,015—0,017
С покрытием набрызг-бетоном	0,023	0,02	—
С покрытием выравнивающим слоем без заполнителя	—	0,017	—
То же с затиркой выравнивающего слоя	—	0,015	—

Таблица П.8.11. **Коэффициенты шероховатости *n* каналов с облицовкой**

Облицовка	*n*
Бетонная:	
хорошо отделанная	0,012—0,014
грубая	0,015—0,017
Сборные железобетонные лотки	0,012—0,015
Покрытие из асфальтобитумных материалов	0,013—0,016
Одернованное русло	0,03—0,035

Таблица П.8.12. **Коэффициенты шероховатости *n* для безнапорных каналов, выполненных в скальных грунтах (без облицовки)**

Группа шероховатости	Характеристика поверхности, методы производства работ	*n*
1	Каналы, высеченные гладким взрыванием в горизонтально залегающих пластах в массиве со слабой трещиноватостью	0,02—0,025
2	Каналы, высеченные гладким взрыванием в массиве с выраженной трещиноватостью	0,025—0,035
3	Каналы с весьма неровными стенками	0,040—0,045

Таблица П.8.13. **Коэффициенты шероховатости n проводящих каналов и регулируемых русл рек**

Характеристика русл	Значения n по периодам	
	Весеннее половодье и предпосевно-посевной	Летне-осенний паводок и межень
Русла, рассчитываемые на пропуск максимального расхода в грунтах:		
песчаных	0,025	0,028
глинистых	0,022	0,026
торфах	0,024	0,03
гравийно-галечниковых	0,027	0,028
Русла, рассчитываемые на пропуск максимального расхода $Q \geqslant 25$ м³/с в грунтах:		
песчаных	0,026	0,032
глинистых	0,024	0,029
торфах	0,027	0,033
гравийно-галечниковых	0,028	0,03

Приложение к гл. 9

Таблица П.9.1. **Коэффициенты местного сопротивления**

Устройство	A	$\zeta_{м.\,кв}$	Устройство	A	$\zeta_{м.\,кв}$
Пробочный кран	150	0,4	Тройник	150	0,3
Вентиль:			Задвижка полностью открытая:	75	0,15
обыкновенный	3000	6			
«Косва»	900	2,5	$n = 0{,}75$	350	0,2
угловой	400	0,8	$n = 0{,}5$	1300	2
шаровой клапан	5000	45	$n = 0{,}25$	3000	20
Угольник:			Диафрагма:		
90°	400	1,4	$n = 0{,}64$	70	1
135°	600	0,4	$n = 0{,}4$	120	7
Колено 90°	130	0,2	$n = 0{,}16$	500	70
Выход из трубы в бак	30	1	$n = 0{,}05$	3200	800
Вход из бака в трубу	30	0,5			

Таблица П.13.1. **Коэффициенты θ_1 и θ_2 для расчетов в переходной области сопротивления при различной средней скорости v**

Вид труб	Коэффициенты θ_1/θ_2 при v, м/с												
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3
Нормальные	0,91 / 1,2	0,93 / 1,15	0,95 / 1,115	0,96 / 1,085	0,97 / 1,06	0,985 / 1,03	1 / 1	1 / 1	1 / 1	1 / 1	1 / 1	1 / 1	1 / 1
Новые чугунные	0,81 / 2,51	0,84 / 1,42	0,86 / 1,36	0,87 / 1,32	0,89 / 1,28	0,91 / 1,22	0,92 / 1,18	0,93 / 1,15	0,94 / 1,12	0,95 / 1,1	0,96 / 1,08	0,98 / 1,05	0,99 / 1,03
Новые стальные	0,91 / 1,22	0,92 / 1,18	0,93 / 1,16	0,94 / 1,14	0,95 / 1,12	0,95 / 1,1	0,96 / 1,08	0,97 / 1,07	0,97 / 1,06	0,98 / 1,05	0,98 / 1,04	0,99 / 1,03	0,99 / 1,02

Таблица П.13.2. **Расходные характеристики для квадратичной области**

d, мм	ω, дц$^2 \cdot 10$	Нормальные трубы			Новые чугунные трубы			Новые стальные трубы		
		K, л/с	$K^2/1000$	$1000/K^2$	K, л/с	$K^2/1000$	$1000/K$	K, л/с	$K^2/1000$	$1000/K^2$
50	1,963	8,313	0,0691	14,472	9,947	0,098	10,111	10,1	0,102	9,804
75	4,418	24,77	0,6136	1,6297	29,27	0,8567	1,1672	29,7	0,8821	1,1337
100	7,854	53,61	2,874	0,347795	62,85	3,95	0,25316	63,73	4,061	0,24624
125	12,272	97,39	9,485	0,10543	113,5	12,882	0,7763	115,1	13,248	0,07548
150	17,671	158,4	25,091	0,03985	183,9	33,819	0,02957	186,3	34,708	0,02881
200	31,416	340,8	116,15	0,00861	393	154,45	0,00647	398	158,40	0,00631
250	49,087	616,4	379,7	0,00263	707,6	500,7	0,002	716,3	513,09	0,00195
300	70,686	999,3	998,6	0,001	1 143	1 306	$0{,}766 \cdot 10^{-3}$	1 157	1 339	$0{,}747 \cdot 10^{-3}$
350	96,212	1 503	2 259	$0{,}443 \cdot 10^{-3}$	1 715	2 941	$0{,}340 \cdot 10^{-3}$	1 735	3 007	$0{,}333 \cdot 10^{-3}$
400	125,664	2 140	4 580	$0{,}218 \cdot 10^{-3}$	2 435	5 929	$0{,}169 \cdot 10^{-3}$	2 463	6 066	$0{,}165 \cdot 10^{-3}$
450	159,043	2 920	8 526	$0{,}118 \cdot 10^{-3}$	3 316	10 996	$0{,}909 \cdot 10^{-4}$	3 354	11 249	$0{,}889 \cdot 10^{-4}$
500	196,350	3 857	14 876	$0{,}672 \cdot 10^{-4}$	4 374	19 132	$0{,}523 \cdot 10^{-4}$	4 423	19 563	$0{,}511 \cdot 10^{-4}$
600	282,743	6 239	38 925	$0{,}257 \cdot 10^{-4}$	7 053	49 745	$0{,}201 \cdot 10^{-4}$	7 131	50 851	$0{,}197 \cdot 10^{-4}$
700	384,845	9 362	87 647	$0{,}114 \cdot 10^{-4}$	10 560	111 514	$0{,}897 \cdot 10^{-5}$	10 674	113 934	$0{,}878 \cdot 10^{-5}$
800	502,655	13 301	156 917	$0{,}565 \cdot 10^{-5}$	14 973	224 191	$0{,}446 \cdot 10^{-5}$	15 132	228 977	$0{,}437 \cdot 10^{-5}$
900	636,173	18 129	328 661	$0{,}304 \cdot 10^{-5}$	20 373	415 059	$0{,}241 \cdot 10^{-5}$	20 587	423 825	$0{,}236 \cdot 10^{-5}$
1000	785,398	23 911	571 736	$0{,}175 \cdot 10^{-5}$	26 832	719 956	$0{,}139 \cdot 10^{-5}$	27 111	735 006	$0{,}136 \cdot 10^{-5}$
1100	950,334	30 709	943 043	$0{,}106 \cdot 10^{-5}$	34 416	1 184 461	$0{,}844 \cdot 10^{-6}$	34 769	1 208 883	$0{,}827 \cdot 10^{-6}$
1200	1130,976	38 601	1 490 037	$0{,}671 \cdot 10^{-6}$	43 211	1 867 191	$0{,}536 \cdot 10^{-6}$	43 650	1 905 323	$0{,}525 \cdot 10^{-6}$
1300	1327,326	47 604	2 266 140	$0{,}441 \cdot 10^{-6}$	53 232	2 883 646	$0{,}353 \cdot 10^{-6}$	53 769	2 891 105	$0{,}346 \cdot 10^{-6}$
1400	1539,384	57 807	2 341 649	$0{,}299 \cdot 10^{-6}$	64 581	4 100 705	$0{,}240 \cdot 10^{-6}$	62 226	4 254 431	$0{,}235 \cdot 10^{-6}$

Таблица П.13.3. **Значения удельных сопротивлений A' для асбестоцементных труб класса ВТ9, тип 1 (ГОСТ 539—80)**

Условный проход d, мм	Значения A' (при Q, м³/с)	Условный проход d, мм	Значения A' (при Q, м³/с)
100	187,7	300	0,9140
150	31,55	350	0,4342
200	6,898	400	0,2171
250	2,227	500	0,07138

Таблица П.13.4. **Значения внутренних диаметров $d_р$ асбестоцементных труб классов ВТ6, ВТ9, ВТ12 и ВТ15 (ГОСТ 539—80)**

Условный проход d, мм	Внутренний диаметр $d_р$, мм											
	ВТ6			ВТ9			ВТ12			ВТ15		
	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 1	Тип 2	Тип 3
100	104	—	—	100	—	—	96	—	—	—	—	—
150	146	—	—	141	—	—	135	—	—	—	—	—
200	195	200	196	189	196	189	181	188	181	—	180	176
250	244	248	—	235	242	—	228	234	—	—	226	—
300	289	292	289	279	286	279	270	276	270	—	267	256
350	334	337	—	322	329	—	312	317	—	—	307	—
400	381	385	—	368	377	—	356	363	—	—	352	—
500	473	476	—	456	466	—	441	450	—	—	436	—

Таблица П.13.5. **Поправочные коэффициенты k_1 к значениям A' для асбестоцементных труб**

Класс	Тип 1	Тип 2	Тип 3	
	d = 100—500 мм	d = 200—500 мм	d = 200 мм	d = 300 мм
ВТ6	0,83	—	—	—
ВТ9	1	0,87	0,79	1
ВТ12	1,20	1,06	0,92	1,19
ВТ15	—	1,26	1,54	1,56

Таблица П.13.6. **Значения поправочных коэффициентов k_2 при вычислении удельного сопротивления A для асбестоцементных труб**

v, м/с	k_1	v, м/с	k_1	v, м/с	k_1	v, м/с	k_1
0,2	1,208	0,85	1,025	2,1	0,905	3,8	0,85
0,25	1,257	0,9	1,016	2,2	0,9	4	0,846
0,3	1,217	1	1	2,3	0,985	4,2	0,843
0,35	1,185	1,1	0,986	2,4	0,891	4,4	0,84
0,4	1,158	1,2	0,974	2,5	0,887	4,6	0,836
0,45	1,115	1,3	0,963	2,6	0,883	4,8	0,834
0,5	1,135	1,4	0,953	2,7	0,88	5	0,831
0,55	1,098	1,5	0,944	2,8	0,876	5,5	0,825
0,6	1,082	1,6	0,936	2,9	0,873	6	0,820
0,65	1,069	1,7	0,928	3	0,87	6,5	0,815
0,7	1,056	1,8	0,922	3,2	0,864	7	0,811
0,75	1,045	1,9	0,916	3,4	0,859	7,5	0,808
0,8	1,034	2	0,91	3,6	0,855	7,9	0,806

Таблица П.13.7. **Значения удельных сопротивлений A' при $v = 1$ м/с для пластмассовых труб (ГОСТ 18599—83)**

Наружный диаметр, мм	Средний тип СЛ (для Q, м³/с)	Средний тип С (для Q, м³/с)	Тяжелый тип Т (для Q, м³/с)
10	—	—	453 600 000
12	—	—	100 900 000
16	—	—	121 200 000
20	—	—	2 655 000
25	—	—	757 100
32	—	—	204 800
40	—	—	62 290
50	—	—	19 720
63	—	—	5 929
75	—	—	2 390
90	—	—	926,8
110	—	—	323,9
125	—	—	166,7
140	—	—	91,62
160	—	—	45,91
180	—	—	24,76
200	—	—	14,26
225	—	—	7,715
250	—	—	4,454
280	—	—	2,459
315	—	0,8761	—
355	—	0,4662	—
400	—	0,2502	—
450	—	0,1351	—
500	0,06322	—	—
560	0,03495	—	—
630	0,01889	—	—

Примечание. При определении скорости $v = Q/\omega$ значение внутреннего диаметра d_p для пластмассовых труб следует принять по ГОСТ 18599—83.

Таблица П.13.8. **Значения поправочных коэффициентов k_3 при вычислении удельного сопротивления A' для пластмассовых труб**

v, м/с	k_3	v, м/с	k_3	v, м/с	k_3
0,2	1,439	0,8	1,052	1,9	0,865
0,25	1,368	0,85	1,043	2	0,855
0,3	1,313	0,9	1,024	2,1	0,846
0,35	1,268	1	1	2,2	0,837
0,4	1,23	1,1	0,991	2,3	0,828
0,45	1,198	1,2	0,96	2,4	0,821
0,5	1,17	1,3	0,943	2,5	0,813
0,55	1,145	1,4	0,926	2,6	0,806
0,6	1,123	1,5	0,912	2,7	0,799
0,65	1,102	1,6	0,899	2,8	0,792
0,7	1,084	1,7	0,887	2,9	0,786
0,75	1,067	1,8	0,876	3	0,780

Таблица П.13.9. **Значения удельных сопротивлений A' при $v = 1$ м/с для серийных виброгидропрессованных железобетонных труб**

Диаметр труб d_p, мм	500	600	800	1000
A' (для Q в м³/с)	0,06391	0,02481	0,005575	0,001751

Продолжение табл. П.13.9

Диаметр труб d_p, мм	1200	1400	1600
A' (для Q в м³/с)	0,0006797	0,0003054	0,0001527

Таблица П.13.10. **Значения поправочных коэффициентов k_4 при вычислении удельного сопротивления A' для железобетонных труб**

v, м/с	k_4	v, м/с	k_4	v, м/с	k_4
0,2	1,273	0,8	1,034	1,9	0,908
0,25	1,231	0,85	1,024	2	0,901
0,3	1,198	0,9	1,016	2,1	0,895
0,35	1,17	1	1	2,2	0,888
0,4	1,147	1,1	0,986	2,3	0,883
0,45	1,127	1,2	0,973	2,4	0,877
0,5	1,11	1,3	0,96	2,5	0,871
0,55	1,094	1,4	0,95	2,6	0,866
0,6	1,08	1,5	0,94	2,7	0,861
0,65	1,066	1,6	0,932	2,8	0,857
0,7	1,055	1,7	0,924	2,9	0,852
0,75	1,044	1,8	0,916	3	0,847

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5

Глава 1. **Жидкости и их физические свойства** 10

1.1. Жидкости. Гипотеза сплошности. Плотность жидкости 10
1.2. Силы, действующие в покоящейся или движущейся жидкости 12
1.3. Свойства жидкости 13
1.4. Особые свойства воды 22
1.5. Контрольные вопросы и примеры 24

Глава 2. **Гидростатика** 26

2.1. Напряженное состояние покоящейся жидкости. Гидростатическое давление 26
2.2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости 28
2.3. Поверхности равного давления 30
2.4. Равновесие однородной несжимаемой жидкости относительно Земли 31
2.5. Геометрическая интерпретация основного уравнения гидростатики 35
2.6. Относительный покой (равновесие жидкости в движущемся сосуде) 36
2.7. Силы давления покоящейся жидкости на горизонтальные и наклонные плоские площадки (стенки) 40
2.8. Силы давления покоящейся жидкости на цилиндрические стенки 44
2.9. Закон Архимеда. Плавание тел 49
2.10. Условия статической остойчивости плавающего тела 51
2.11. Контрольные вопросы и примеры 55

Глава 3. **Кинематика жидкости** 62

3.1. Способы описания движения жидкости 62
3.2. Движение жидкой частицы. Понятие о вихревом и потенциальном движении 67
3.3. Ускорение жидкой частицы 73
3.4. Уравнение неразрывности жидкости 73
3.5. Потоки жидкости 76
3.6. Контрольные вопросы и примеры 80

Глава 4. **Динамика невязкой жидкости** 82

4.1. Напряженное состояние движущейся невязкой жидкости . . . 82
4.2. Дифференциальные уравнения движения невязкой жидкости (уравнения Эйлера) 83
4.3. Уравнения движения невязкой жидкости в форме Громеки . . 86
4.4. Уравнения Громеки при действии массовых сил, имеющих потенциал 86
4.5. Уравнение Бернулли для установившегося движения невязкой несжимаемой жидкости при действии массовых сил, имеющих потенциал 87
4.6. Уравнение Бернулли для частных случаев 90

4.7. Энергетическая интерпретация уравнения Бернулли для установившегося движения . . . 92
4.8. Контрольные вопросы . . . 94

Глава 5. **Динамика вязкой жидкости** . . . 95
5.1. Напряжения в движущейся вязкой жидкости . . . 95
5.2. Уравнения движения вязкой жидкости в напряжениях . . . 96
5.3. Соотношения между напряжениями и скоростями деформаций в движущейся вязкой жидкости . . . 98
5.4. Уравнения Навье—Стокса . . . 100
5.5. Уравнение Бернулли для элементарной струйки (для линии тока) вязкой жидкости при установившемся движении . . . 102
5.6. Уравнение Бернулли для потока при установившемся плавно изменяющемся движении вязкой жидкости . . . 103
5.7. Уравнение Бернулли для неустановившегося движения вязкой жидкости . . . 110
5.8. Контрольные вопросы и примеры . . . 114

Глава 6. **Режимы движения жидкости. Уравнения Рейнольдса** . . . 119
6.1. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Число Рейнольдса и его критическое значение . . . 119
6.2. Турбулентные потоки. Осредненные скорости и напряжения. Пульсационные составляющие . . . 123
6.3. Двухслойная модель турбулентного потока . . . 126
6.4. Уравнения Рейнольдса . . . 127
6.5. Различные теории турбулентности . . . 131
6.6. Контрольные вопросы и примеры . . . 135

Глава 7. **Потери напора (удельной энергии)** . . . 136
7.1. Классификация потерь напора . . . 136
7.2. Зависимость потерь напора от параметров потока . . . 142
7.3. Общая формула коэффициента сопротивлений (потерь напора) по длине при равномерном движении . . . 146
7.4. Средняя скорость и расход потока при равномерном движении жидкости . . . 148
7.5. Касательные напряжения и их распределение при равномерном движении . . . 149
7.6. Контрольные вопросы и примеры . . . 151

Глава 8. **Потери напора при равномерном движении жидкости** . . . 152
А. Ламинарный режим движения . . . 152
8.1. Распределение местных скоростей. Расход. Средняя скорость 152
8.2. Коэффициент Дарси при ламинарном напорном движении в трубе . . . 156
8.3. Линии тока и вихревые линии при ламинарном движении в круглой трубе . . . 158
Б. Турбулентный режим движения . . . 159
8.4. Логарифмический закон распределения осредненных скоростей в турбулентном потоке . . . 159
8.5. Связь между местной, средней и максимальной скоростями в трубах . . . 161
8.6. Гидравлически гладкие и шероховатые трубы (русла). Толщина вязкого подслоя . . . 164
8.7. Экспериментальное изучение коэффициента Дарси . . . 168
8.8. Распределение осредненных скоростей и коэффициенты Дарси в гидравлически гладких трубах . . . 170
8.9. Распределение осредненных скоростей и коэффициент Дарси в гидравлически шероховатых трубах. Переходная область 172
8.10. Коэффициенты Дарси для труб с естественной технической шероховатостью . . . 176

8.11. Коэффициенты Дарси для некоторых видов труб, применяемых в гидромелиорации . . . 178
8.12. Влияние формы сечения трубопровода на коэффициенты Дарси 180
8.13. Влияние условий эксплуатации трубопровода на гидравлические сопротивления . . . 181
8.14. Способы снижения гидравлических сопротивлений . . . 181
8.15. Формулы для коэффициента Шези в квадратичной области сопротивления . . . 182
8.16. Контрольные вопросы и примеры . . . 184

Глава 9. **Потери напора при неравномерном движении жидкости** . . 188
9.1. Общие сведения . . . 188
9.2. Потери напора на начальных участках . . . 190
9.3. Местные потери напора . . . 191
9.4. Коэффициент сопротивления системы . . . 202
9.5. Контрольные вопросы и примеры . . . 203

Глава 10. **Истечение жидкости при постоянном напоре** . . . 212
10.1. Истечение через малое незатопленное отверстие с острой кромкой . . . 212
10.2. Коэффициенты сжатия, скорости и расхода при истечении через незатопленное малое отверстие . . . 217
10.3. Экспериментальное определение коэффициентов расхода, скорости и сжатия для круглого малого отверстия с острой кромкой . . . 220
10.4. Истечение через большое отверстие . . . 222
10.5. Истечение через малое затопленное отверстие с острой кромкой . . . 224
10.6. Истечение через незатопленные короткие трубки (насадки) . 225
10.7. Вакуум во внешнем цилиндрическом насадке . . . 229
10.8. Истечение через внешний затопленный цилиндрический насадок . . . 230
10.9. Истечение через внутренний цилиндрический насадок . . . 232
10.10. Истечение через нецилиндрические насадки . . . 232
10.11. Сравнение гидравлических характеристик отверстий и насадков . . . 234
10.12. Влияние скорости потока в трубе или канале на коэффициенты расхода отверстий и насадков в стенках . . . 235
10.13. Коэффициент расхода системы . . . 236
10.14. Контрольные вопросы и примеры . . . 237

Глава 11. **Истечение жидкости при переменном напоре** . . . 243
11.1. Общая характеристика явления . . . 243
11.2. Истечение при переменном напоре и постоянном притоке . . 244
11.3. Истечение из призматического резервуара через незатопленное и затопленное отверстия при отсутствии притока . . . 249
11.4. Истечение при изменении уровней в обоих резервуарах . . . 251
11.5. Контрольные вопросы и примеры . . . 253

Глава 12. **Гидравлические струи** . . . 256
12.1. Классификация струй . . . 256
12.2. Затопленные струи . . . 256
12.3. Незатопленные струи . . . 262
12.4. Динамические свойства струи . . . 268
12.5. Контрольные вопросы и примеры . . . 271

Глава 13. **Гидравлические расчеты трубопроводов при установившемся напорном движении жидкости** . . . 272
13.1. Расчет простых трубопроводов . . . 272
13.2. Расчет длинного трубопровода постоянного диаметра . . . 273

13.3. Расчет трубопровода из последовательно соединенных труб 277
13.4. Расчет параллельно соединенных труб 278
13.5. Расчет трубопровода с непрерывным изменением расхода по длине 280
13.6. Расчет подводящего (всасывающего) трубопровода центробежного насоса 282
13.7. Расчет экономически наивыгоднейшего диаметра нагнетательного трубопровода 283
13.8. Расчет распределительных водопроводных линий 287
13.9. Основы гидравлического расчета подачи воды из двух резервуаров 293
13.10. Контрольные вопросы и примеры 295

Глава 14. **Неустановившееся движение жидкости в трубопроводах** 297

14.1. Гидравлический удар как неустановившееся напорное движение упругой жидкости в упругих трубопроводах 297
14.2. Гидравлический удар при мгновенном закрытии затвора . . 298
14.3. Скорость распространения волны гидравлического удара . . 306
14.4. Гидравлический удар при постепенном закрытии затвора . . 309
14.5. Дифференциальные уравнения неустановившегося движения вязкой сжимаемой жидкости в напорных трубопроводах . . . 312
14.6. Гидравлический удар при резком понижении давления (с разрывом сплошности потока) 317
14.7. Защита от воздействия гидравлических ударов 319
14.8. Гидравлический таран 320
14.9. Контрольные вопросы и примеры 321

Приложения 325

Учебное издание

Штеренлихт Давид Вениаминович

ГИДРАВЛИКА

Редактор издательства **Э. Н. Полякова**
Художественные редакторы **Б. Н. Тумин, Г. И. Панфилова**
Технический редактор **Г. В. Преображенская**
Корректор **Л. С. Тимохова**

ИБ № 3141

Сдано в набор 28.08.90. Подписано в печать 05.03.91. Формат 60×88$^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,56. Усл. кр.-отт. 21,56. Уч.-изд. л. 22,94. Тираж 8000 экз. Заказ № 1481. Цена 3 р.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10

Ленинградская типография № 4 Государственного комитета СССР по печати, 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.

Уважаемые читатели!

Энергоатомиздат выпустит в свет в 1991 году следующие учебники для студентов вузов:

Губин М. Ф. Электрическое оборудование ГЭС, ГАЭС и крупных насосных станций. — 16 л.

Описываются электрическое оборудование ГЭС, ГАЭС и крупных насосных станций, его выбор, определение размеров, конструктивные особенности, размещение оборудования в зданиях станций, а также на открытых распределительных устройствах. Даются рекомендации по выбору главных схем электрических соединений, собственных нужд, освещаются вопросы эксплуатации электрического оборудования, приводятся данные о новых типах оборудования.

Для студентов вузов гидроэнергетических и гидротехнических специальностей.

Высоцкий Л. И., Шеренков И. А. Использование ЭВМ в курсах гидравлики. — 13 л.

Предлагаются методы использования ЭВМ на разных стадиях изучения гидравлики: изучение материала, контроль знаний, выполнение расчетно-графических работ, обработка опытных данных, выполнение УИРС, оптимизация решений. Содержатся указания по использованию ЭВМ при решении основных задач по гидравлическому расчету напорных систем, открытых потоков, водопропускных сооружений и фильтрации.

Для студентов вузов гидротехнических, гидромелиоративных и дорожно-транспортных специальностей.