



## Лабораторная работа №11. Уравнивание системы нивелирных ходов

**Задание.** Уравнять нивелирную сеть, изображенную на рис. 3.1.

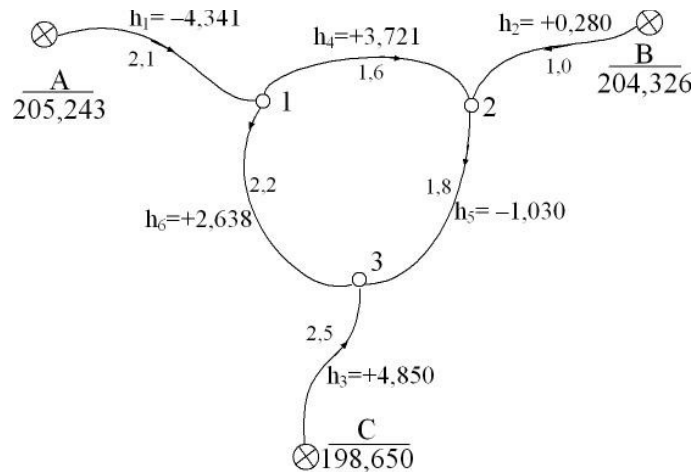


Рис. 3.1. Схема сети

На схеме показаны высоты исходных реперов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , суммы превышений по ходам, длины ходов в километрах (в знаменателе) и направления ходов (стрелками). Приведенный рисунок соответствует нулевому варианту. Для других вариантов необходимо изменить суммы превышений и длины в звеньях 1–3 и 2–3, выбрав их из табл. 3.1.

Т а б л и ц а 3.1. Исходные данные (сумма превышений  $h$ , длина звеньев  $L$ , км)

Вариант	Звено 1–3		Звено 2–3		Вариант	Звено 1–3		Звено 2–3	
	$h_6$	$L$	$h_5$	$L$		$h_6$	$L$	$h_5$	$L$
1	2,640	2,3	-1,028	1,9	14	2,664	2,1	-1,000	1,7
2	2,642	2,4	-1,027	2,0	15	2,667	2,0	-1,006	3,2
3	2,644	2,5	-1,026	2,1	16	2,637	1,9	-1,005	3,3
4	2,646	2,6	-1,025	2,2	17	2,635	1,8	-1,008	3,4
5	2,650	2,7	-1,024	2,3	18	2,632	1,7	-1,006	3,5
6	2,651	2,8	-1,022	2,4	19	2,630	2,4	-1,031	3,6
7	2,652	2,9	-1,020	2,6	20	2,629	2,3	-1,032	3,7
8	2,653	3,0	-1,018	2,5	21	2,628	2,1	-1,033	3,8
9	2,654	3,1	-1,016	2,7	22	2,627	1,9	-1,032	3,9
10	2,656	3,2	-1,015	2,8	23	2,626	1,8	-1,033	4,0
11	2,658	3,3	-1,013	2,9	24	2,627	3,6	-1,034	1,8
12	2,660	3,4	-1,011	3,0	25	2,630	3,7	-1,035	1,7
13	2,663	3,5	-1,009	1,8					

На схеме сети приведены высоты  $H_A, H_B, H_C$  исходных реперов  $A, B, C$ , суммы измеренных превышений  $h$  по ходам и длины ходов в километрах. Направления ходов показаны стрелками. Выберем в качестве необходимых неизвестных высоты узловых точек 1, 2, 3. Выразим их через приближенные значения и поправки:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \delta x_1, \\ x_2 &= x_2^0 + \delta x_2, \\ x_3 &= x_3^0 + \delta x_3. \end{aligned} \right\}$$

Найдем приближенные значения неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} x_1^0 &= H_A + h_1 = 200,302, \\ x_2^0 &= H_B + h_2 = 204,606, \\ x_3^0 &= H_C + h_3 = 203,500. \end{aligned} \right\}$$

Составим уравнения поправок вида

$$a_i \delta x_1 + b_i \delta x_2 + c_i \delta x_3 + l_i = v_i. \quad (3.1)$$

Из рис. 3.1 следует:

$$h_1 + v_1 = x_1 - H_A = x_1^0 + \delta x_1 - H_A.$$

Отсюда

$$v_1 = x_1^0 + \delta x_1 - (H_A + h_1) = \delta x_1.$$

Аналогично получим:

$$v_2 = x_2^0 + \delta x_2 - (H_B + h_2) = \delta x_2,$$

$$v_3 = x_3^0 + \delta x_3 - (H_C + h_3) = \delta x_3,$$

$$v_4 = x_2^0 + \delta x_2 - x_1^0 - \delta x_1 - h_4 = -\delta x_1 + \delta x_2 - 17,$$

$$v_5 = x_3^0 + \delta x_3 - x_2^0 - \delta x_2 - h_5 = -\delta x_2 + \delta x_3 - 76,$$

$$v_6 = x_3^0 + \delta x_3 - x_1^0 - \delta x_1 - h_6 = -\delta x_1 + \delta x_3 - 40.$$

Последние числа – это свободные члены, выраженные в миллиметрах. Например, для  $v_4$  находим:

$$x_2^0 - x_1^0 - h_4 = 204606 - 200902 - 3721 = -17.$$

Запишем полученную систему уравнений в виде таблицы с коэффициентами при неизвестных (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2. Система уравнений поправок

№ изме- рений	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$l_i$	$S_i$	$v_i$	$p_i$
1	1	0	0	0	1	-11,5	2,4
2	0	1	0	0	1	-8,8	5,0
3	0	0	1	0	1	+35,7	2,0
4	-1	1	0	-17	-17	-14,3	3,1
5	0	-1	1	-76	-76	-31,5	2,8
6	-1	0	1	-40	-40	+7,2	2,3
$\Sigma$	-1	1	3	-133	-130	$[pv^2]=6785$	
$\delta x_j$	-11,5 $[pav]=+0,17$	-8,8 $[pbv]=-0,13$	35,7 $[pcv]=-0,24$			$[pvl]=6794$	

Столбец  $S_i$  необходим для контроля составления нормальных уравнений. В последнем столбце записываем веса превышений по ходам, как величины, обратные длинам ходов. В данном случае за единицу веса можно принять вес суммы превышений хода длиной 5 км. Тогда

$$p_1 = \frac{5}{2,1} = 2,4; \quad p_2 = \frac{5}{1,0} = 5,0 \text{ и т. д.}$$

Столбец  $v_i$  и строка  $\delta x_j$  пока остаются свободными.

Далее вычисляем коэффициенты нормальных уравнений с контролем методом сумм (табл. 3.3).

Т а б л и ц а 3.3. Коэффициенты системы нормальных уравнений

	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$S]$	Контроль
$[pa$	7,8	-3,1	-2,3	144,7	147,1	0
$[pb$		10,9	-2,8	160,1	165,1	0
$[pc$			7,1	-304,8	-302,8	0
$[pl$				20748,7	20748,7	0
$[pS$					20758,1	0

На схеме записаны коэффициенты нормальных уравнений, начиная с квадратичных. При контроле суммируют коэффициенты, стоящие в одном столбце и строке с квадратичными. Например, для третьего уравнения получим:  $-2,3 - 2,8 + 7,1 - 304,8 = 302,8$ . Эта сумма точно равна  $[pcS]$  и в графе «Контроль» ставится 0.

Решение нормальных уравнений выполним по способу Гаусса (табл. 3.4).

Т а б л и ц а 3.4. Решение системы нормальных уравнений

$\delta x_1$	$\delta x_2$	$\delta x_3$	$l$	$S$	Контроль
7,8	-3,1	-2,3	144,7	147,1	
(-1)	+0,397	+0,295	-18,551	-18,859	0
$\delta x_1 = -11,502$	9,67	-3,71	217,55	223,50	+0,01
	(-1)	+0,384	-22,497	-23,113	0
	$\delta x_2 = -8,783$	5,00	-178,57	-173,58	-0,01
		(-1)	+35,714	+34,716	-0,02
		$\Delta x_3 = 35,714$	6792,70	6792,53	+0,17
				6792,18	

Практически задача решается так. Выписываем на схему коэффициенты первого уравнения из табл. 3.3 и делим их на квадратичный коэффициент с обратным знаком. Получаем первое элиминационное уравнение (подчеркнуто), контролируем вычисления. Находим преобразованные коэффициенты второго уравнения по правилам раскрытия алгоритма Гаусса:

$$0,397(-3,1) + 10,9 = 9,67; \quad 0,397(-2,3) - 2,8 = -3,71;$$

$$0,397 \cdot 144,7 + 160,1 = 217,55; \quad 0,397 \cdot 147,1 + 165,1 = 233,50.$$

Контролируем вычисления. Делим полученные коэффициенты на квадратичный 9,67 с обратным знаком. Получаем второе элиминационное уравнение (подчеркнуто).

Находим преобразованные коэффициенты третьего уравнения:

$$0,295(-2,3) + 0,384(-3,71) + 7,1 = 5,00,$$

$$0,295 \cdot 144,7 + 0,384 \cdot 217,55 - 304,8 = -178,57,$$

$$0,295 \cdot 147,1 + 0,384 \cdot 223,50 - 302,8 = -173,58.$$

Контролируем вычисления. Находим коэффициенты третьего элиминационного уравнения. В целях контроля раскрываем алгоритмы Гаусса  $[pll \cdot 3]$ ,  $[plS \cdot 3]$  и  $[pSS \cdot 3]$ . Получаем соответственно 6792,70; 6792,53 и 6792,18.

Теоретически эти числа должны быть равны. Однако за счет округления коэффициентов могут быть небольшие расхождения. В данном случае сходятся первые четыре цифры, что является вполне достаточным.

Последнее элиминационное уравнение можно записать так:  $-\delta x_3 + 35,714 = 0$ . Отсюда  $\delta x_3 = 35,714$ .

Подставляя  $\delta x_3$  во второе элиминационное уравнение, найдем  $\delta x_2 = -8,783$ . Подставляя  $\delta x_3$  и  $\delta x_2$  в первое элиминационное уравнение, найдем  $\delta x_1 = -11,502$ . Для заключительного контроля подставим  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$  и  $\delta x_3$  в первое уравнение:  $7,8(-11,502) - 3,1(-8,783) - 2,3 \cdot 35,714 + 144,7 = 0,070$ . Учитывая, что свободные члены выражены в миллиметрах, такое расхождение вполне допустимо.

Далее вычисляем высоты узловых точек:

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1 = 200,902 - 0,012 = 200,890,$$

$$x_2 = x_2^0 + \delta x_2 = 204,606 - 0,009 = 204,597,$$

$$x_3 = x_3^0 + \delta x_3 = 203,500 + 0,036 = 203,536.$$

Найденные значения  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$ ,  $\delta x_3$  переписываем в табл. 3.2 и по формуле (3.1) вычисляем поправки в измеренные суммы превышений.

Вычисление поправок контролируется по формулам  $[pav] = 0$ ,  $[pbv] = 0$ ,  $[pcv] = 0$ . В данном случае вместо нулей в правой части получим соответственно: +0,17, -0,13, -0,24, что объясняется округлением поправок.

Для оценки точности результатов измерений вычислим среднюю квадратическую погрешность единицы веса по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n - k}},$$

где  $n$  – число измерений (6);

$k$  – число необходимых неизвестных (3).

По данным табл. 3.2,  $[pv^2] = 6785$ . Отметим, что теоретически должны выполняться равенства

$$[pv^2] = [plv] = [pll \cdot 3] = [plS \cdot 3] = [pSS \cdot 3].$$

В данном случае  $[pv^2]$  несколько отличается из-за округления поправок. В результате получим:  $\mu = 48$  мм. С такой средней квадратической погрешностью находится сумма превышений в ходе длиной 5 км. Средняя квадратическая погрешность на 1 км хода составит  $\frac{48}{\sqrt{5}} = 21$  мм.

Оценка точности высот узловых точек в данном задании не предусмотрена.

### Вопросы для самопроверки

1. Чем определяется число уравнений поправок в параметрическом способе?
2. Что называется параметрами?
3. Как определить свободные члены уравнений поправок?
4. Каков контроль вычисления поправок превышений в параметрическом способе уравнивания?