Лабораторная работа №14. Уравнивание системы нивелирных ходов

Задание. Уравнять нивелирную сеть, изображенную на рис. .1.

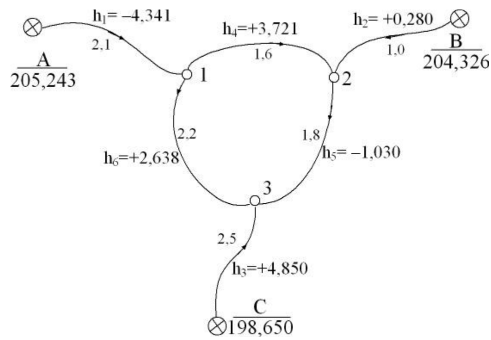

Рис. .1. Схема сети

На схеме показаны высоты исходных реперов *A*, *B*, *C*, суммы превышений по ходам, длины ходов в километрах (в знаменателе) и направления ходов (стрелками). Приведенный рисунок соответствует нулевому варианту. Для других вариантов необходимо изменить суммы превышений и длины в звеньях 1–3 и 2–3, выбрав их из табл. .1.

Т а б л и ц а 1. **Исходные данные (сумма превышений *h*, длина звеньев *L*, км)**

Вариант	Звено 1–3		Звено 2–3		Вариант	Звено 1–3		Звено 2–3	
	h_6	L	h_5	L		h_6	L	h_5	L
1	2,640	2,3	–1,028	1,9	14	2,664	2,1	–1,000	1,7
2	2,642	2,4	–1,027	2,0	15	2,667	2,0	–1,006	3,2
3	2,644	2,5	–1,026	2,1	16	2,637	1,9	–1,005	3,3
4	2,646	2,6	–1,025	2,2	17	2,635	1,8	–1,008	3,4
5	2,650	2,7	–1,024	2,3	18	2,632	1,7	–1,006	3,5
6	2,651	2,8	–1,022	2,4	19	2,630	2,4	–1,031	3,6
7	2.652	2.9	–1,020	2,6	20	2,629	2,3	–1,032	3,7
8	2,653	3,0	–1,018	2,5	21	2,628	2,1	–1,033	3,8
9	2,654	3,1	–1,016	2,7	22	2,627	1,9	–1.032	3,9
10	2,656	3,2	–1,015	2,8	23	2,626	1,8	–1,033	4,0
11	2.658	3.3	–1,013	2,9	24	2,627	3,6	–1,034	1,8
12	2,660	3,4	–1,011	3,0	25	2,630	3,7	–1,035	1,7
13	2,663	3,5	–1,009	1,8					

На схеме сети приведены высоты H_A, H_B, H_C исходных реперов A, B, C, суммы измеренных превышений h по ходам и длины ходов в километрах. Направления ходов показаны стрелками. Выберем в качестве необходимых неизвестных высоты узловых точек 1, 2, 3. Выразим их через приближенные значения и поправки:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \delta x_1, \\ x_2 &= x_2^0 + \delta x_2, \\ x_3 &= x_3^0 + \delta x_3. \end{aligned}\right\}$$

Найдем приближенные значения неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} x_1^0 &= H_A + h_1 = 200{,}302, \\ x_2^0 &= H_B + h_2 = 204{,}606, \\ x_3^0 &= H_C + h_3 = 203{,}500. \end{aligned}\right\}$$

Составим уравнения поправок вида

$$a_i\delta x_1 + b_i\delta x_2 + c_i\delta x_3 + l_i = v_i. \tag{1.1}$$

Из рис. 3.1 следует:

$$h_1 + v_1 = x_1 - H_A = x_1^0 + \delta x_1 - H_A.$$

Отсюда

$$v_1 = x_1^0 + \delta x_1 - (H_A + h_1) = \delta x_1.$$

Аналогично получим:

$$\begin{aligned} v_2 &= x_2^0 + \delta x_2 - (H_B + h_2) = \delta x_2, \\ v_3 &= x_3^0 + \delta x_3 - (H_C + h_3) = \delta x_3, \\ v_4 &= x_2^0 + \delta x_2 - x_1^0 - \delta x_1 - h_4 = -\delta x_1 + \delta x_2 - 17, \\ v_5 &= x_3^0 + \delta x_3 - x_2^0 - \delta x_2 - h_5 = -\delta x_2 + \delta x_3 - 76, \\ v_6 &= x_3^0 + \delta x_3 - x_1^0 - \delta x_1 - h_6 = -\delta x_1 + \delta x_3 - 40. \end{aligned}$$

Последние числа – это свободные члены, выраженные в миллиметрах. Например, для v_4 находим:

$$x_2^0 - x_1^0 - h_4 = 204606 - 200902 - 3721 = -17.$$

Запишем полученную систему уравнений в виде таблицы с коэффициентами при неизвестных (табл. 3.2).

Т а б л и ц а 3.2. **Система уравнений поправок**

№ измерений	a_i	b_i	c_i	l_i	S_i	v_i	p_i
1	1	0	0	0	1	–11,5	2,4
2	0	1	0	0	1	–8,8	5,0
3	0	0	1	0	1	+35,7	2,0
4	–1	1	0	–17	–17	–14,3	3,1
5	0	–1	1	–76	–76	–31,5	2,8
6	–1	0	1	–40	–40	+7,2	2,3
Σ	–1	1	3	–133	–130	$[pv^2]$=6785	
δx_j	–11,5	–8,8	35,7			$[pvl]$=6794	
	$[pav]$=+0,17	$[pbv]$=–0,13	$[pcv]$=–0,24				

Столбец S_i необходим для контроля составления нормальных уравнений. В последнем столбце записываем веса превышений по ходам, как величины, обратные длинам ходов. В данном случае за единицу веса можно принять вес суммы превышений хода длиной 5 км. Тогда

$$p_1 = \frac{5}{2,1} = 2,4; \quad p_2 = \frac{5}{1,0} = 5,0 \text{ и т. д.}$$

Столбец v_i и строка δx_j пока остаются свободными.

Далее вычисляем коэффициенты нормальных уравнений с контролем методом сумм (табл. 3.3).

Т а б л и ц а 3.3. **Коэффициенты системы нормальных уравнений**

	$a]$	$b]$	$c]$	$l]$	$S]$	Контроль
$[pa$	7,8	–3,1	–2,3	144,7	147,1	0
$[pb$		10,9	–2,8	160,1	165,1	0
$[pc$			7,1	–304,8	–302,8	0
$[pl$				20748,7	20748,7	0
$[pS$					20758,1	0

На схеме записаны коэффициенты нормальных уравнений, начиная с квадратичных. При контроле суммируют коэффициенты, стоящие в одном столбце и строке с квадратичными. Например, для третьего уравнения получим: – 2,3 – 2,8 + 7,1 – 304,8 = 302,8. Эта сумма точно равна $[pcS]$ и в графе «Контроль» ставится 0.

Решение нормальных уравнений выполним по способу Гаусса (табл. 3.4).

Т а б л и ц а 3.4. **Решение системы нормальных уравнений**

δx_1	δx_2	δx_3	l	S	Контроль
7,8	–3,1	–2,3	144,7	147,1	
(–1)	+0,397	+0,295	–18,551	–18,859	0
δx_1=–11,502	9,67	–3,71	217,55	223,50	+0,01
	(–1)	+0,384	–22,497	–23,113	0
	δx_2=–8,783	5,00	–178,57	–173,58	–0,01
		(–1)	+35,714	+34,716	–0,02
		Δx_3= 35,714	6792,70	6792,53	+0,17
				6792,18	

Практически задача решается так. Выписываем на схему коэффициенты первого уравнения из табл. 3.3 и делим их на квадратичный коэффициент с обратным знаком. Получаем первое элиминационное уравнение (подчеркнуто), контролируем вычисления. Находим преобразованные коэффициенты второго уравнения по правилам раскрытия алгоритма Гаусса:

$$0{,}397\ (-3{,}1) + 10{,}9 = 9{,}67; \quad 0{,}397\ (-2{,}3) - 2{,}8 = -3{,}71;$$
$$0{,}397 \cdot 144{,}7 + 160{,}1 = 217{,}55; \quad 0{,}397 \cdot 147{,}1 + 165{,}1 = 233{,}50.$$

Контролируем вычисления. Делим полученные коэффициенты на квадратичный 9,67 с обратным знаком. Получаем второе элиминационное уравнение (подчеркнуто).

Находим преобразованные коэффициенты третьего уравнения:

$$0{,}295\ (-2{,}3) + 0{,}384\ (-3{,}71) + 7{,}1 = 5{,}00,$$
$$0{,}295 \cdot 144{,}7 + 0{,}384 \cdot 217{,}55 - 304{,}8 = -178{,}57,$$
$$0{,}295 \cdot 147{,}1 + 0{,}384 \cdot 223{,}50 - 302{,}8 = -173{,}58.$$

Контролируем вычисления. Находим коэффициенты третьего элиминационного уравнения. В целях контроля раскрываем алгоритмы Гаусса [$pll\cdot 3$], [$plS\cdot 3$] и [$pSS\cdot 3$]. Получаем соответственно 6792,70; 6792,53 и 6792,18.

Теоретически эти числа должны быть равны. Однако за счет округления коэффициентов могут быть небольшие расхождения. В данном случае сходятся первые четыре цифры, что является вполне достаточным.

Последнее элиминационное уравнение можно записать так: $-\delta x_3 + 35{,}714 = 0$. Отсюда $\delta x_3 = 35{,}714$.

Подставляя δx_3 во второе элиминационное уравнение, найдем $\delta x_2 = = -8{,}783$. Подставляя δx_3 и δx_2 в первое элиминационное уравнение, найдем $\delta x_1 = -11{,}502$. Для заключительного контроля подставим δx_1, δx_2 и δx_3 в первое уравнение: 7,8 (–11,502) –3,1 (–8,783) –2,3 35,714 + + 144,7 = 0,070. Учитывая, что свободные члены выражены в миллиметрах, такое расхождение вполне допустимо.

Далее вычисляем высоты узловых точек:

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1 = 200{,}902 - 0{,}012 = 200{,}890,$$
$$x_2 = x_2^0 + \delta x_2 = 204{,}606 - 0{,}009 = 204{,}597,$$
$$x_3 = x_3^0 + \delta x_3 = 203{,}500 + 0{,}036 = 203{,}536.$$

Найденные значения δx_1, δx_2, δx_3 переписываем в табл. 3.2 и по формуле (3.1) вычисляем поправки в измеренные суммы превышений.

Вычисление поправок контролируется по формулам [pav] = 0, [pbv] = 0, [pcv] = 0. В данном случае вместо нулей в правой части получим соответственно: +0,17, –0,13, –0,24, что объясняется округлением поправок.

Для оценки точности результатов измерений вычислим среднюю квадратическую погрешность единицы веса по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}},$$

где n – число измерений (6);

k – число необходимых неизвестных (3).

По данным табл. 3.2, [pv^2] = 6785. Отметим, что теоретически должны выполняться равенства

$$[pv^2] = [plv] = [pll \cdot 3] = [plS \cdot 3] = [pSS \cdot 3].$$

В данном случае $[pv^2]$ несколько отличается из-за округления поправок. В результате получим: μ = 48 мм. С такой средней квадратической погрешностью находится сумма превышений в ходе длиной 5 км. Средняя квадратическая погрешность на 1 км хода составит $\frac{48}{\sqrt{5}} = \quad = 21$ мм.

Оценка точности высот узловых точек в данном задании не предусмотрена.

Вопросы для самопроверки

1. Чем определяется число уравнений поправок в параметрическом способе?
2. Что называется параметрами?
3. Как определить свободные члены уравнений поправок?
4. Каков контроль вычисления поправок превышений в параметрическом способе уравнивания?