Тема лекции 8. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Вопросы:

8.1. Задачи теории погрешностей измерений.

8.2. Сущность и виды измерений.

8.3. Погрешности измерений, их классификация и свойства.

8.4. Понятие о законах распределения погрешностей.

8.5. Числовые характеристики точности измерений.

8.6. Средние квадратические погрешности функций измеренных величин.

8.7. Среднее арифметическое значение и его свойства. Средняя квадратическая погрешность арифметического среднего.

8.8. Поправки и их свойства. Выражение средней квадратической погрешности через поправки. Средняя квадратическая погрешность округления.

8.9. Определение средней квадратической погрешности одного измерения по разностям двойных равноточных измерений.

8.10. Веса измерений и их свойства. Соотношение между весами и средними квадратическими погрешностями. Вес среднего арифметического.

8.11. Веса функций измеренных величин.

8.12. Средняя квадратическая погрешность единицы веса.

8.13. Среднее весовое. Средняя квадратическая погрешность и вес среднего весового.

8.14. Поправки неравноточных измерений одной и той же величины и их свойства. Оценка точности неравноточных измерений и среднего весового по поправкам.

8.15. Определение средней квадратической погрешности единицы веса по разностям двойных неравноточных измерений.

8.16. Оценка точности измерения углов и превышений по невязкам в полигонах и ходах.

Литература

1. Юнусов, А.Г. Геодезия: учебное пособие для вузов. / А.Г. Юнусов. А.Б. Беликов, В.Н. Баранов, Ю.Ю. Каширкин. – М.: Академический проект. 2011. 409 с.
2. Куштин, И.Ф. Геодезия: учебно-практическое пособие. / И. Ф. Куштин, В.И. Куштин. – Ростов н/Д. Феникс, 2009. – 909 с.
3. Неумывакин, Ю.К., Практикум по геодезии / Ю.К.Неумывакин, А.С.Смирнов. – М.: Недра, 1995.

Вопрос 8.1. Задачи теории погрешностей измерений.

Геодезические работы связаны с различными методами измерений длин линий, углов, превышений, площадей и пр. Любые измерения, как бы тщательно они не выполнялись, сопровождаются неизбежными погрешностями (погрешностями), поэтому измеренные значения величин будут отклоняться от истинных. На практике измерения выполняют так, чтобы получить результаты с некоторой заданной точностью. Для обоснования необходимой и достаточной точности измерений надо знать причины возникновения погрешностей измерений и их свойства. Эти вопросы рассматриваются в теории погрешностей измерений, которая в свою очередь основывается на теории вероятностей и математической статистики.

Теория погрешностей решает четыре основных задачи:

1. Изучение законов возникновения и распределения погрешностей измерений и вычислений.
2. Оценка точности результатов измерений и их функций.
3. Отыскание наиболее надёжного значения определяемой величины и характеристики точности.
4. Установление допусков, ограничивающих использование результатов измерений в заданных пределах точности, т. е. критериев указывающих на наличие грубых погрешностей.

Вопрос 8.2. Сущность и виды измерений.

Под измерением данной физической величины понимается процесс сравнения ее с другой физической величиной того же рода, принятой за единицу измерения. Полученное именованное число называется результатом измерения.

Измерения различают на непосредственные (прямые), посредственные (косвенные), равноточные, неравноточные, необходимые, дополнительные (избыточные), зависимые и независимые.

Непосредственными называются измерения, при которых измеряемая величина непосредственно сравнивается с единицей меры, например, измерения линий лентой, углов транспортиром и т.д.

Посредственными или косвенными называются измерения, когда искомая величина находится путем измерения других величин, например, определение неприступных расстояний.

Под равноточными понимают измерения, полученные одним и тем же прибором (или различными приборами одного класса точности) одним и тем же или равноценными методами, одинаковым числом приемов и в одинаковых условиях. Пример: измерения углов теодолитами одинаковой точности. Если указанные условия не соблюдаются, то результаты измерений будут неравноточными, например, измерение углов теодолитами разной точности или одним теодолитом, но разным числом приемов.

Различает необходимые и избыточные измеренные величины. Необходимыми считаются измерения, которые позволяют получить искомую величину только один раз. Если одна величина измерена n раз, то одно измерение будет необходимым, а остальные n–1- избыточными. Например, для определения всех сторон и углов в треугольнике необходимо знать не менее трех его элементов, в т.ч. хотя бы одну сторону. Если измерены все углы и стороны, то три величины будут избыточными.

Избыточные измерения нужны для контроля и повышения точности определения искомых величин, а также оценки точности искомых величин.

Зависимыми называют измерения, имеющие некоторые общие источники погрешностей. Например, высоты точек **A** и **B**, полученные нивелированием от репера, будут зависимы, т.к. погрешности превышений в звене **RA** будут для них общими (рис. 8.1). Если проложить самостоятельные ходы до точек **A** и **B**, то их высоты будут независимыми (рис. 8.2).

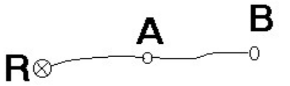

Рис. 8.1. Зависимые измерения.

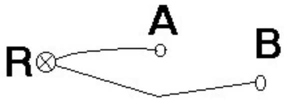

Рис. 8.2. Независимые измерения.

Вопрос 8.3. Погрешности измерений, их классификация и свойства.

Погрешностью результата измерения называется разность между результатом измерения и точным (истинным) значением измеряемой величины, т.е.

$$\Delta = l - X, \qquad (8.1)$$

где Δ – погрешность измерения (истинная погрешность);

l – результат измерения;

X – точное значение величины.

Причинами возникновения неизбежных погрешностей являются неточности в изготовлении и юстировке приборов, влияние внешних условий, неточности выполнения операций наблюдателем, изменения самого объекта измерения и несовершенство метода измерений. В соответствии с источниками возникновения различают погрешности:

1) приборов;
2) внешние;
3) личные;
4) объекта;
5) метода измерений.

В свою очередь каждый из указанных источников погрешностей есть результат воздействия многих факторов. Поэтому истинная погрешность измерения является результатом совместного действия многих элементарных погрешностей $\Delta = \Delta a + \Delta в + \ldots + \Delta к$.

Например, при измерении линии лентой возникают погрешности: компарирования ленты (приборные), изменения температуры ленты, прогиба под влиянием растительности (внешние), неточного укладывания ленты в створе, неравномерности натяжения ленты (личные), неучета малых углов наклона местности (метода измерений) и др.

Приведенная классификация погрешностей по источникам возникновения имеет большое значение при изучении приборов и методов измерений. В теории погрешностей более важное значение имеет классификация погрешностей по закономерностям их появления. По характеру действия на конечный результат погрешности делятся на *грубые, систематические и случайные*.

Грубые погрешности (промахи) вызываются невнимательностью наблюдателя или неисправностью прибора. Они превосходят по абсолютной величине некоторый предел, установленный для данных условий измерений. Измерения, содержащие грубые погрешности, бракуются и заменяются новыми. Для выявления грубых погрешностей производятся избыточные измерения (линии измеряют дважды, в треугольнике измеряют все три угла и т. п.).

Систематические погрешности подразделяются на постоянные, переменные и односторонне действующие.

Постоянные систематические погрешности при измерении одной и той же величины несколько раз, всякий раз появляются с одним знаком и одинаковые по величине. Например, погрешности за счет неточного центрирования теодолита при измерении углов несколькими приемами будут одинаковыми в каждом приеме.

Переменные систематические погрешности меняются от приема к приему, следуя определённому закону. Например, погрешности в направлениях, обусловленные эксцентриситетом алидады, или погрешностьми нанесения штрихов лимба теодолита.

Односторонне действующие систематические погрешности изменяются случайным образом, но сохраняют знак. Например, погрешность в длине линии из-за отклонения мерной ленты от створа.

Случайными называются погрешности, которые не связаны функциональной зависимостью с какими-либо факторами. Ни величину, ни знак случайной погрешности заранее предсказать нельзя. В последовательности появления погрешностей тоже нет никакой закономерности. Однако если рассматривать их в большом количестве, то выявляются определенные статистические закономерности.

Случайные погрешности основного типа обладают следующими вероятными свойствами:

1. По абсолютной величине погрешности не превосходят некоторого предела.

2. Положительные и отрицательные погрешности, равные по абсолютной величине, имеют равные вероятности, т.е. встречаются одинаково часто.

3. Чем больше погрешность по абсолютной величине, тем меньше ее вероятность появления.

4. Среднее арифметическое из значений случайных погрешностей при неограниченном возрастании числа измерений одной и той же величины имеет пределом нуль, т. е. математическое ожидание погрешности равно нулю

$$\overline{\Delta} = вер.\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0\ .$$

Есть случайные погрешности другого типа. Они обладают всеми перисленными свойствами кроме третьего, которое заменяется следующим: все погрешности независимо от их размера имеют одинаковые вероятности, например – погрешности округления чисел.

Вопрос 8.4. Понятие о законах распределения погрешностей.

Свойства случайных погрешностей являются проявлением закона их распределения.

В общем случае закон распределения погрешностей отражает связь между размером погрешности и вероятностью ее появления

$$P_\Delta = f(\Delta)d\Delta, \qquad (8.2)$$

где P_Δ – вероятность появления погрешности в интервале $(\Delta, \Delta + d\Delta)$;

Δ – случайная погрешность;

$f(\Delta)$ – плотность распределения погрешностей.

Распределение случайных погрешностей измерений наиболее точно описывается законом нормального распределения.

Плотность нормального распределения выражается формулой

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}, \qquad (8.3)$$

где σ – среднее квадратическое отклонение случайной погрешности.

График функции (8.3) называется кривой нормального распределения, или кривой Гаусса (рис. 8.3).

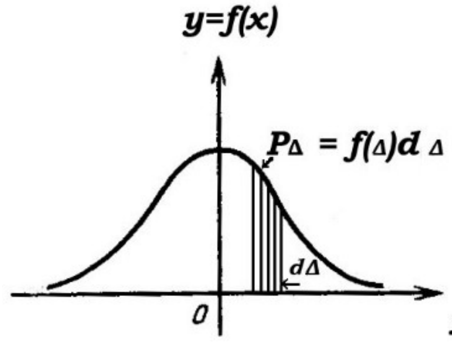

Рис. 8.3. Кривая нормального распределения.

Эта кривая имеет симметричную колоколообразную форму. Заштрихованная площадь представляет собой вероятность появления погрешности в интервале от Δ до $\Delta + d\Delta$.

Есть погрешности, которые подчиняются закону равномерного или равновероятного распределения, к примеру, погрешности округления. Плотность распределения их выражается формулой

$$f(\Delta) = \frac{1}{2\alpha}, \tag{8.4}$$

где α – наибольшее значение погрешности.

Основными характеристиками распределения случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия. Математическим ожиданием $\overline{X}$ дискретной случайной величины x называют сумму произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности p

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \tag{8.5}$$

Для непрерывной случайной величины с плотностью распределения $f(x)$ математическое ожидание определяется по формуле

$$\overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{8.6}$$

Дисперсией случайной величины X называется число, определяемое по формуле

$$D(X) = (X - \overline{X})^2. \tag{8.7}$$

Положительное значение квадратного корня из дисперсии называют стандартом или средним квадратическим отклонением

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\,. \tag{8.8}$$

Для случайных погрешностей измерений, как уже отмечалось, математическое ожидание равно нулю ($\overline{\Delta}$=0). Поэтому

$$\sigma^2 = D(\Delta) = \overline{\left(\Delta - \overline{\Delta}\right)^2} = \overline{\Delta}^2, \tag{8.9}$$

или

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \tag{8.10}$$

при n стремящемуся к бесконечности.

Вопрос 8.5. Числовые характеристики точности измерений.

В качестве теоретической характеристики точности измерений обычно пользуются средним квадратическим отклонением σ. Поскольку величина σ не известна, практически пользуются ее приближенным значением – средней квадратической погрешностью, определяемой по формуле

$$m = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + ... + \Delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \tag{8.11}$$

где $\Delta_1, \Delta_{2, ...,} \Delta_n$ – истинные погрешности измерений.

При большом значении n

$$m \approx \sigma. \tag{8.12}$$

При ограниченном числе измерений величина m будет характеризовать величину σ с некоторой погрешностью. Для оценки точности определения самой средней квадратической погрешности существует формула

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \tag{8.13}$$

Оценку точности измерений характеризуют также предельной погрешностью, вычисляемой по формуле

$$\Delta_{пр} = \tau m, \tag{8.14}$$

где τ – коэффициент, значение которого принимают таким, чтобы была мала вероятность появления погрешности больше предельной.

Обычно для τ принимают значения 3, 2,5, или 2. Этим значениям τ соответствуют вероятности 0,003, 0,012, 0,046. Другими словами, на каждую тысячу измерений число погрешностей, превосходящих по абсолютной величине предельную $\Delta_{пр}=3m$, $2{,}5m$, $2m$ в среднем приблизительно равно соответственно 3, 12, 46.

В дальнейшем при решении задач по оценке точности измерений будем пользоваться формулой

$$\Delta_{пр} = 3m.$$

Для оценки точности иногда пользуются *средней погрешностью v* и *вероятной погрешностью r*. Средняя погрешность вычисляется по формуле

$$v = \frac{[|\Delta|]}{n}. \tag{8.15}$$

При нормальном распределении она связана со средней квадратической погрешностью примерным соотношением

$$v = \frac{4}{5} m. \tag{8.16}$$

Если все погрешности расположить в ряд по возрастанию абсолютных значений, то погрешность оказавшаяся в середине ряда будет *вероятной*. Со средней квадратической погрешностью она связана соотношением

$$r = \frac{2}{3}m. \tag{8.17}$$

Погрешность, выраженная в единицах измерения, называется *абсолютной*. Отношение ее к измеренной величине называется *относительной* погрешностью.

Вопрос 8.6. Средние квадратические погрешности функций измеренных величин.

Часто искомые величины получают путем вычислений по измеренным величинам, поэтому возникает необходимость оценивать точность функций измеренных величин.

Возьмем линейную функцию, полагая, что все измерения независимы (погрешности измерений не коррелированы)

I. $$u = kx + c, \tag{8.18}$$

где k и c – постоянные величины;

x – измеренное значение аргумента;

u – вычисленное значение функции.

Подставим вместо x точное значение X, получим точное значение функции

$$U = kX + c. \tag{8.19}$$

Найдем истинную погрешность функции

$$u - U = k(x - X),$$

$$\Delta u = k\Delta x.$$

При n измерениях получим

$$\Delta u_1 = k\Delta x_1,$$
$$\Delta u_2 = k\Delta x_2,$$
$$\dots\ \dots\ \dots$$
$$\Delta u_n = k\Delta x_n.$$

Возведем левые и правые части в квадрат, результаты сложим и разделим на n, получим

$$\frac{[\Delta u^2]}{n} = \frac{k^2[\Delta x^2]}{n}.$$

По определению средней квадратической погрешности

$$\frac{[\Delta x^2]}{n} = m_x^2, \quad \frac{[\Delta u^2]}{n} = m_u^2.$$

Отсюда

$$m^2_u = k^2 m^2_x,$$

$$m_u = k m_x. \tag{8.20}$$

Рассмотрим функцию с двумя переменными.

II. $$u = k_1 x + k_2 y + c. \tag{8.21}$$

Рассуждая аналогично получим

$$U = k_1 X + k_2 Y + c,$$

$$\Delta u = k_1 \Delta x + k_2 \Delta y.$$

При n измерениях получим

$$\begin{gathered}\Delta u_1 = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta y_1,\\ \Delta u_2 = k_1 \Delta x_2 + k_2 \Delta y_2,\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \Delta u_n = k_1 \Delta x_n + k_2 \Delta y_n,\end{gathered}$$

$$\frac{[\Delta u^2]}{n} = \frac{k_1^2 [\Delta x^2]}{n} + \frac{k_2^2 [\Delta y^2]}{n} + 2k_1 k_2 \frac{[\Delta x \Delta y]}{n}.$$

По свойству случайных погрешностей

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta x \Delta y]}{n} = 0.$$

В результате получим

$$m^2_u = k^2_1 m^2_x + k^2_2 m^2_y. \tag{8.22}$$

Аналогичными рассуждениями можно обосновать формулу для оценки точности функции многих переменных

III. $$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n + c. \tag{8.23}$$

$$\Delta u = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + \dots + k_n \Delta x_n + c. \tag{8.24}$$

$$m^2_u = k^2_1 m^2_1 + k^2_2 m^2_2 + \dots + k^2_n m^2_n. \tag{8.25}$$

IV. Для алгебраической суммы

$$u=\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n + c, \qquad (8.26)$$

формула (8.25) примет вид

$$m^2_u = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2. \qquad (8.27)$$

В случае равноточных измерений, когда $m_1=m_2= \ldots = m_n = m$, получим

$$m_u = m\sqrt{n}, \qquad (8.28)$$

т.е. средняя квадратическая погрешность алгебраической суммы n равноточных слагаемых в $\sqrt{n}$ раз больше средней квадратической погрешности одного слагаемого.

V. Функция общего вида

$$u=f(x_1, x_2, \ldots x_n). \qquad (8.29)$$

Найдем полный дифференциал функции

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Из математики известно, что для аргумента dx и Δx равнозначны и при малых значениях Δx можно принять $du \approx \Delta u$. Поэтому

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Здесь частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ и т.д. представляют собой постоянные коэффициенты, которые можно вычислить по измеренным значениям аргументов. Заменяя их через k_1, k_2, ... k_n получим равенство вида (8.24) и по аналогии с (8.25) найдем

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2. \qquad (8.30)$$

Эта формула является основой, другие, из приведенных выше, можно рассматривать как частный случай.

Вопрос 8.7. Среднее арифметическое значение и его свойства. Средняя квадратическая погрешность арифметического среднего.

Если одна и та же величина измерена с одинаковой точностью несколько раз, то за окончательное значение измеренной величины берут среднее арифметическое, определяемое по формуле

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}. \tag{8.31}$$

Для упрощения вычислений обычно вводят приближенное значение l_0, вычисляют остатки $\varepsilon_i = l_i - l_0$ и пользуются формулой

$$L = l_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}. \tag{8.32}$$

Формула (8.32) легко получается из (31) путем замены $l_i = l_0 + \varepsilon_i$.

Среднее арифметическое из результатов равноточных измерений обладает следующими свойствами.

1. С увеличением числа измерений n арифметическая средина имеет тенденцию стремиться к точному значению величины X.

Доказательство. Пусть сделано n измерений. Тогда

$$\Delta_1 = l_1 - X,$$
$$\Delta_2 = l_2 - X,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n = l_n - X.$$

Сложим и разделим на n. Получим

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - X \quad \text{или} \quad \frac{[\Delta]}{n} = L - X.$$

По свойству случайных погрешностей

$$_{\textit{вер}.}\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0.$$

Следовательно, L стремится к X.

2. Если среднее арифметическое образовано из результатов измерений свободных от систематических погрешностей, то и само оно не содержит их. И наоборот. При отсутствии систематических погрешностей математическое ожидание среднего арифметического равно точному значению измеренной величины.

Для нахождения средней квадратической погрешности среднего арифметического, которое запишем в виде

$$L = \frac{[l]}{n} = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \ldots + \frac{1}{n} l_n,$$

применим формулу (25):

$$m_L^2 = M^2 = \frac{1}{n^2} m_1^2 + \frac{1}{n^2} m_2^2 + \ldots + \frac{1}{n^2} m_n^2.$$

Поскольку измерения равноточны

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m.$$

Следовательно

$$M^2 = \frac{1}{n^2} m^2 n = \frac{m^2}{n},$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \qquad (8.33)$$

Таким образом, средняя квадратическая погрешность среднего арифметического из n равноточных измерений в $\sqrt{n}$ раз меньше погрешности одного измерения.

Вопрос 8.8. Поправки и их свойства. Выражение средней квадратической погрешности через поправки. Средняя квадратическая погрешность округления.

Поправка представляет собой разность между вероятнейшим значением величины (средним арифметическим) и результатом ее измерения

$$v_i = L - l_i. \qquad (8.34)$$

Если арифметическая средина получена из n измерений, то можно записать:

$$\begin{array}{l} v_1 = L - l_1, \\ v_2 = L - l_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \underline{v_n = L - l_n,} \\ [v] = nL - [l] \end{array}$$

Сложим эти равенства.

Подставив $L = \frac{[l]}{n}$, получим

$$[v] = 0. \qquad (8.35)$$

Это одно из свойств поправок, которое используется для контроля вычисления значения L и самих поправок v. Если арифметическая средина округлена и погрешность округления равна w, то

$$L = \frac{[l]}{n} + w,$$

$$[v] = n\,w. \tag{8.36}$$

Величина $|w| \leq 0{,}5$ единицы последнего разряда L, поэтому $|[v]| \leq 0{,}5n$ в единицах того же разряда.

Указанные поправки обладают еще одним важным свойством

$$[v^2] = min, \tag{8.37}$$

т.е. сумма квадратов отклонений результатов измерений от среднего арифметического всегда меньше, чем от любого другого числа.

По вероятнейшим поправкам можно определить среднюю квадратическую погрешность.

Пусть некоторая величина X измерена n раз. Из результатов измерений получено среднее арифметическое L.

Известно, что

$$\Delta_i = l_i - X,$$

$$v_i = L - l_i.$$

Отсюда

$$\Delta_i + v_i = L - X.$$

Обозначим $L - X = \delta$ (погрешность среднего арифметического). Тогда

$$\Delta_i = \delta - v_i.$$

При n измерениях

$$\Delta_1 = \delta - v_1,$$
$$\Delta_2 = \delta - v_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n = \delta - v_n.$$

Возведем левые и правые части в квадрат, результаты сложим и разделим на n

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \delta^2 - 2\delta\frac{[v]}{n} + \frac{[v^2]}{n}.$$

Заменим истинную погрешность среднего арифметического средней квадратической

$$\delta = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

и учитывая то, что $[v]$=0, получим

$$m^2 = \frac{m^2}{n} + \frac{[v^2]}{n}.$$

Отсюда $nm^2=m^2+[v^2]$,

$$m^2(n-1)=[v^2],$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}\,. \tag{8.38}$$

По этой формуле вычисляется средняя квадратическая погрешность одного измерения. Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического найдется по формуле

$$M = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}. \tag{8.39}$$

Вычисление величины $[v^2]$ контролируется по формулам

$$[v^2] = -[v\,l\,] \tag{8.40}$$

или

$$[v^2] = -[v\,\varepsilon\,]. \tag{8.41}$$

Если среднее арифметическое получено с округлением, то для контроля пользуются равенством

$$[v^2] = -[v\,\varepsilon\,] + (L-l_0)[v]. \tag{8.42}$$

Средняя квадратическая погрешность округления чисел определяется по формуле

$$m_{ок} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \tag{8.43}$$

где α – предельная погрешность округления, равная половине единицы оставляемой цифры.

Вопрос 8.9. Определение средней квадратической погрешности одного измерения по разностям двойных равноточных измерений.

В целях контроля и повышения точности широко применяют двойные измерения, например, превышения определяют дважды по черной и красной сторонам рейки, линии измеряют вперед и обратно. При наличии двойных измерений можно сделать оценку точности.

Пусть имеется ряд двойных равноточных измерений. Найдем их разности

$$d_1 = l_1 - l_1',$$
$$d_2 = l_2 - l_2',$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$d_n = l_n - l_n'.$$

Разность между двумя измерениями одной и той же величины теоретически должны равняться нулю (если бы измерения были точными). Поэтому величину d можно рассматривать как истинную погрешность, а среднюю квадратическую погрешность разности двойных измерений вычислить по формуле

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \qquad (8.44)$$

Величина d есть функция двух равноточных измерений, поэтому можно записать

$$m_d = m\sqrt{2}.$$

где m – средняя квадратическая погрешность одного измерения.

Отсюда

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя значение в (8.44), получим

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \qquad (8.45)$$

Формула (8.45) справедлива для случая, когда в разностях нет систематических погрешностей.

При наличии систематических погрешностей вычисляют систематическую погрешность Θ по формуле среднего арифметического

$$\Theta = \frac{[d]}{n}. \tag{8.46}$$

Затем из каждой разности исключают систематическую погрешность по формуле

$$\partial_i = d_i - \Theta. \tag{8.47}$$

Величину ∂_i можно рассматривать как поправку, но с другим знаком. Заменяя в (8.38) v на ∂, получим,

$$m_d = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{n-1}}.$$

Учитывая, что $m = \frac{m_d}{\sqrt{2}}$, окончательно будем иметь

$$m = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2(n-1)}}. \tag{8.48}$$

Контроль:

$$[\partial] = 0, \tag{8.49}$$

$$[\partial^2] = [d\partial]. \tag{8.50}$$

Систематическую погрешность можно не исключать и делать оценку по формуле (45), если выполняется условие

$$|[d]| \leq 0{,}25\ [|d|]. \tag{8.51}$$

Вопрос 8.10. Веса измерений и их свойства. Соотношение Между весами и средними квадратическими погрешностями. Вессреднего арифметического.

При обработке неравноточных измерений пользуются дополнительной характеристикой точности измерений, называемой весом измерения.

Вес измерения p – величина обратно-пропорциональная квадрату средней квадратической погрешности этого измерения:

$$p = \frac{k}{m^2}. \tag{8.52}$$

В этой формуле k произвольное число, но при решении конкретной задачи одинаковое для всех измерений. Его стремятся выбрать таким, чтобы веса были близкими к 1.

Поскольку k выбирается произвольно, при решении данной задачи все веса можно увеличивать или уменьшать в одно и то же число раз. Это является первым свойством весов.

Пусть сделано два измерения с весами

$$p_1 = \frac{k}{m_1^2}, \qquad p_2 = \frac{k}{m_2^2}.$$

Отсюда

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}, \tag{8.53}$$

т.е. веса двух измерений обратно пропорциональны квадратам их средних квадратических погрешностей. Это второе свойство весов.

Найдем вес среднего арифметического, принимая вес p отдельного измерения равным единице.

Обозначим вес среднего арифметического через P. На основании (53) запишем

$$\frac{P}{p} = \frac{m^2}{M^2}.$$

Подставляя $p = 1$ и $M = \dfrac{m}{\sqrt{n}}$, получим

$$P = n, \tag{8.54}$$

т.е. вес среднего арифметического равен числу равноточных измерений из которых оно получено, если вес каждого измерения принят равным единице.

На этом основании любой результат измерений с весом p можно понимать как среднее арифметическое из ряда воображаемых равноточных измерений, каждое с весом единица, число которых было p.

Вопрос 8.11. Веса функций измеренных величин.

Ранее были выведены формулы для нахождения средних квадратических погрешностей функций. Веса и средние квадратические погрешности измерений связаны зависимостью

$$p = \frac{k}{m^2}.$$

Принимая k=1, получим $m^2 = \dfrac{1}{p}$.

Величину $\frac{1}{p}$ называют обратным весом.

Если в ранее выведенные формулы подставить вместо квадратов средних квадратических погрешностей соответствующие обратные веса, то получим формулы для нахождения весов функций

1.
$$u = kx + c,$$
$$m_u^2 = k^2 m_x^2,$$
$$\frac{1}{p_u} = k^2 \frac{1}{p_x}. \qquad (8.55)$$

2.
$$u = k_1 x + k_2 y + c,$$
$$m_u^2 = k_1^2 m_x^2 + k_2^2 m_y^2,$$
$$\frac{1}{p_u} = k_1^2 \frac{1}{p_x} + k_2^2 \frac{1}{p_y}. \qquad (8.56)$$

3.
$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_n x_n + c,$$
$$m_u^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2,$$
$$\frac{1}{p_u} = k_1^2 \frac{1}{p_1} + k_2^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + k_n^2 \frac{1}{p_n}. \qquad (8.57)$$

4.
$$u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n + c,$$
$$m_u^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2,$$
$$\frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}. \qquad (8.58)$$

Если измерения равноточные, то $\frac{1}{p_u} = \frac{n}{p}$,

откуда
$$p_u = \frac{p}{n}, \qquad (8.59)$$

т.е. вес суммы n равноточных слагаемых в n раз меньше веса одного измерения.

5.
$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2,$$

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}. \qquad (8.60)$$

Вопрос 8.12. Средняя квадратическая погрешность единицы веса.

Средней квадратической погрешностью единицы веса μ называют среднюю квадратическую погрешность измерения, вес которого равен единице.

Выразим μ через истинные погрешности Δ.

Пусть измерению с весом p соответствует средняя квадратическая погрешность m. На основании свойства весов можно написать

$$\frac{p}{1} = \frac{\mu^2}{m^2}.$$

Откуда

$$p = \frac{\mu^2}{m^2}, \qquad (8.61)$$

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}, \qquad (8.62)$$

$$\mu = m\sqrt{p}\cdot \qquad (8.63)$$

Пусть имеется ряд измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Составим вспомогательные функции, найдем их истинные и средние квадратические погрешности

$$u_i = l_i\sqrt{p_i}; \quad \Delta u_i = \Delta_i\sqrt{p_i}; \quad m_{u_i} = m_i\sqrt{p_i} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

В соответствии с (8.63) $m_{u_i} = \mu$, следовательно, функции равноточные и имеют веса, равные единице.

На основании формулы (11) для равноточных измерений можно написать

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta u^2]}{n}}$$

или

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}. \qquad (8.64)$$

Вопрос 8.13. Среднее весовое. Средняя квадратическая погрешность

и вес среднего весового.

Рассмотрим обработку результатов неравноточных измерений одной и той же величины.

Пусть получено n измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, с весами $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Результат любого измерения l_i можно рассматривать как среднее арифметическое из p_i воображаемых измерений $l_i^{(1)}, l_i^{(2)}, \ldots, l_i^{(p_i)}$ каждое с весом единица, т. е.

$$l_i = \frac{l_i^{(1)} + l_i^{(2)} + \ldots + l_i^{(p_i)}}{p_i}. \qquad (8.65)$$

Таким образом, измерения можно свести к равноточным и окончательное значение вычислить по формуле среднего арифметического

$$L_B = \frac{l_1^{(1)} + l_1^{(2)} + \ldots + l_1^{(P_1)} + l_2^{(1)} + l_2^{(2)} + \ldots + l_2^{(P_2)} + \ldots + l_n^{(1)} + l_n^{(2)} + \ldots + l_n^{(P_n)}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}. \qquad (8.66)$$

Из (8.65) следует, что

$$l_i^{(1)} + l_i^{(2)} + \ldots + l_i^{(p_i)} = p_i l_i.$$

Подставляя в (8.66), получим

$$L_B = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \qquad (8.67)$$

Величину L_B называют средним весовым значением (весовым средним, средневзвешенным, общей арифметической срединой).

Для упрощения расчетов вводят приближенное значение l_0, находят остатки $\varepsilon_i = l_i - l_0$, а затем среднее весовое по формуле

$$L_B = l_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}. \qquad (8.68)$$

Величина $[p]$ – сумма весов, а следовательно, общее число измерений с весом единица, из которых получено среднее арифметическое. Поэтому вес среднего весового

$$P_B = [p]. \qquad (8.69)$$

Для нахождения средней квадратической погрешности среднего весового воспользуемся формулой

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}.$$

В результате получим

$$M_B = \frac{\mu}{\sqrt{P_B}}$$

или

$$M_B = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (8.70)$$

Вопрос 8.14. Поправки неравноточных измерений одной и той же величины и их свойства. Оценка точности неравноточных измерений и среднего весового по поправкам.

Поправки неравноточных измерений одной и той же величины определяют по формуле

$$v_i = L_B - l_i. \qquad (8.71)$$

Запишем поправки для всех n измерений, умножим на соответствующие веса и сложим

$$v_1 = L_B - l_1 \quad |p_1,$$

$$v_2 = L_B - l_2 \quad |p_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = L_B - l_n \quad |p_n,$$

$$[pv] = L_B\,[p] - [pl].$$

Подставляя $L_B = \frac{[pl]}{[p]}$, получим

$$[pv] = 0. \qquad (8.72)$$

Это первое свойство поправок неравноточных измерений. Равенство (72) контролирует правильность вычисления L_B и v.

При округлении L_B получим равенство

$$[pv] = [p]\,w\,, \qquad (8.73)$$

где w – погрешность округления.

Во всяком случае $|[pv]| \leq 0{,}5[p]$ единицы последнего знака L_B.

Второе свойство поправок для неравноточных измерений одной и той же величины выражается равенством

$$[pv^2] = min. \tag{8.74}$$

Для оценки точности неравноточных измерений по поправкам используют формулы

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \tag{8.75}$$

$$M_B = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}, \tag{8.76}$$

где μ – средняя квадратическая погрешность единицы веса;

M_B – средняя квадратическая погрешность среднего весового.

Вычисления контролируются по формуле

$$[p\,v^2] = -[pvl] = -[pv\varepsilon].$$

Если L_B округлено, то

$$[p\,v^2] = -[pv\varepsilon] + (L_B - l_0)[pv].$$

Для приближенного контроля можно пользоваться неравенством $|[p\,v^2]+[pv\varepsilon]| \leq 0{,}5\ |[p\varepsilon]|$ единицы последнего знака L_B.

Вопрос 8.15. Определение средней квадратической погрешности единицы веса по разностям двойных неравноточных измерений.

Пусть при двойном измерении n величин получены результаты

$l_1,\ l_1^{/}$ каждое с весом p_1,
$l_2,\ l_2^{/}$ -“- p_2,
… …. … … … …
$l_n,\ l_n^{/}$ -“- p_n.

Составим разности

$$d_1 = l_1 - l_1^{/},$$
$$d_2 = l_2 - l_2^{/},$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$d_n = l_n - l_n^{/}.$$

Полученные разности являются истинными погрешностями самих разностей, поэтому можно записать

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}.$$

Каждая разность $d_i = l_i - l_i^{/}$ является функцией равноточных измерений с весом p_i.

Следовательно, $p_{d_i} = \frac{p_i}{2}$ и формула примет вид

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \tag{8.79}$$

При наличии систематических погрешностей их предварительно исключают по формуле

$$\partial_i = d_i - \Theta_i. \tag{8.80}$$

После исключения систематических погрешностей среднюю квадратическую погрешность единицы веса находят по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\partial^2]}{2(n-1)}}. \tag{8.81}$$

Вопрос 8.16. Оценка точности измерения углов и превышений по невязкам в полигонах и ходах

Во всех замкнутых и разомкнутых теодолитных ходах и полигонах угловые невязки являются истинными погрешностьми суммы измеренных углов. Поэтому для оценки точности можно воспользоваться формулой

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}}.$$

Если вес измерения одного угла принять равным единице, то вес суммы n углов найдется по формуле

$$p = \frac{1}{n}.$$

Подставляя в предыдущую формулу это значение веса, заменяя Δ на f_β и n на число полигонов N, получим

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right]}{N}}. \tag{8.82}$$

Здесь μ является средней квадратической погрешностью измерения одного угла, т.к. за единицу веса принят вес одного угла. Поэтому формулу (8.82) можно записать иначе

$$m = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right]}{N}}, \qquad (8.83)$$

где f_β – невязки в полигонах или ходах;

n – число углов в полигоне или ходе;

N – число полигонов или ходов.

Для триангуляции n =3, поэтому

$$m = \sqrt{\frac{[f_\beta^2]}{3N}}. \qquad (8.84)$$

Для четырехугольников

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[f_\beta^2]}{N}}. \qquad (8.85)$$

Аналогичными рассуждениями можно получить формулу для оценки точности превышений геометрического нивелирования.

Если сумме превышений на 1 км хода придать вес, равный единице, то вес суммы превышений хода длиной L км определится по формуле

$$p = \frac{1}{L},$$

а средняя квадратическая погрешность единицы веса (средняя квадратическая погрешность в сумме превышений на 1 км хода) найдется по формуле

$$m_{км} = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{L}\right]}{N}}, \qquad (8.86)$$

где f_h – невязки в превышениях;

L – длины ходов в км;

N – число полигонов или ходов.

В качестве единицы веса можно взять вес превышения на одной станции. Тогда вес суммы превышений из n станций будет равен $\frac{1}{n}$ и формула примет вид

$$m_h = \sqrt{\frac{\left[\frac{f^2}{n}\right]}{N}}. \qquad (8.87)$$

Если на 1 км хода приходится k станций, то

$$m_{км} = m_h\sqrt{k}. \qquad (8.88)$$