



Лекция 10. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Вопросы:

10.1. Коррелятивный способ. Условные уравнения

10.1.1 Суть уравнивания. Коррелятивный способ.

10.1.2 Сущность условных уравнений.

10.1.3 Условные уравнения фигур, дирекционных углов, горизонтов

10.1.4 Полюсные условные уравнения

10.1.5 Базисные условные уравнения.

10.1.6 Условные уравнения полигонометрии

10.1.7 Весовая функция.

10.2. Уравнивание коррелятивным способом

10.2.1 Матричный вид системы условных уравнений.

10.2.2 Допустимость свободных членов условных уравнений

10.2.3 Алгоритм коррелятивного способа уравнивания

10.2.4 Решение системы уравнений по схеме Гаусса.

10.2.5 Дисперсия функции уравниваемых величин

10.3. Параметрический способ уравнивания

10.3.1 Суть параметрического способа.

10.3.2 Параметрические уравнения поправок сторон

10.3.3 Параметрические уравнения поправок и направлений.

10.3.4 Уравнения поправок нивелирных ходов

10.3.5 Уравнения поправок в матричном виде.

10.3.6 Алгоритм уравнивания параметрическим способом

10.3.7 Метод жордановых исключений.

Литература

1. Юнусов, А.Г. Геодезия: учебное пособие для вузов. / А.Г. Юнусов, А.Б. Беликов, В.Н. Баранов, Ю.Ю. Каширкин. – М.: Академический проект, 2011. 409 с.
2. Куштин, И.Ф. Геодезия: учебно-практическое пособие. / И. Ф. Куштин, В.И. Куштин. – Ростов н/Д. Феникс, 2009. – 909 с.
3. Неумывакин, Ю.К., Практикум по геодезии / Ю.К.Неумывакин, А.С.Смирнов. – М.: Недра, 1995.

Вопрос 10.1. Коррелятивный способ. Условные уравнения

Вопрос 10.1.1. Суть уравнивания. Коррелятивный способ.

Избыточные измерения приводят к многозначности решений. Если для вычисления одной и той же величины использовать разные измеренные величины, то ввиду погрешностей измерений получим разные результаты.

Чтобы ликвидировать многозначность решений и привести результаты измерений в соответствие с теорией в измеренные величины вводятся поправки. Исправление измеренных величин называется уравниванием.

Если вместо истинных значений принять измеренные, то условия нарушатся и будут иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= W_1, \\ \varphi_2(X_1, X_2, \dots, X_n) &= W_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \varphi_r(X_1, X_2, \dots, X_n) &= W_r,\end{aligned}$$

где W_i – свободный член условного уравнения i .

Для их выполнения в измеренные величины x необходимо ввести поправки v . Тогда условные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \varphi_n(x_1 + v_1, x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) &= 0,\end{aligned}$$

а поправки к измерениям необходимо подобрать такими, чтобы удовлетворялись уравнения и выполнялись названные выше статистические свойства оценок определяемых величин.

Вопрос 10.1.3. Условные уравнения фигур, дирекционных углов, горизонтов.

При построении геодезических сетей в целях контроля и повышения точности кроме необходимых измеряют избыточные величины. Например, в треугольниках измеряют все три угла, хотя для их решения необходимо только два.

Геодезические сети, имеющие только необходимые исходные данные, называются свободными. Если сеть содержит избыточные исходные данные, то она несвободная. Каждое избыточное измерение и избыточное исходное данное позволяют записать математическое соотношение между измеренными величинами, т.е. условное уравнение.

Например при создании триангуляции возникают условия фигур, горизонтов, сумм, полюсов, сторон, дирекционных углов и координат.

1) *Условие фигур*, заключается в том, что в любой замкнутой фигуре сумма уравненных углов должна быть $180^0(n-2)$.

Обозначим измеренные углы арабскими цифрами, поправки к ним – цифрами в скобках, уравненные значения углов – цифрами с чертой. Тогда условие фигуры треугольника АВО (рис. 26.1) запишется так

$$\bar{1} + \bar{2} + \bar{3} = 180^0. \tag{10.4}$$

Учитывая, что $\bar{1} = 1 + (1)$ и т.д., получим

$$1 + (1) + 2 + (2) + 3 + (3) - 180^0 = 0.$$

Обозначим

$$1 + 2 + 3 - 180^0 = w. \quad (10.5)$$

Тогда

$$(1) + (2) + (3) + w = 0. \quad (10.6)$$

Полученное уравнение называется условным уравнением поправок. Здесь w – свободный член (невязка).

2) *Условие горизонта* заключается в том, что сумма уравненных углов, замыкающих горизонт на пункте, должна равняться 360^0 .

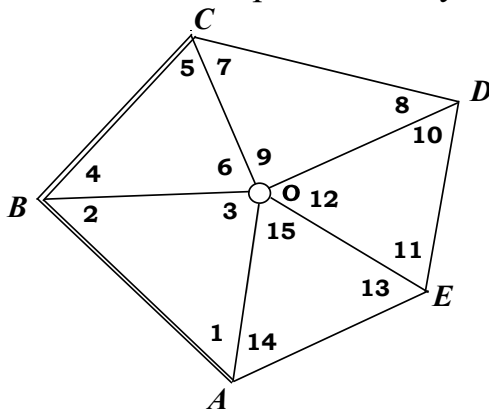


Рис. 10.1.

Применительно к рис. 10.1 имеем

$$\bar{3} + \bar{6} + \bar{9} + \bar{12} + \bar{15} = 360^0. \quad (10.7)$$

Выразив уравненные углы через измеренные и поправки к ним, получим условное уравнение поправок

$$(3) + (6) + (9) + (12) + (15) + w_G = 0, \quad (10.8)$$

где $w_G = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 - 360^0$ – свободный член (невязка).

3) *Условие дирекционных углов* заключается в том, что дирекционный угол одной исходной стороны, вычисленный по дирекционному углу другой исходной стороны и уравненным углам должен быть равен известному его значению.

Для сети (рис. 10.2) условие записывается так

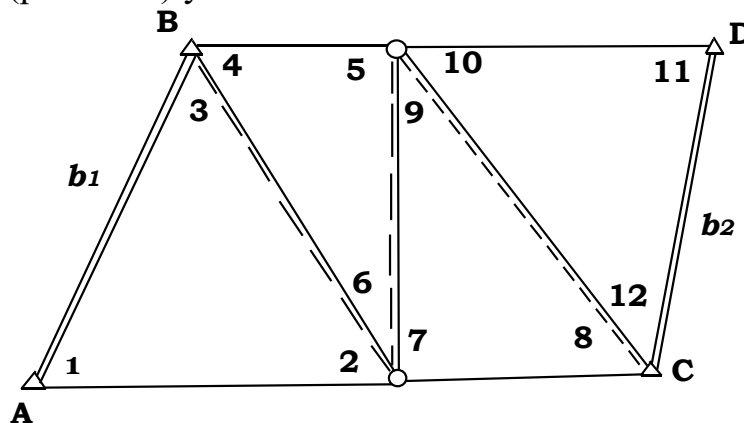


Рис. 10.2.

$$\alpha_{CD} = \alpha_{AB} + 180^\circ - \bar{3} + \bar{6} - 180^\circ + 180^\circ - \bar{9} + \bar{12} - 180^\circ.$$

Заменим уравненные углы измеренными с поправками

$$\alpha_{AB} - [3+(3)] + [6+(6)] - [9+(9)] + [12+(12)] - \alpha_{CD} = 0.$$

Обозначим

$$w_\alpha = \alpha_{AB} - 3 + 6 - 9 + 12 - \alpha_{CD}. \quad (10.9)$$

Тогда условное уравнение поправок примет вид:

$$-(3) + (6) - (9) + (12) + w_\alpha = 0. \quad (10.10)$$

Частным случаем условия дирекционных углов является условие сумм.

4) *Условие сумм* заключается в том, что сумма, уравненных углов, входящих в исходный угол, должна равняться его значению. Условие возникает при построении типовой фигуры «вставка в угол».

Условие сумм для рис. 26.1 запишется так

$$\bar{2} + \bar{4} = \angle B. \quad (10.11)$$

Условное уравнение поправок будет иметь вид

$$(2)+(4) + w_S = 0, \quad (10.12)$$

где

$$w_S = 2+4 - \angle B. \quad (10.13)$$

Условие сумм можно рассматривать и как условие дирекционных углов, так как угол B можно выразить через исходные дирекционные углы:

$$\angle B = \alpha_{BA} - \alpha_{BC}. \quad (10.14)$$

Вопрос 10.1.4. Полюсные условные уравнения.

Полюсное условие заключается в том, что длина одной и той же стороны, вычисленная двумя независимыми путями по уравненным углам должна получить в обоих случаях одинаковое значение.

Возьмем в качестве исходной сторону OA и вычислим дважды сторону OD , решая треугольники по часовой стрелке и против часовой стрелки. В результате получим

$$OD = \frac{OA \sin \bar{1} \sin \bar{4} \sin \bar{7}}{\sin \bar{2} \sin \bar{5} \sin \bar{8}}, \quad \text{a)}$$

$$OD = \frac{OA \sin \bar{1} \bar{4} \sin \bar{1} \bar{1}}{\sin \bar{1} \bar{3} \sin \bar{1} \bar{0}}. \quad \text{б)}$$

Разделив а) на б), получим условие полюса

$$\frac{\sin \bar{1} \sin \bar{4} \sin \bar{7} \sin \bar{1} \bar{0} \sin \bar{1} \bar{3}}{\sin \bar{2} \sin \bar{5} \sin \bar{8} \sin \bar{1} \bar{1} \sin \bar{1} \bar{4}} = 1. \quad (10.15)$$

Равенство (10.10) можно получить, решая треугольники по ходу часовой стрелки, начиная от стороны OA и кончая стороной OA .

Если отношение синусов углов заменить отношением противоположных им сторон, получим очевидное равенство

$$\frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OD}{OC} \cdot \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OA}{OE} = 1.$$

Все стороны имеют общую точку O , называемую полюсом.

Для перехода к условным уравнениям поправок в уравнении (10.15) необходимо заменить уравненные углы измеренными с поправками и привести его к линейному виду, разложив в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми степенями поправок. В результате получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 4}{\sin 5} \cdot \frac{\sin 7}{\sin 8} \cdot \frac{\sin 10}{\sin 11} \cdot \frac{\sin 13}{\sin 14} - 1 \right) + \\ & + \frac{\cos 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 4}{\sin 5} \cdot \frac{\sin 7}{\sin 8} \cdot \frac{\sin 10}{\sin 11} \cdot \frac{\sin 13}{\sin 14} \cdot \frac{(1)}{\rho} + \dots - \\ & - \frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 4}{\sin 5} \cdot \frac{\sin 7}{\sin 8} \cdot \frac{\sin 10}{\sin 11} \cdot \frac{\sin 13}{\sin^2 14} \cdot \frac{(14)}{\rho} = 0. \end{aligned}$$

Если второе слагаемое умножить и разделить на $\sin 1$, то его с достаточной точностью можно заменить значением $ctg 1 \frac{(1)}{\rho}$. аналогично можно преобразовать и другие слагаемые.

Умножим полученное выражение на ρ и введем следующие обозначения $ctg i = \delta_i$,

$$\left(\frac{\sin 1}{\sin 2} \cdot \frac{\sin 4}{\sin 5} \cdot \frac{\sin 7}{\sin 8} \cdot \frac{\sin 10}{\sin 11} \cdot \frac{\sin 13}{\sin 14} - 1 \right) \rho = w_{II}.$$

Тогда полюсное условное уравнение поправок в угловой мере будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \delta_1(1) + \delta_4(4) + \delta_7(7) + \delta_{10}(10) + \delta_{13}(13) - \\ & - \delta_2(2) - \delta_5(5) - \delta_8(8) - \delta_{11}(11) - \delta_{13}(14) + w_{II} = 0. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Если условиться обозначать связующие углы буквами A и B , как показано на рис. 10.3, то условие полюса можно записать короче:

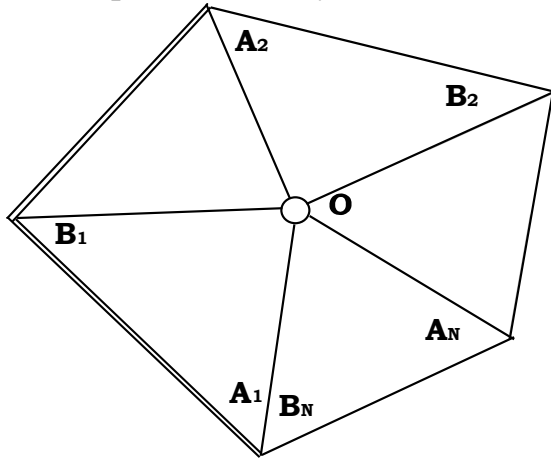


Рис. 10.3.

$$\frac{\prod \sin \bar{A}}{\prod \sin \bar{B}} = 1. \quad (10.17)$$

Условное уравнение поправок

$$\sum_1^n \delta_A(A) - \sum_1^n \delta_B(B) + w_{II} = 0, \quad (10.18)$$

где $w_{II} = \left(\frac{\prod \sin \bar{A}}{\prod \sin \bar{B}} - 1 \right) \rho$.

Вопрос 10.1.5. Базисные условные уравнения

Условие сторон (базисов) заключается в том, что длина одной исходной стороны, вычисленная по другой исходной стороне и уравненным углам должна быть равна известному ее значению.

Для данной цепи треугольников, заключенной между исходными сторонами b_1 и b_2 можно записать (рис 10.2)

$$b_2 = b_1 \frac{\sin \bar{1} \sin \bar{4} \sin \bar{7} \sin \bar{1} \bar{0}}{\sin \bar{2} \sin \bar{5} \sin \bar{8} \sin \bar{1} \bar{1}},$$

или в другом виде

$$\frac{b_1 \sin \bar{1} \sin \bar{4} \sin \bar{7} \sin \bar{1} \bar{0}}{b_2 \sin \bar{2} \sin \bar{5} \sin \bar{8} \sin \bar{1} \bar{1}} = 1. \quad (10.19)$$

Это равенство и будет выражать условие сторон. Оно аналогично (10.15). Для перехода к условному уравнению поправок необходимо поступить так, как в предыдущем случае. В результате получим

$$\delta_1(1) + \delta_4(4) + \delta_7(7) + \delta_{10}(10) - \delta_2(2) - \delta_5(5) - \delta_8(8) - \delta_{11}(11) + w_B = 0, \quad (10.20)$$

где

$$w_B = \left(\frac{b_1 \sin 1 \sin 4 \sin 7 \sin 10}{b_2 \sin 2 \sin 5 \sin 8 \sin 11} - 1 \right) \rho. \quad (10.21)$$

Если связующие углы числителя обозначить через A , а в знаменателе через B , то выражения (10.19), (10.20) и (10.21) можно записать короче:

$$\frac{b_1 \Pi \sin \bar{A}}{b_2 \Pi \sin \bar{B}} = 1, \quad (10.22)$$

$$\sum_1^n \delta_A(A) - \sum_1^n \delta_B(B) + w_B = 0, \quad (10.23)$$

$$w_B = \left(\frac{\Pi \sin \bar{A}}{\Pi \sin \bar{B}} - 1 \right) \rho. \quad (10.24)$$

Вопрос 10.1.6 Условные уравнения полигонометрии.

В ходе полигонометрии (рис. 10.4) как и в теодолитном возникают три условных уравнения: одно дирекционных углов и два координат.

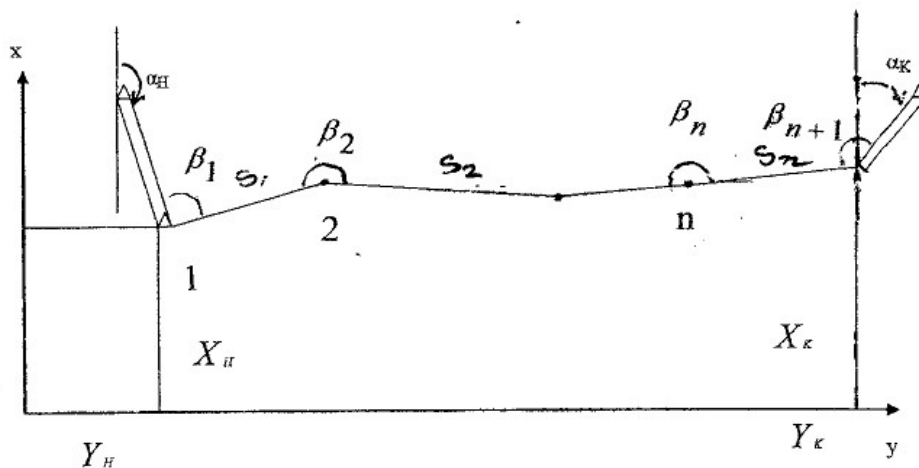


Рис. 10.4.

Условие дирекционных углов записывается так

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\beta_i + (\beta_i)) - (\alpha_k + 180^\circ \times n - \alpha_n) = 0,$$

ИЛИ

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\beta_i) + W_\alpha = 0, \quad (10.25)$$

где

$$W_\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i - (\alpha_k + 180 \times n - \alpha_n)$$

является угловой невязкой, а α_k, α_n – соответственно начальный и конечный исходные дирекционные углы.

Условия координат для уравненных значений можно записать следующим образом

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i - (x_k - x_n) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i - (y_k - y_n) = 0,$$

где $\Delta x_i, \Delta y_i$ – приращения координат, вычисленные по уравненным углам и линиям;

x_k, y_k, x_n, y_n – координаты конечного и начального исходных пунктов.

Выразим эти условные уравнения через поправки. Для этого первое из них запишем в виде

$$\sum_{i=1}^n (S_i + (S_i)) \cos(\alpha_i + (\alpha_i)) - (x_k - x_n) = 0.$$

Выводы для второго аналогичны, поэтому они не приводятся.

Разлагая условное уравнение координат в ряд Тейлора по поправкам, получим

$$\sum_{i=1}^n (S_i) \cos \alpha_i - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\rho} S_i \sin \alpha_i + W_x = 0 \quad (10.26)$$

где

$$W_x = \sum_{i=1}^n S_i \cos \alpha_i - (x_k - x_n).$$

Поправки в дирекционные углы выразим через поправки в измеренные углы. Поскольку

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_n + \beta - 180, \\ \alpha_2 &= \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 - 180 \times 2, \\ &\dots \dots \dots \cdot \\ \alpha_n &= \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - 180 \times n \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} (\alpha_1) &= (\beta_1), \\ (\alpha_2) &= (\beta_1) + (\beta_2), \\ &\dots \dots \dots \\ (\alpha_n) &= (\beta_1) + (\beta_2) + \dots + (\beta_n). \end{aligned}$$

После подстановки значений в условное уравнение (10.26) получим

$$\sum_{i=1}^n (S_i) \cos \alpha_i - (y_k - y_n) \frac{(\beta_1)}{\rho} - (y_k - y_2) \frac{(\beta_2)}{\rho} - \dots - (y_k - y_n) \frac{(\beta_n)}{\rho} + W_x = 0. \quad (10.27)$$

Аналогично уравнение по оси ординат будет

$$\sum_{i=1}^n (S_i \sin \alpha_i + \frac{(x_k - x_n)}{\rho} (\beta_1) + \frac{(x_k - x_2)}{\rho} (\beta_2) + \dots + \frac{(x_k - x_n)}{\rho} (\beta_n)) + W_y = 0. \quad (10.28)$$

Если в (10.27) и (10.28) учесть условие дирекционных углов, то условные уравнения абсцисс и ординат будут такими

$$\sum_{i=1}^n (S_i) \cos \alpha_i + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n+1} y_i (\beta_i) + \frac{1}{\rho} y_k W_\alpha + W_x = 0, \quad (10.29)$$

$$\sum_{i=1}^n (S_i) \sin \alpha_i + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n+1} x_i (\beta_i) + \frac{1}{\rho} x_k W_\alpha + W_x = 0, \quad (10.30)$$

Здесь $x_1 = x_H, y_1 = y_H, x_{n+1} = x_k, y_{n+1} = y_k$.

Таким образом, стандартный вид условных уравнений полигонометрического хода представляется уравнениями (10.25), (10.26), (10.27).

Вопрос 10.1.7. Весовая функция

При уравнивании геодезических сетей оценивается также и точность функций уравненных величин: координат определяемых пунктов, длин линий, дирекционных углов линий и др. Для оценки точности этих элементов необходимо составить функцию зависимости от уравненных величин. Эта функция

называется весовой. Покажем ее составление на примере сети триангуляции (рис. 10.5).

Пусть необходимо по результатам уравнивания геодезической сети оценить точность дирекционного угла стороны 1-2. очевидно, что для его вычисления можно записать

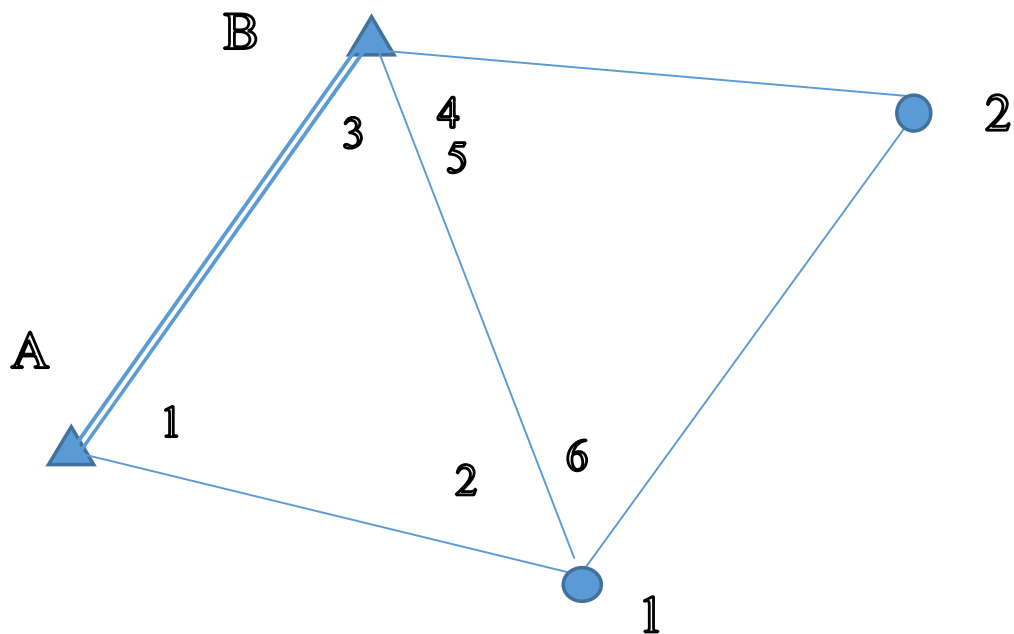


Рис. 10.5.

$$\alpha_{12} = \alpha_{AB} - (6 + (6) - 5 - (5)) + 180^0 - (4 + (4) - 2 - (2)).$$

Поскольку α_{AB} и 180^0 величины безошибочны, то весовую функцию записывают так

$$\alpha_{12} = -6 + 5 - 4 + 2 - (6) + (5) - (4) + (2), \quad (10.31)$$

где (6),(5),(4),(2) – поправки, получаемые из уравнивания.

Для оценки точности этой функции нужно поправки выразить через измеренные величины и определить дисперсию функции измеренных величин по формуле (10.4).

Вопрос 10.2. Уравнивание коррелятным способом

Вопрос 10.2.1. Матричный вид системы условных уравнений

Пусть имеется система условных уравнений, записанная в общем виде

$$\begin{aligned}
a_1(1) + a_2(2) + \dots + a_n(n) + W_1 &= 0, \\
b_1(1) + b_2(2) + \dots + b_n(n) + W_2 &= 0, \\
\dots & \\
q_1(1) + q_2(2) + \dots + q_n(n) + W_r &= 0,
\end{aligned}
\tag{10.32}$$

где a_1, b_1, q_1 – коэффициенты условных уравнений ($i=1,2,\dots,r$), W_i – их свободные члены ($i=1,2,\dots,r$), (2),..., (n) – поправки в измерения.

Если обозначить

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

а

$$V = \begin{pmatrix} (1) \\ (2) \\ \dots \\ (n) \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_n \end{pmatrix},$$

то матричный вид системы условных уравнений будет

$$BV + W = 0,
\tag{10.33}$$

где B – матрица коэффициентов уравнений, а V, W – вектор поправок и свободных членов условных уравнений.

Число условных уравнений в триангуляции определяется по формуле

$$r = n - 2m - m_1,
\tag{10.34}$$

где n – число измеренных направлений и базисов (число всех измерений), m – число определяемых пунктов, m_1 – число пунктов, на которых измерялись направления.

В полигонометрии

$$r = n_s + n_\beta - 2m,
\tag{10.35}$$

где n_s, n_β – число измеренных сторон и углов.

В нивелирных ходах

$$r = n - m, \quad (10.36)$$

где n – число нивелирных ходов между всеми пунктами, m – число определяемых пунктов.

Вопрос 10.2.2. Допустимые размеры свободных членов условных уравнений

Размеры свободных членов условных уравнений зависят от точности полевых измерений, ошибок исходных данных и формы сетей. Если ошибками исходных данных пренебречь, то невязки будут являться функциями измеренных величин:

$$w = f(l_1, l_2, \dots, l_n).$$

По правилам теории ошибок измерений

$$m_w = \sqrt{[f^2 m^2]},$$

где f – частные производные (коэффициенты при поправках в условных уравнениях);

m – средняя квадратическая ошибка измерений.

При равноточных измерениях

$$m_w = m \sqrt{[f^2]}.$$

Принимая зависимость

$$\Delta_{np} = 2,5 m,$$

получим

$$w_{np} = 2,5 m \sqrt{[f^2]}.$$

С учетом ошибок исходных данных применительно к триангуляции предельные невязки найдутся по формулам

1. Для полюсных условий

$$\omega_{np} = 2,5 m \sqrt{[\delta^2]}.$$

2. Для условия сторон

$$w_{np} = 2,5\sqrt{m^2[\delta^2] + 2m_s^2}.$$

3. Для дирекционных углов

$$w_{np} = 2,5\sqrt{m^2n + 2m_\alpha^2}.$$

4. Для условий фигур и горизонтов

$$w_{np} = 2,5m\sqrt{n}.$$

В этих формулах:

m – средняя квадратическая ошибка измерения угла по инструкции;

$[\delta^2]$ – сумма квадратов коэффициентов δ ;

m_s – средняя квадратическая ошибка исходных сторон;

m_α – средняя квадратическая ошибка исходных дирекционных углов;

n – число углов.

Вопрос 10.2.3. Алгоритм коррелятного способа

Существует два варианта обоснования метода наименьших квадратов. Первый основан на статистических свойствах оценок, второй на том что измерения подчиняются нормальному закону распределения и можно использовать метод максимального правдоподобия.

Если известно, что ошибки измерений распределены по нормальному закону с функцией плотности

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\text{dct}K)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}V^T K^{-1}V\right), \quad (10.37)$$

где $\text{dct}K$ – определитель матрицы K , то согласно методу максимального правдоподобия минимум логарифма функции правдоподобия сводится к минимуму следующей функции:

$$V^T K^{-1}V,$$

или функции

$$V^T P V,$$

где $P=K^{-1}$.

При наличии условных уравнений составляется функционал Лагранжа

$$L = V^T P V + 2k^T (B V + W), \quad (10.38)$$

где k – вектор неопределенных множителей Лагранжа-коррелат.

Если (10.38) продифференцировать по V и производную приравнять к нулю, то получим равенство

$$2V^T P + 2k^T B = 0,$$

из которого можно найти вектор поправок

$$V^T = -k^T B p^{-1},$$

или

$$V = -p^{-1} B^T k.$$

Подставляя вектор V в условное уравнение (33) составляется система нормальных уравнений

$$Nk - W = 0,$$

где $N = B P^{-1} B^T$.

Из ее решения находится вектор коррелат

$$k = N^{-1} W,$$

по которому находятся поправки в измерения.

Вектор поправок можно вычислить и по формуле

$$V = p^{-1} B^T k.$$

Но тогда вектор k находится из системы нормальных уравнений вида

$$Nk + W = 0.$$

Как видим, обоснование алгоритма уравнивания на основе поиска наилучших оценок и на основе метода максимального правдоподобия приводит к идентичным результатам.

Вопрос 10.2.4. Решение системы нормальных уравнений по схеме Гаусса

Для упрощения выводов рассмотрим лишь три нормальных уравнения. Тогда системе уравнений в матричном виде $NK + W = 0$ будет соответствовать следующая система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[\frac{ab}{p} \right] k_2 + \left[\frac{ac}{p} \right] k_3 + W_1 = 0, \\ \left[\frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[\frac{bb}{p} \right] k_2 + \left[\frac{bc}{p} \right] k_3 + W_2 = 0, \\ \left[\frac{ac}{p} \right] k_1 + \left[\frac{cb}{p} \right] k_2 + \left[\frac{cc}{p} \right] k_3 + W_3 = 0, \end{array} \right. \quad (10.39)$$

где квадратными скобками обозначены суммы, например,

$$\left[\frac{ab}{p} \right] = \frac{a_1 b_1}{p_1} + \frac{a_2 b_2}{p_2} + \dots + \frac{a_n b_n}{p_n}.$$

Применяя способ подстановки, выразим из первого уравнения значение k_1

$$k_1 = - \frac{\left[\frac{ab}{p} \right]}{\left[\frac{aa}{p} \right]} k_2 - \frac{\left[\frac{ac}{p} \right]}{\left[\frac{aa}{p} \right]} k_3 - \frac{W_1}{\left[\frac{aa}{p} \right]} \quad (10.40)$$

и подставим его в остальные уравнения. В результате получим следующую систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right] k_2 + \left[\frac{bc}{p} \cdot 1 \right] k_3 + W_2 \cdot 1 = 0, \\ \left[\frac{cb}{p} \cdot 1 \right] k_2 + \left[\frac{cc}{p} \cdot 1 \right] k_3 + W_3 \cdot 1 = 0, \end{array} \right. \quad (10.41)$$

где

$$\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right] = \left[\frac{bb}{p} \right] - \frac{\left[\frac{ba}{p} \right] \left[\frac{ab}{p} \right]}{\left[\frac{aa}{p} \right]},$$

$$\left[\frac{bc}{p} \cdot 1 \right] = \left[\frac{bc}{p} \right] - \frac{\left[\frac{ba}{p} \right] \left[\frac{ca}{p} \right]}{\left[\frac{aa}{p} \right]},$$

$$\left[\frac{cc}{p} \cdot 1 \right] = \left[\frac{cc}{p} \right] - \frac{\left[\frac{ca}{p} \right] \left[\frac{ac}{p} \right]}{\left[\frac{aa}{p} \right]},$$

$$\left[W_2 \cdot 1 \right] = \left[W_2 \right] - \frac{\left[\frac{ab}{p} \right] \cdot W_1}{\left[\frac{aa}{p} \right]},$$

$$\left[W_3 \cdot 1 \right] = \left[W_3 \right] - \frac{\left[\frac{ac}{p} \right] \cdot W_1}{\left[\frac{aa}{p} \right]}.$$

Поскольку матрица коэффициентов нормальных уравнений N симметрична, т.е.

$$\left[\frac{ab}{p} \right] = \left[\frac{ba}{p} \right], \left[\frac{ac}{p} \right] = \left[\frac{ca}{p} \right], \left[\frac{bc}{p} \right] = \left[\frac{cb}{p} \right], \text{ то } \left[\frac{bc}{p} \cdot 1 \right] = \left[\frac{cb}{p} \cdot 1 \right].$$

Применим метод подстановки далее и выразим k_2 из первого уравнения системы (10.41)

$$k_2 = - \frac{\left[\frac{bc}{p} \cdot 1 \right]}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} k_3 - \frac{W_2 \cdot 1}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right]}.$$

После подстановки его в остальные уравнения, в данном случае единственное оставшееся, получим уравнение

$$\left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right] k_3 + W_3 \cdot 2 = 0, \tag{10.42}$$

в котором

$$\left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right] = \left[\frac{cc}{p} \cdot 1 \right] - \frac{\left[\frac{bc}{p} \cdot 1 \right] \left[\frac{cb}{p} \cdot 1 \right]}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right]},$$

$$W_3 \cdot 2 = W_3 \cdot 1 - \frac{\left[\frac{bc}{p} \cdot 1 \right] W_2 \cdot 1}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right]}.$$

Таким образом, вместо исходной системы нормальных уравнений можно решать следующую преобразованную систему

$$\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[\frac{ab}{p} \right] k_2 + \left[\frac{ac}{p} \right] k_3 + W_1 &= 0, \\ \left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right] k_1 + \left[\frac{bc}{p} \cdot 1 \right] k_3 + W_1 &= 0, \\ \left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right] k_3 + W_1 &= 0. \end{aligned} \tag{10.43}$$

Из последнего уравнения системы (10.43) находится последнее неизвестное

$$k_3 = - \frac{W_3 \cdot 2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right]}.$$

Его значение подставляется в предыдущее уравнение системы (10.43) и из него находится предыдущее неизвестное k_2 . Полученные значения k_2 и k_3 подставляются в предшествующее им уравнение и из него находится k_1 .

Правило преобразования коэффициентов можно сформулировать следующим образом. Преобразуемый n раз коэффициент равен этому коэффициенту, преобразованному $n-1$ раз минус дробь. В знаменателе дроби находится квадратический элемент предыдущего уравнения, преобразованный $n-1$ раз. Числитель состоит из произведения двух элементов, которые являются преобразованными $n-1$ раз коэффициентами предыдущего уравнения. Эти коэффициенты находятся в столбцах предыдущей преобразованной строки, соответствующих преобразованному коэффициенту и диагональному преобразовываемого уравнения.

Вопрос 10.2.5. Дисперсия функции уравненных величин

Оценка дисперсии любой функции уравненных величин производится по формуле (10.44)

$$D_F = \mu^2 (fp^{-1}f^T - fp^{-1}B^T N^{-1}Bp^{-1}f^T), \quad (10.44)$$

а оценка стандарта единицы веса вычисляется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{pv^2}{r}}, \quad (10.45)$$

где r – число условных уравнений.

Оценка точности функции уравненных величин производится в соответствии с (10.44). В схеме Гаусса этой формуле соответствует следующая:

$$D_{\tilde{F}} = \sigma^2 \left(\left[\frac{ff}{p} \right] - \frac{\left[\frac{af}{p} \right]^2}{\left[\frac{aa}{p} \right]} - \frac{\left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} - \frac{\left[\frac{cf}{p} \cdot 2 \right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right]} - \dots \right) \quad (10.46)$$

Оценкой стандарта σ является средняя квадратическая ошибка единицы веса (10.45).

Выражение в скобках в (10.46) часто обозначают так $\frac{1}{P_{\tilde{F}}}$. Тогда средняя квадратическая ошибка функции уравненных величин будет

$$m_{\tilde{F}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{F}}}}. \quad (10.47)$$

Вопрос 10.3. Параметрический способ уравнивания

Вопрос 10.3.1. Суть параметрического способа

В данном способе устанавливается связь между измеренными величинами и определяемыми.

Измеренными величинами в плановых геодезических сетях в основном являются длины линий, углы и направления. Определяемыми – координаты определяемых пунктов. В пространственных геодезических сетях GPS – измеренными являются приращения координат, а определяемыми – пространственные координаты определяемых пунктов. В нивелирных сетях измеряемыми являются приращения, а определяемыми – высоты пунктов.

Например, пусть в некоторой сети измерены длины сторон S_1, S_2, S_3, S_4 (рис. 22), известными являются координаты исходных пунктов А и В.

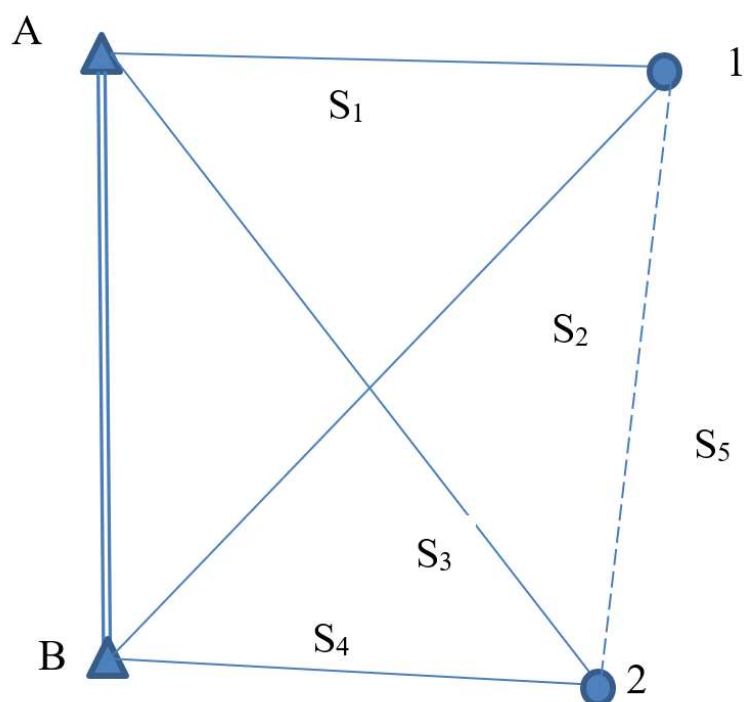


Рис. 10.6.

Определяемыми являются координаты пунктов 1 и 2. Всего четыре неизвестных: x_1, y_1, x_2, y_2 . Для определения необходимо и решить следующие четыре уравнения:

$$\begin{aligned} S_1^2 &= (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2, \\ S_2^2 &= (x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2, \\ S_3^2 &= (x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_B)^2, \\ S_4^2 &= (x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2, \end{aligned}$$

В данной системе – четыре уравнения с четырьмя неизвестными, которые называются параметрами. А сами уравнения называются параметрическими. Если измерить дополнительно сторону S_5 между пунктами 1 и 2, то можно записать еще одно уравнение

$$S_5^2 = (x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2.$$

Тогда получится пять параметрических уравнений с теми же четырьмя неизвестными. Система уравнений связи будет переопределена. Ей будет соответствовать множество решений. Это вызвано тем, что неизвестные величины S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 являются результатами измерений, которые отягощены ошибками измерений. Из этого множества необходимо выбрать такое решение, которое удовлетворяет статистическим свойствам оценок: несмещенности, достаточности, эффективности.

К настоящему времени методы решения нелинейных систем уравнений разработаны недостаточно. Поэтому данные уравнения приводят к линейному виду и решение выполняют методом приближений. Линеаризованные уравнения выражаются через поправки к измеренным величинам и параметрам и называются параметрическими уравнениями поправок.

Вопрос 10.3.2. Параметрические уравнения поправок сторон

Линеаризация параметрического уравнения измеренной стороны выполняется разложением его в ряд Тейлора.

Пусть известны с определенной точностью приближенные значения координат определяемых пунктов $x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0$. Они могут быть найдены по измеренным значениям линий или углов, или наперед заданными. Измеренную между ними длину стороны обозначим через S . В результате уравнивания должны быть получены такие поправки $v_S, \delta_{x_1}, \delta_{y_1}, \delta_{x_2}, \delta_{y_2}$, при которых удовлетворяется равенство

$$S + v_S = \sqrt{(x_2^0 + \delta_{x_2} - x_1^0 - \delta_{x_1})^2 + (y_2^0 + \delta_{y_2} - y_1^0 - \delta_{y_1})^2} \quad (10.48)$$

Разложение выражения, стоящего в (10.48) справа от знака равенства, в ряд Тейлора приводит к следующему равенству

$$S + v_S = \sqrt{(x_2^0 + \delta_{x_2} - x_1^0 - \delta_{x_1})^2 + (y_2^0 + \delta_{y_2} - y_1^0 - \delta_{y_1})^2} + \frac{\partial S}{\partial x_1} \delta_{x_1} + \frac{\partial S}{\partial y_1} \delta_{y_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} \delta_{x_2} + \frac{\partial S}{\partial y_2} \delta_{y_2}. \quad (10.49)$$

Найдем теперь частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{-2(x_2^0 - x_1^0)}{2\sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2}} = \frac{-2S^0 \cos \alpha^0}{2S^0} = -\cos \alpha^0, \quad (10.50)$$

где

$$S^0 = \sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2}, \quad \alpha^0 = \arctg \frac{y_2^0 - y_1^0}{x_2^0 - x_1^0}.$$

Напомним, что при разложении ряд Тейлора частные производные берутся при начальных значениях: $x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0$.

Аналогично запишем

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = -\sin \alpha^0, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} \cos \alpha^0, \quad \frac{\partial S}{\partial y_2} = \sin \alpha^0. \quad (10.51)$$

С учетом полученных выражений производных (10.50), (10.51) параметрического уравнения представим вид

$$S + v_S = S^0 - \cos \alpha^0 \delta x_1 - \sin \alpha^0 \delta y_1 + \cos \alpha^0 \delta x_2 + \sin \delta y_2.$$

или окончательно

$$v_S = -\cos \alpha^0 \delta x_1 - \sin \alpha^0 \delta y_1 + \cos \alpha^0 \delta x_2 + \sin \delta y_2 + l, \quad (10.52)$$

где $l = S^0 - S$.

Вопрос 10.3.3. Параметрические уравнения поправок направлений

При измерении направлений зрительной трубы теодолита наводят на точку и берут отсчет M по горизонтальному кругу. Пусть имеется n таких отсчетов на n точек: M_1, M_2, \dots, M_n (рис 10.7). Назовем их измеренными направлениями.

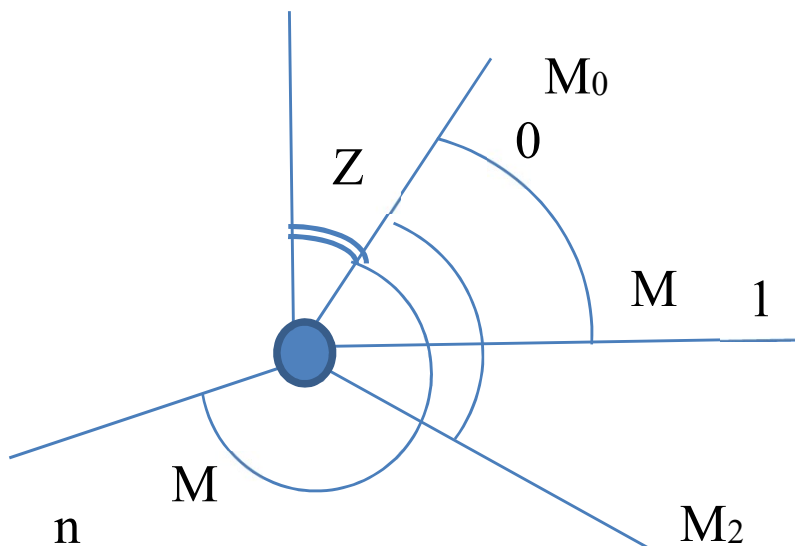


Рис. 10.7

Введем дополнительное неизвестное – дирекционный угол направления, соответствующего нулевому отсчету по лимбу. Его называют еще ориентирующим углом. Тогда дирекционные углы направлений будут:

$$\alpha_1 = Z + M_1,$$

$$\alpha_2 = Z + M_2,$$

.....

$$\alpha_n = Z + M_n$$

Исходя из этих выражений можно записать, что

$$M_1 = -Z + \alpha_1,$$

$$M_2 = -Z + \alpha_2,$$

.....

$$M_n = -Z + \alpha_n$$

Для направления из точки 1 в точку 2 можно записать

$$M = -Z + \alpha, \quad (10.53)$$

где $\alpha = -\operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Из-за ошибок измерения направлений и наличия лишь приближенных координат определяемых пунктов уравнение (10.53) не выполняется.

Если обозначить измеряемое направление через M' , поправку в него через ν , приближенное значение ориентирующего угла через Z^0 , поправку к нему через δZ и аналогично: α^0 – приближенное значение дирекционного угла, $\delta\alpha$ – поправку к нему, то можно записать:

$$M'+\nu = -Z^0 - \delta Z + \alpha^0 + \delta\alpha.$$

Приближенное значение дирекционного угла α^0 вычислено по приближенным координатам $x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0$ определяемых пунктов, в значения которых должны быть введены поправки $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2$.

Поправки $\nu, \delta Z, \delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2$ должны быть такими, чтобы в соответствии с (10.53) выполнялось равенство

$$M'+\nu = -Z^0 - \delta Z + \operatorname{arctg} \frac{(y_2^0 + \delta y_2 - y_1^0 - \delta y_1)}{(x_2^0 + \delta x_2 - x_1^0 - \delta x_1)}. \quad (10.54)$$

Разлагая в (110) функцию arctg в ряд Тейлора найдем

$$M'+\nu = -Z^0 - \delta Z + \operatorname{arctg} \frac{(y_2^0 - y_1^0)}{(x_2^0 - x_1^0)} + \frac{\partial(\operatorname{arctg})}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial(\operatorname{arctg})}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial(\operatorname{arctg})}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial(\operatorname{arctg})}{\partial y_2} \delta y_2.$$

Найдем частные производные этой функции по всем параметрам

$$\frac{\partial(\arctg)}{\partial x_1} = \frac{1}{1 + \frac{(y_2^0 - y_1^0)^2}{(x_2^0 - x_1^0)^2}} \cdot \frac{y_2^0 - y_1^0}{(x_2^0 - x_1^0)^2},$$

или

$$\frac{\partial \arctg}{\partial x_1} = \frac{(x_2^0 - x_1^0)}{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2} \cdot \frac{(y_2^0 - y_1^0)}{(x_2^0 - x_1^0)}.$$

Полагая

$$S^0 = \sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2}, \quad y_2^0 - y_1^0 = S^0 \cdot \sin \alpha^0,$$

получим

$$\frac{\partial \arctg}{\partial x_1} = \frac{\sin \alpha^0}{S^0}. \quad (10.55)$$

Аналогично

$$\frac{\partial \arctg}{\partial y_1} = \frac{(x_2^0 - x_1^0)^2}{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2} \cdot \frac{(-1)}{(x_2^0 - x_1^0)},$$

или, полагая

$$x_2^0 - x_1^0 = S^0 \cos \alpha^0,$$

$$\frac{\partial \arctg}{\partial y_1} = -\frac{\cos \alpha^0}{S^0}, \quad (10.56)$$

$$\frac{\partial \arctg}{\partial x_2} = -\frac{\sin \alpha^0}{S^0}, \quad (10.57)$$

$$\frac{\partial \arctg}{\partial y_2} = -\frac{\cos \alpha^0}{S^0}. \quad (10.58)$$

С учетом выражений для частных производных (10.55)-(10.58) параметрическое уравнение поправок будет иметь вид

$$M^{I+V} = -Z^0 - \delta Z + \alpha^0 + \frac{\sin \alpha^0}{S^0} \delta x_1 - \frac{\cos \alpha^0}{S^0} \delta y_1 - \frac{\sin \alpha^0}{S^0} \delta x_2 + \frac{\cos \alpha^0}{S^0} \delta y_2,$$

или окончательно

$$v = \delta Z + \frac{\sin \alpha^0}{S^0} \delta x_1 - \frac{\cos \alpha^0}{S^0} \delta y_1 - \frac{\sin \alpha^0}{S^0} \delta x_2 + \frac{\cos \alpha^0}{S^0} \delta y_2 + l. \quad (10.59)$$

где $l = \alpha^0 - (M' + Z^0)$.

При уравнивании геодезических сетей чтобы избавиться от неизвестных δZ применяют способ Шрейбера, вводя суммарное уравнение поправок направлений на станции. Это позволяет существенно сократить объем вычислений.

Вопрос 10.3.4. Уравнения поправок превышений

Если измерено превышение h между пунктами 1 и 2 то, зная приближенные высоты H_1^0 и H_2^0 этих пунктов, можно записать следующее уравнение связи между измеренным превышением и поправками $\delta H_1, \delta H_2$ в приближенные высоты

$$h + v_h = H_2^0 + \delta H_2 - H_1^0 - \delta H_1.$$

Тогда уравнение поправок превышений будет

$$v_h = \delta H_1 + \delta H_2 + l.$$

где $l = H_2^0 - H_1^0 - h$.

Вопрос 10.3.5. Уравнения поправок в матричном виде

Уравнения поправок в общем случае можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 \delta x_1 + b_1 \delta x_2 + \dots + w_1 \delta x_m + l_1, \\ v_2 &= \alpha_2 \delta x_1 + b_2 \delta x_2 + \dots + w_2 \delta x_m + l_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ v_n &= \alpha_n \delta x_1 + b_n \delta x_2 + \dots + w_n \delta x_m + l. \end{aligned} \quad (10.60)$$

Если ввести матричные обозначения

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & b_1 & \dots & w_1 \\ \alpha_2 & b_2 & \dots & w_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & b_n & \dots & w_n \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \dots \\ \delta x_m \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_3 \end{pmatrix}.$$

то система уравнений поправок (10.60) примет вид

$$V = AX + L. \quad (10.61)$$

Вопрос 10.3.6. Алгоритм уравнивания параметрическим способом

Настоящий алгоритм, как и в коррелятном способе, можно вывести и на основе метода максимального правдоподобия.

Функция плотности распределения ошибок вектора измерений L при нормальном распределении имеет вид (10.37).

Согласно методу максимального правдоподобия должно быть

$$\phi = V^T P V = \min.$$

Для поиска экстримума запишем производную ϕ по X и приравняем ее к нулю.

$$\frac{d\phi}{dX} = 2V^T P \times \frac{dV}{dX} = 2V^T P A = 0,$$

или

$$(AX + L)^T P A = 0,$$

что соответствует уравнению

$$A^T P (AX + L) = 0.$$

После раскрытия скобок получим систему нормальных уравнений

$$NX + A^T P L = 0,$$

где

$$N = A^T P A$$

Из ее решения находится вектор параметров

$$X = -N^{-1} A^T P L.$$

Таким образом, алгоритм уравнивания параметрическим способом заключается в следующем:

- а) составляется система уравнений поправок $V = A \times X + L$;
- б) вычисляется матрица нормальных уравнений $N = A^T P A$;
- в) находится вектор параметров $X = -N^{-1} A^T P L$ и оценивается его точность

$$D_X = \sigma^2 N^{-1}. \quad (10.62)$$

Вопрос 10.3.7. Метод Жордановых исключений

В параметрическом способе удобно оценивать точность определяемых пунктов по формуле (10.62). При этом необходимо обратить матрицу нормальных уравнений N . Рассмотрим процесс обращения на пример сети триангуляции с двумя определяемыми пунктами (рис 10.8), матрица ее коэффициентов нормальных уравнений (10.63)

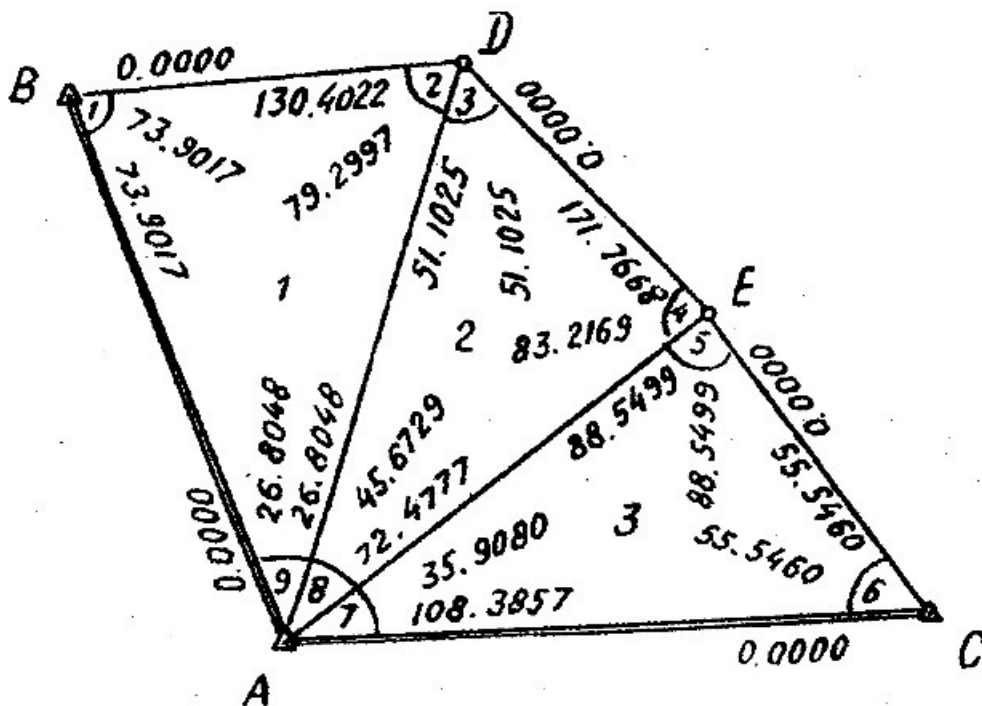


Рис 10.8

$$\begin{pmatrix} +4,17 & -0,11 & -4,22 & +0,23 \\ -0,11 & +7,9 & -0,73 & -4,01 \\ -4,22 & -0,73 & +14,11 & +2,14 \\ +0,23 & -4,01 & +2,14 & +10,56 \end{pmatrix} \quad (10.63)$$

Ее обращение можно осуществить различными способами. Наиболее удобный из них способ модифицированных жордановых исключений.

Суть его заключается в следующем:

1) В исходной матрице выбирается разрешающий элемент α_{rs} и заменяется обратной величиной $\frac{1}{\alpha_{rs}}$.

2) Остальные элементы разрешающей строки r делятся на разрешающий элемент.

3) Остальные элементы разрешающего столбца S делятся на разрешающий элемент и меняют на противоположные.

4) прочие элементы вычисляются по формуле:

$$b_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{iS} \cdot \alpha_{ri}}{\alpha_{rS}}. \quad (10.64)$$

Вычисления целесообразно выполнять с удерживанием двух значащих цифр после запятой.

На первом шаге жордановых исключений в качестве разрешающего принимается диагональный элемент 4,17.

В результате получится матрица

$$\begin{pmatrix} +0,24 & -0,026 & -1,012 & +0,055 \\ +0,026 & +7,90 & -0,84 & -4,00 \\ +1,012 & -0,84 & +9,84 & +2,37 \\ -0,055 & -4,00 & +2,37 & +10,55 \end{pmatrix}. \quad (10.65)$$

На втором шаге разрешающим будет второй преобразованный диагональный элемент матрицы (10.65), т.е. 7,90.

$$\begin{pmatrix} +0,124 & +0,003 & -1,015 & +0,042 \\ +0,003 & +0,13 & -0,11 & -0,51 \\ +1,015 & +0,11 & +9,75 & +1,94 \\ +0,042 & +0,51 & +1,94 & +8,52 \end{pmatrix}. \quad (10.66)$$

На третьем шаге разрешающим берется диагональный элемент матрицы (10.66) 9,75.

$$\begin{array}{cccc}
 + 0,34 & + 0,01 & + 0,104 & + 0,24 \\
 - 0,008 & + 0,13 & + 0,011 & - 0,49 \\
 + 0,104 & + 0,011 & + 0,10 & + 0,20 \\
 - 0,24 & + 0,49 & - 0,20 & + 8,13
 \end{array} \tag{10.67}$$

На четвертом шаге, т.е. последнем, разрешающим будет элемент 8,13. Окончательный результат представится в виде матрицы

$$\begin{array}{cccc}
 + 0,35 & - 0,02 & + 0,10 & + 0,03 \\
 - 0,02 & + 0,16 & + 0,01 & + 0,06 \\
 + 0,10 & + 0,01 & + 0,10 & - 0,02 \\
 + 0,03 & + 0,06 & - 0,02 & + 0,12
 \end{array} \tag{10.68}$$

которая будет обратной матрице (10.63).

Контролем правильности обращения является равенство единичной матрице произведения матриц (10.63) и (10.68) с точностью 0,1. Кроме того при переходе с одного шага жордановых исключений к другому необходимо следить за симметричностью образовываемых матриц. Лишь в разрешающей строке слева и в разрешающем столбце сверху от разрешающего элемента матрицы различаются лишь знаками.