ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Линейные уравнения

Рациональными уравнениями называются уравнения вида P(x) = 0 или $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ являются многочленами, причем $Q(x)\neq 0$. Простейшими рациональными уравнениями вида $P(x)=0$ являются линейные и квадратные уравнения.

Линейным уравнением с одной переменной называется уравнение вида $ax=b$, где x – переменная, a,b – некоторые числа.

Рассмотрим возможные случаи при решении линейного уравнения $ax=b$:

1) $a\neq 0\Rightarrow$ уравнение имеет единственное решение, которое находим, разделив обе части уравнения на коэффициент $a\neq 0\Rightarrow$ $x=\frac{b}{a}$;

2) $a=0;b=0\Rightarrow$ уравнение принимает вид $0\cdot x=0$ и имеет бесконечное множество решений, т.е. x – любое число из интервала $(-\infty;+\infty)$;

3) $a=0;b\neq 0\Rightarrow$ уравнение принимает вид $0\cdot x=b$ и не имеет ни одного решения.

Для решения уравнения, содержащего переменную x в первой степени, необходимо все члены уравнения, содержащие x , перенести в одну часть уравнения, а члены, не содержащие переменную, – в другую часть, привести подобные слагаемые. В итоге получим простейшее линейное уравнение $ax=b$.

Примеры. Решить уравнения.

1. $5x-8=x+11$. Для решения уравнения выполним следующие действия:

-перенесем x из правой части уравнения в левую с противоположным знаком: $5x-x-8=11$;

-перенесем слагаемое -8 из левой части уравнения в правую с противоположным знаком: $5x-x=11+8$;

-приведем подобные слагаемые: $4x=19$;

-разделим обе части уравнения на коэффициент при , равный 4, получим: $x = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$.

Ответ: $4\frac{3}{4}$.

2. $4x + 2 = \frac{1}{2}(2x + 6)$. Раскроем скобки в правой части уравнения:

$$4x + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot 6 \Leftrightarrow 4x + 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1} \Leftrightarrow 4x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow 4x - x == 3 - 2.$$

Приведем подобные слагаемые: $3x = 1$. Разделим обе части уравнения на коэффициент при x, равный 3, получим $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Квадратные уравнения

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$,

где x – переменная, a, b, c – некоторые числа, коэффициенты квадратного уравнения, причем $a \neq 0$.

При решении квадратного уравнения составляют выражение $D = b^2 - 4ac$ из его коэффициентов, которое называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

Различают три случаи при решении квадратного уравнения в зависимости от значений дискриминанта D:

1) если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$;

2) если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет два равных действительных корня: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$;

3) если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Примеры. Решить уравнения.

1. $2x^2 - x - 1 = 0.$

Для решения уравнения выполним следующие действия:

– вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$, где $a = 2, b = -1, c = -1,$ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9, \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3;$

– так как $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня, которые вычислим по формулам:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1+3}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; 1.$

2. $x^2 - 12x + 36 = 0.$

Вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$, где $a = 1, b = -12, c = 36,$ $D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 144 - 144 = 0.$

Так как $D = 0$, то уравнение имеет два равных действительных корня, которые вычислим по формуле

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2} = 6.$$

Ответ: 6.

3. $2x^2 + x + 2 = 0.$

Вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$, где $a = 2, b = 1, c = 2,$ $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = -15.$

Так как $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: корней нет.

Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители.

Квадратным трехчленом называется выражение вида $ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0.$

Корнями квадратного трехчлена называются корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, дискриминант которого $D=b^2-4ac\geq 0.$ Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то справедлива формула $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

Для разложения квадратного трехчлена на линейные множители необходимо:

– вычислить дискриминант квадратного трехчлена $D=b^2-4ac$;

– если $D>0,$ решить уравнение $ax^2+bx+c=0$: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и применить формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$;

– если $D=0,$ то квадратный трехчлен $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$, где x_0 – корень квадратного трехчлена, равный $x_0=-\dfrac{b}{2a}$;

– если $D<0,$ то разложить на множители квадратный трехчлен нельзя.

Примеры. Разложить на множители квадратный трехчлен.

1. $x^2+8x-9.$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения $x^2+8x-9=0$, где $a=1, b=8, c=-9$:

$$D=b^2-4ac=8^2-4\cdot1\cdot(-9)=64+36=100, \sqrt{D}=10$$

и найдем корни: $x_1=\dfrac{-8-10}{2\cdot1}=-9$ и $x_2=\dfrac{-8+10}{2\cdot1}=1.$

Используя формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, запишем разложение $x^2+8x-9=(x+9)(x-1).$

Ответ: $(x+9)(x-1).$

2. $-2x^2+5x+7.$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения $-2x^2+5x+7=0$, где $a=-2, b=5, c=7$:

$$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot(-2)\cdot7=25+56=81, \sqrt{D}=9$$

найдем корни: $x_1 = \frac{-5-9}{2\cdot(-2)} = \frac{-14}{-4} = \frac{7}{2}$ и $x_2 = \frac{-5+9}{2\cdot(-2)} = \frac{4}{-4} = -1.$

Используя формулу $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, запишем разложение:

$$-2x^2+5x+7 = -2\left(x-\frac{7}{2}\right)(x+1) = \left(-2x+2\cdot\frac{7}{2}\right)(x+1) = (7-2x)(x+1).$$

Ответ: $(7-2x)(x+1)$.

Системы рациональных уравнений

Равенство, содержащее две переменные, называется *уравнением с двумя переменными.* Два или несколько уравнений с двумя переменными образуют *систему уравнений с двумя переменными.*

Решением системы уравнений с двумя переменными называется упорядоченная пара (x_0, y_0) значений переменных, являющаяся решением каждого из уравнения системы. *Решить систему уравнений* – это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Система уравнения называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Система уравнения называется *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Системой двух линейных уравнений с двумя переменными называется система вида $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – любые действительные числа, x, y – переменные системы уравнений.

Рассмотрим один из методов решения системы линейных уравнений – *метод алгебраического сложения.*

Умножив первое уравнение системы на $b_2 \neq 0$, второе уравнение на $-b_1 \neq 0$, получаем равносильную систему: $\begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-c_2b_1 \end{cases}$.

Сложим первое и второе уравнения:

$a_1b_2x-a_2b_1x+b_1b_2y-b_1b_2y=c_1b_2-c_2b_1$

и после приведения подобных членов получим:

$(a_1b_2-a_2b_1)x=(c_1b_2-c_2b_1).$

Если выражение $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, выразим переменную: $x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$.

Таким же способом найдем переменную y. Умножив первое уравнение системы на $a_2 \neq 0$, второе уравнение на $-a_1 \neq 0$,получим равносильную систему: $\begin{cases} a_1a_2x + a_2b_1y = c_1a_2 \\ -a_1a_2x - a_1b_2y = -c_2a_1 \end{cases}$.

Сложим первое и второе уравнения: $a_1a_2x - a_1a_2x + a_2b_1y - a_1b_2y = c_1a_2 - c_2a_1$. После приведения подобных членов получим: $(a_1b_2 - a_2b_1)$

$y = (c_2a_1 - c_1a_2)$. Если выражение $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, выразим переменную:

$$y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Пример. Решить систему уравнений методом сложения

$$\begin{cases} 5x + 2y = 30 \\ 3x + 4y = -3 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение системы на -2:

$$\left.\begin{cases} 5x + 2y = 30 \\ 3x + 4y = -3 \end{cases}\right|^{-2} \Rightarrow \begin{cases} -10x - 4y = -60 \\ 3x + 4y = -3 \end{cases}.$$

Сложим первое и второе уравнения: $-10x + 3x - 4y + 4y = -60 - 3 \Rightarrow -7x = -63 \Rightarrow x = \dfrac{-63}{-7} = 9.$

Для нахождения переменной y подставим найденное значение $x = 9$ в первое уравнение системы: $5 \cdot 9 + 2y = 30$. Из полученного уравнения найдем переменную y:

$$45 + 2y = 30 \Rightarrow 2y = 30 - 45 \Rightarrow 2y = -15 \Rightarrow y = \frac{-15}{2} = -7,5.$$

Ответ: $(9; -7,5)$.

Линейные неравенства.

Перейдем к изучению неравенств, содержащих неизвестную величину, называемую переменной.

Определение. Решением неравенства называется такое значение переменной, которое превращает его в верное числовое неравенство.

Определение. Решить неравенство – это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Решением неравенства чаще всего является числовой промежуток. Такие множества могут быть обозначены одним из трех способов:

– с помощью неравенств;

– штриховкой на числовой оси;

– с помощью круглых и квадратных скобок.

Определение. Неравенством первой степени с одной переменной (линейным неравенством) называют такое неравенство, которое после раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и перенесения всех членов в левую часть принимает вид $ax+b>0$ или $ax+b<0$, где *a, b* – любые числа.

Иначе a и b называют коэффициентами неравенства, x – переменная, которая в линейном неравенстве присутствует лишь в первой степени.

Решим неравенство $ax+b>0$ (1)

Перенесем число b из левой части неравенства в правую, получим $ax>-b$.

Возможны следующие случаи.

1. Если $a>0$, то $x>-\dfrac{b}{a}$.

2. Если $a<0$, то $x<-\dfrac{b}{a}$.

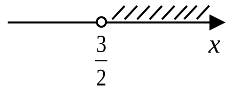
3. Если $a=0$ и $b>0$, то неравенство (1) верно для любого действительного числа x.

4. Если $a=0$ и $b\le 0$, то неравенство (1) решений не имеет.

Пример 1.Решить неравенство $2x-3>0$.

Перенесем свободный член в правую часть $2x>3$. Разделим обе части неравенства на коэффициент при x, т.е. на 2.

Так как $2>0$, то знак неравенства оставляем прежним, $x>\dfrac{3}{2}$. Отметим на числовой прямой числа, большие чем $\frac{3}{2}$. Они будут располагаться правее этого числа. Само число не входит в множество, поэтому отмечаем его “проколотой” точкой.



Штриховкой отмечено множество, которое является решением неравенства. Ответ запишем в виде $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Пример 2. Решить неравенство $2(x-3)+11 \leq 5(4+x)-17$.

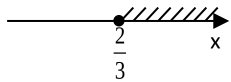
Раскроем скобки $2x-6+11 \leq 20+5x-17$. Приведем подобные слагаемые $2x+5 \leq 5x+3$. Перенесем все члены, содержащие *x*, в левую часть, а члены, не содержащие *x*, – в правую.

$$2x-5x \leq 3-5,$$

$$-3x \leq -2,$$

$$x \geq \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.



Итак, для решения линейного неравенства необходимо:

1) раскрыть скобки;

2) перенести все члены, содержащие переменную, в левую часть, а члены, не содержащие переменную, – в правую;

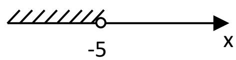
3) привести подобные слагаемые;

4) разделить обе части неравенства на коэффициент при переменной, если он не равен нулю.

Пример 3. Решить неравенство.

Дробь меньше нуля, когда числитель и знаменатель имеют разные знаки. В числителе находится положительное число 7, значит, знаменатель должен быть меньше нуля. Тогда говорят, что исходное неравенство равносильно неравенству

$x+5<0, x<-5.$



Ответ: $(-\infty; -5)$.

Системы линейных неравенств

Если два (или несколько) неравенства рассматривают совместно, то говорят, что они образуют систему неравенств.

Определение. Решить систему неравенств – это значит найти все значения переменной, при которых все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства, или установить, что их нет.

Неравенства, входящие в систему, объединяются фигурной скобкой. Например,

$$\begin{cases} x-3<0, \\ 4<5x. \end{cases}$$

Иногда вместо фигурной скобки используется запись системы в виде двойного неравенства. Например, систему

$$\begin{cases} 2x-3>1 \\ 2x-3<6 \end{cases}$$ можно записать так: $1<2x-3<6$.

Множество решений системы есть пересечение множеств решений, входящих в нее неравенств.

Рассмотрим примеры решения систем линейных неравенств.

Пример 1. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 5(x+1)-x>2x-3, \\ 4(x+1)-2\le 2(2x+1)-x. \end{cases} \quad (1)$$

Решим первое неравенство:

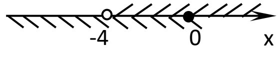
$$5x+5-x>2x-3,$$
$$4x-2x>-3-5,$$
$$2x>-8,$$
$$x>-4.$$

Итак, первое неравенство системы (1) выполняется при $x>-4$. Решим второе неравенство:

$$4x+4-2\le 4x+2-x,$$
$$4x+2\le 3x+2,$$
$$4x-3x\le 2-2, \quad x\le 0.$$

Итак, второе неравенство системы (1) выполняется при $x\le 0$.

С помощью числовой прямой найдем пересечение множеств решений этих неравенств.



Оба неравенства системы (1) верны при $-4<x\le 0$. Значит, числовой интервал $(-4;0]$ и есть множество решений системы (1).

Ответ: $(-4;0]$.

Пример 2. Решить систему неравенств: $\begin{cases} 3(1-x) < 5-4x \\ 10-3x < 1 \end{cases}$.

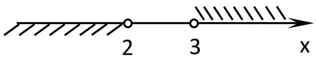
Решим первое неравенство:

$$3-3x < 5-4x,$$

$$4x-3x < 5-3, \quad x < 2.$$

Решим второе неравенство:

$$-3x < -9, \quad x > 3.$$



Неравенства x < 2 и x > 3 не могут выполняться одновременно. Следовательно, данная система не имеет решений. Иначе говорят, что множество решений – пустое множество и обозначают $\{\varnothing\}$.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

Пример 3. Решить двойное неравенство $-1 < 3-2x < 3$.

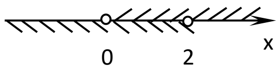
Первый способ решения.

Двойное неравенство эквивалентно системе двух неравенств

$$\begin{cases} 3-2x < 3, \\ 3-2x > -1. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы, получим

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < 2. \end{cases}$$



Пересечение множеств решений неравенств есть числовой интервал (0;2).

Второй способ решения.

Ко всем частям двойного неравенства прибавим (–3):

$$-1-3 < 3-2x-3 < 3-3,$$

$$-4 < -2x < 0.$$

Разделим неравенство на (–2), при этом знаки неравенства изменятся на противоположные: $2 > x > 0$ или $0 < x < 2$.

Ответ: (0;2).

Квадратные неравенства

Определение. Если в левой части неравенства стоит квадратный трехчлен, а в правой – нуль, то такое неравенство называют квадратным. Любое неравенство второй степени можно привести к виду

$$ax^2 + bx + c > 0, \qquad (1)$$

где $a \neq 0$, b, c – любые действительные числа.

Если у нас есть неравенство $a_1x^2 + b_1x + c_1 < 0$, то его можно умножить на (–1). Получится неравенство вида (1).

Напомним, что для квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ величину $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом.

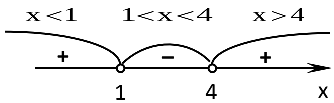
Рассмотрим квадратные неравенства в случае, когда квадратный трехчлен имеет два различных корня, т. е. когда дискриминант квадратного трехчлена положителен, $D > 0$.

Пример. Решить неравенство $x^2 - 5x + 4 > 0$.

Найдем $D = 25 - 16 = 9 > 0$. Корни квадратного трехчлена различ-ны: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 4$ на множители $x^2 - 5x + 4 = (x-1) \cdot (x-4)$ и тогда неравенство примет вид

$$(x-1)(x-4) > 0.$$

Для его решения применим "метод интервалов". Точки $x = 1$ и $x = 4$ разбивают числовую прямую на три интервала.



Двигаясь вдоль числовой прямой справа налево, видим, что на интервале $x > 4$ функция $y = (x-1)(x-4)$ принимает положительные значения, так как в этом случае оба множителя $x - 1$ и $x - 4$ положительны. Убеждаемся в этом следующим образом: из этого промежутка берем одно любое число и подставляем вместо переменной x в левую часть неравенства и вычисляем значение, которое получится при этом. Полученный при вычислении знак отмечаем на рисунке. Из промежутка $x > 4$ взяли число 5, подсчитали $(5-1)(5-4) = 4 > 0$, значит, в этом промежутке знак "+".

На следующем интервале $1 < x < 4$ эта функция принимает отрицательные значения, так как при переходе через точку $x = 4$ множитель $x - 1$ не меняет знака, а множитель $x - 4$ меняет знак. Выберем число $x = 2$, подсчитаем $(2-1)(2-4) = -2 < 0$, значит, отмечаем знак "–".

При переходе через точку $x=1$ функция снова меняет знак, так как в произведении $(x-1)(x-4)$ первый множитель $x-1$ меняет знак, а второй $x-4$ не меняет. В этом интервале выберем число $x=0$, подставим $(0-1)(0-4)=4>0$, отмечаем знак “+”.

Решением исходного неравенства будут промежутки со знаком “+”. Решение данной системы можно записать $x<1$ и $x>4$ или $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

Итак, если квадратный трехчлен, стоящий в левой части квадратного неравенства, имеет два различных корня (т.е. $D>0$), то это неравенство решают следующим образом:

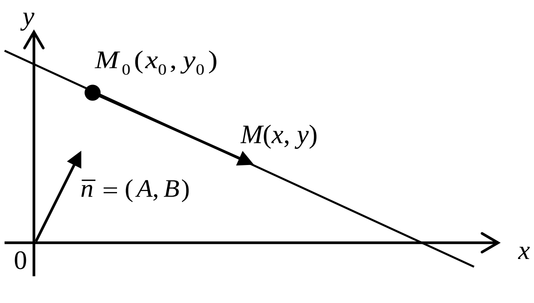
1) находят корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$;
2) записывают неравенство с разложенным на множители квадратным трехчленом: $a(x-x_1)(x-x_2)>0$;
3) отмечают корни на числовой оси;
4) применяют “метод интервалов”, описанный в примере;
5) записывают ответ.

Замечание. Для нестрогих неравенств в ответ нужно включать концы интервалов.

2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнением прямой называется такое уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки этой и только этой прямой.

Прямую на плоскости можно задавать различными способами.



Пусть в системе координат задан вектор $\overline{n}=(A,B)$ и точка $M_0(x_0,y_0)$. Через точку M_0 проведём прямую, перпендикулярную вектору $\overline{n}$, и на этой прямой возьмём произвольную точку $M(x, y)$. Тогда вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0)$ будет перпендикулярен вектору $\overline{n}$. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю:

$$\overline{n}\cdot\overline{M_0M}=0.$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой***. Записав скалярное произведение в координатной форме, получим ***уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору***:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Преобразуем это уравнение и получим ***общее уравнение прямой*** (или ***уравнение прямой в общем виде***): $Ax+By+C=0$, где $C=-Ax_0-By_0$.

Углом наклона α ***прямой*** к оси Ox называется угол, который отсчитывается в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, от положительного направления оси Ox до данной прямой. Тангенс угла наклона называется ***угловым коэффициентом прямой*** и обозначается $k=\mathrm{tg}\alpha$.

Уравнение вида $y=kx+b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Пусть даны точка $M_0(x_0,y_0)$ и угловой коэффициент k. Тогда уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$ называется уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении.

Пусть известны две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Уравнение

$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Тогда угол φ между этими прямыми определяется по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

Если прямые параллельны, то $\varphi = 0°$ и, следовательно, $k_1 = k_2$. Это равенство является условием параллельности двух прямых. Если же прямые перпендикулярны, то $\varphi = 90°$ и $1 + k_1 k_2 = 0$ или $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Это равенство является критерием перпендикулярности двух прямых.

Уравнение $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ называется уравнением прямой в отрезках, где a – отрезок, отсекаемый прямой на оси Ox, а b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2,-3)$ и $M_2(1,-5)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Так как по условию примера $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $x_2 = 1$, $y_2 = -5$, то $\dfrac{x-2}{1-2} = \dfrac{y+3}{-5+3}$, $-2x + y + 7 = 0$.

Пример 2. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y = 3x - 4$ и $y = 2x + 1$.

Решение. Угол между двумя прямыми определяется по формуле $\text{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$. По условию $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$. Подставим в формулу:

$$\text{tg}\varphi = \frac{3-2}{1+2\cdot 3} = \frac{1}{7}, \ \varphi = \text{arctg}\frac{1}{7}.$$

Пример 3. Прямая задана уравнением $3x - 4y + 3 = 0$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1, 4)$ перпендикулярно данной прямой.

Решение. Так как искомая и данная прямые по условию перпендикулярны, то их угловые коэффициенты должны удовлетворять условию перпендикулярности $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Найдём угловой коэффициент k_1 данной прямой: $3x - 4y + 5 = 0$, $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$, $k_1 = \dfrac{3}{4}$. Следовательно,

$k_2 = -\frac{4}{3}$. Подставим в уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом: $y-4=\frac{4}{3}(x+1)$,

$4x + 3y - 8 = 0$. Последнее уравнение является уравнением искомой прямой.

3. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть задано множество $D=\{x\}$ изменения переменной величины x. Если каждому значению величины $x \in D$ соответствует одно определённое значение величины y, то говорят, что на множестве D задана ***функция*** $y = f(x)$, т.е. величина y есть функция величины x.

Величина x называется ***аргументом*** функции y, множество D – ***областью определения функции***.

Примечание. В дальнейшем под областью определения функции $y = f(x)$ будем понимать множество всех тех значений x для которых функция $y = f(x)$имеет смысл.

Так как значение величины $x \in D$ можно брать произвольно, а значение величины y зависит от выбранного значения x, то x называется ***независимой переменной***, а y – ***зависимой переменной***. Множество значений, принимаемых функцией y, называется ***областью значений функции***.

Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты – соответствующими значениями функции.

Значение функции при $x = x_0$ называется ***частным значением функции*** в точке x_0 и обозначается $f(x_0)$.

Пример 1. Вычислить значение функции $y=x^4-3x+1$ при $x=-1$.

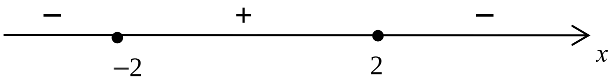
Решение. Частное значение данной функции в точке $x=-1$ равно $y=(-1)^4-3\cdot(-1)+1=5$.

Пример 2. Найти область определения функции $y = \dfrac{5}{1-x}$.

Решение. Так как $1-x \neq 0$, т. е. $x \neq 1$, то $D(y) = (-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$.

Пример 3. Найти область определения функции $y = \sqrt{4-x^2}$.

Решение. Выражение под знаком корня квадратного должно быть неотрицательным, т. е. $4 - x^2 \geq 0$. Решим это неравенство методом интервалов: $(2-x)(2+x) \geq 0$.



Таким образом, $D(y) = [-2,\ 2]$.

Пример 4. Найти область определения функции $y = \dfrac{\sqrt{6-x}}{x-2}$.

Решение. Для данной функции $\begin{cases} 6-x \geq 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$ т. е. $x \leq 6$ и $x \neq 2$. Поэтому $D(y) = (-\infty,\ 2) \cup (2,\ 6]$.

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве $U = \{u\}$, а функция $u = \varphi(x)$– на множестве $X = \{x\}$, причём все значения функции $u \in U$. Тогда переменная y является функцией от x: $y = f(\varphi(x))$. В этом случае y называется ***сложной функцией***, а переменная u – ***промежуточным аргументом***. Например, $y = \sin u$ и $u = 3x-4$. Тогда $y = \sin(3x-4)$ является сложной функцией.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D = \{x\}$ и пусть $G = \{y\}$ – область значений функции. Это означает, что каждому значению $x \in D$ ставится в соответствие единственное значение $y \in G$. Если же каждому значению $y \in G$ соответствует только одно значение $x \in D$, то на множестве G можно определить функцию $x = \varphi(y)$, которая называется ***обратной*** по отношению к функции $y = f(x)$. В этом случае функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ являются ***взаимообратными***. Например, функции $y = 3^x$ и $x = \log_3 y$ являются взаимообратными. Пусть дана функция $y = 3x-4$. Тогда функция

$x=\dfrac{y+4}{3}$ будет обратной для данной, т. е. эти функции являются взаимообратными.

При исследовании функций и построении графиков независимую переменную обратной функции удобно обозначать через x, а зависимую переменную – через y. Тогда взаимообратными являются функции $y=3^x$ и $y=\log_3 x$, $y=3x-4$ и $y=\dfrac{x+4}{3}$. Графики взаимообратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, т.е. относительно прямой $y = x$.

Если независимая переменная x и функция y связаны соотношением $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно y, то y называется ***неявной функцией*** от x, например: $x^2+y^2-9=0$, $3x-4y+5y^3=0$, $2x-4y+5=0$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно близких к x_0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа A. Записывается это следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \text{ или } f(x)=A \text{ при } x\to x_0.$$

В определении предела x_0 может быть любым конечным числом или же одним из символов $-\infty$ или $+\infty$.

При вычислении пределов пользуются следующими правилами:

1) предел постоянной величины равен самой величине, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} C=C;$$

2) предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций при условии, что пределы существуют, т. е. для двух функций справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов при условии, что эти пределы существуют, т. е. для двух функций справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

4) если n – натуральное число, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n;$$

5) постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x\to x_0}(k\cdot f(x)) = k\cdot \lim_{x\to x_0} f(x);$$

6) предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел знаменателя отличен от нуля,

т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая;

2) произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая;

3) произведение ограниченной величины на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

Рассмотрим бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Так как эти бесконечно малые функции могут стремиться к нулю при $x\to x_0$ с разными скоростями, то для их сравнения находится предел отношения этих функций $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. При этом возможны следующие случаи:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A\neq 0$ (A – конечное число), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка;

2) если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x\to x_0$; в этом случае предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них или какую-либо одну заменить им эквивалентными;

3) если предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми.

Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой функцией*** в точке x_0, если для всех значений x, достаточно близких к x_0, соответствующие значения функции по абсолютной величине превосходят любое наперёд заданное сколь угодно большое положительное число, т. е. $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Пусть $f(x)$ есть бесконечно большая функция при $x\to x_0$, тогда функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой функцией при $x\to x_0$. Если $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x\to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой функцией при $x\to x_0$.

Например, функция $\alpha(x)=x^2$ при $x\to 0$ является бесконечно малой функцией. Тогда функция $\dfrac{1}{x^2}$ при $x\to 0$ является бесконечно большой. Функция $f(x)=x^4+1$ при $x\to\infty$ является бесконечно большой. Тогда $\dfrac{1}{x^4+1}$ при $x\to\infty$ будет бесконечно малой функцией.

Предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ отношения бесконечно малых функций может быть конечным, бесконечным или же вообще не существует. В этом случае выражение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x\to x_0$ называется ***неопределённостью вида*** $\dfrac{0}{0}$.

Пусть $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, т. е. $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими функциями в точке x_0. Предел отношения этих функций может быть конечным, бесконечным или вообще не существует. Выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to x_0$ называется ***неопределённостью вида*** $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 1**.** Найти предел функции $f(x)=\frac{5x+6}{x-4}$ при $x\to 1$.

Решение. Подставим предельное значение $x = 4$ в функцию:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x+6}{x-4}=\frac{5\cdot 1+6}{1-4}=-\frac{11}{3}=-3\frac{2}{3}.$$

Пример 2**.** Найти предел функции $f(x)=\frac{x^2-6x+8}{x-4}$ при $x\to 4$.

Решение. Подставим предельное значение $x = 4$ в функцию:

$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\left(\frac{4^2-6\cdot 4+8}{4-4}=\frac{0}{0}\right)$. Получена неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для её раскрытия найдём корни квадратного трёхчлена, записанного в числителе, и разложим его на множители: $x^2-6x+8=0$, $x_1=2$, $x_2=4$, $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$. Подставим разложение в числитель: $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-2)=4-2=2$.

Пример 3. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+2}{5x^3+2x-3}$.

Решение. Подставим предельное значение $x=\infty$ в функцию:

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+2}{5x^3+2x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для раскрытия неопределённости разделим числитель и знаменатель на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+2}{5x^3+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}{5+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{2}{5}$$

5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Другими обозначениями производной могут быть $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, f'_x.

Из определения производной следует, что ***производная функции в некоторой точке есть скорость её изменения*** в этой точке.

Нахождение производной функции $y=f(x)$ называется ***дифференцированием*** этой функции.

Касательной к графику функции $y=f(x)$, в точке M называется предельное положение секущей MN, когда точка N, двигаясь по графику функции $y=f(x)$, стремится занять положение точки M.

Геометрический смысл производной функции $y=f(x)$ состоит в том, что производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от функции пути $S(t)$ по времени t. В этом состоит ***механический смысл производной***.

На практике производные функций находят с помощью формул и правил. Основные формулы дифференцирования приведены ниже.

1	$C'=0$	2	$(x^n)'=nx^{n-1}$
3	$(e^x)'=e^x$	4	$(a^x)'=a^x\ln a$
5	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	6	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

7	$(\sin x)' = \cos x$	8	$(\cos x)' = -\sin x$
9	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	10	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в некотором интервале (a, b). Справедливы следующие правила:

1) производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций: $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) производная произведения двух функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3) постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(k \cdot u)' = k \cdot u'$;

4) производная частного двух функций, если знаменатель не равен нулю, равна дроби, знаменатель которой есть квадрат прежнего знаменателя, а числитель – произведение производной числителя на знаменатель минус произведение числителя на производную знаменателя: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^2 - x + \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{3x^2}$; б) $y = 5\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$;

в) $y = (2x^2 - 3)\sin x$; г) $y = \dfrac{3x^2 - 4}{2x+1}$.

Решение. а) $y' = \left(3x^2 - x + \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{3x^2}\right)' = (3x^2)' - x' + (4x^{-1})' -$

$$-\left(\frac{2}{3}x^{-2}\right)' = 3(x^2)' - x' + 4(x^{-1})' - \frac{2}{3}(x^{-2})' = 3 \cdot 2x - 1 + 4 \cdot (-1)x^{-2} -$$

$$-\frac{2}{3} \cdot (-2)x^{-3} = 6x - 1 - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{3x^3} ;$$

б) $y' = \left(5\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(5x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 5\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} -$

$-3\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{\frac{4}{3}} = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{9}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}$;

в) $y' = \left(2x^2 - 3\right)'\sin x + \left(2x^2 - 3\right)(\sin x)' = 4x\cdot\sin x + \left(2x^2 - 3\right)\cos x$;

г) $y' = \frac{\left(3x^2 - 4\right)'(2x+1) - \left(3x^2 - 4\right)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{6x(2x+1) - \left(3x^2 - 4\right)\cdot 2}{(2x+1)^2} =$

$= \frac{12x^2 + 6x - 6x^2 + 8}{(2x+1)^2} = \frac{6x^2 + 6x + 8}{(2x+1)^2} = \frac{2(3x^2 + 3x + 4)}{(2x+1)^2}$.

Производные высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ в области D имеет конечную производную $y' = f'(x)$, которая в свою очередь также является функцией от переменной x в этой же области. Производная y' называется ***производной первого порядка***. Если существует производная от производной первого порядка, то она называется ***производной второго порядка,*** или ***второй производной*** от функции $y = f(x)$ и обозначается y'', или $f''(x)$. Производная от производной второго порядка называется ***производной третьего порядка,*** или ***третьей производной,*** и обозначается y''', или $f'''(x)$ и т. д. Производные, начиная со второго порядка и выше, называются ***производными высших порядков***.

Пример 7. Найти производную четвёртого порядка функции $y = x^3 + 5x^2 - 4x + 1$.

Решение. $y' = 3x^2 + 10x - 4$;

$y'' = 6x + 10$;

$y''' = 6$;

$y^{(4)} = 0$.

6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

При исследовании функции приходится определять характер её поведения. Для этого можно использовать средства дифференциального исчисления.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если производная $f'(x)$ в интервале (a, b) положительна, то функция $y = f(x)$ в этом интервале возрастает;

2) если производная $f'(x)$ в интервале (a, b) отрицательна, то функция $y = f(x)$ в этом интервале убывает.

Эти утверждения являются ***достаточными условиями возрастания и убывания (монотонности) функции***.

Пример 11. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x - 4$ на монотонность.

Решение. Функция определена на всём множестве действительных чисел, т. е. $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Найдём производную: $y' = 3x^2 - 3$. Функция возрастает, если $3x^2 - 3 > 0$, т. е. $x^2 - 1 > 0$ или же $(x-1)(x+1) > 0$. Решив это неравенство, получим, что функция возрастает при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Функция убывает, если $3x^2 - 3 < 0$, т. е. $x^2 - 1 < 0$ или $(x-1)(x+1) < 0$. Решив последнее неравенство, получим, что при $x \in (-1, 1)$ функция убывает. Таким образом, интервалами монотонности функции являются $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$.

Особую роль в исследовании функции играют такие значения x, которые отделяют интервалы возрастания и убывания функции. В этих точках функция меняет характер своего поведения.

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 ***максимум***, если $f(x_0)$ есть наибольшее значение этой функции в некоторой окрестности данной точки. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 ***минимум***, если $f(x_0)$ есть наименьшее значение этой функции в некоторой окрестности данной точки.

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***, а максимум и минимум называются ***экстремумами функции***.

Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ достигает экстремума, то её производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует. Это утверждение является ***необходимым признаком (условием) экстремума***.

Следует иметь в виду, что необходимый признак экстремума не является достаточным. Это означает, что если в какой-то точке производная функции равна нулю, то эта точка не обязательно будет точкой экстремума.

Точки, в которых производная функции равна нулю либо не существует, называются ***критическими (стационарными)***.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и всюду в этой окрестности имеет производную, а в точке x_0 производная либо равна нулю, либо не существует. Тогда имеет место ***первый достаточный признак (первое достаточное условие) экстремума***:

1) если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции меняет знак с «+» на «–», то в точке x_0 функция имеет максимум;

2) если при переходе через точку x_0 слева направо производная функции меняет знак с «–» на «+», то в точке x_0 функция имеет минимум;

3) если при переходе через точку x_0 производная функции не меняет знак, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.

При исследовании функции на экстремум имеет смысл придерживаться следующей схемы:

1) найти область определения функции;

2) найти производную функции и приравнять её к нулю;

3) решить полученное уравнение $f'(x) = 0$ и найти критические точки;

4) в области определения функции найти те точки, в которых производная $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует;

5) все полученные точки расположить в порядке возрастания и разбить область определения этими точками на частичные интервалы, в каждом из которых производная сохраняет знак. Таким образом, частичные интервалы являются интервалами монотонности функции;

6) найти знак производной в каждом из частичных интервалов и по знаку производной определить характер изменения функции в каждом из этих интервалов: возрастает или убывает;

7) по изменению знака производной при переходе через границы интервалов монотонности определить точки экстремума;

8) вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример1. Найти экстремум функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$.

Решение. Функция определена на всей числовой прямой, т. е. $D(y) = (-\infty, +\infty)$. Найдём производную, приравняем её к нулю и решим полученное уравнение: $y' = x^2 - 4x$, $x^2 - 4x = 0$, $x(x-4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ являются критическими. Разобьём область определения функции критическими точками на частичные интервалы, которые являются интервалами монотонности функции, и по знаку производной определим характер изменения функции в каждом из этих интервалов:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,4)$	4	$(4, +\infty)$
y	Возрастает	1 max	Убывает	$-9\frac{2}{3}$ min	Возрастает
y'	+	0	-	0	+

$y'(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0$; $y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$;

$y'(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 = 4 > 0$. По первому достаточному признаку экстремума в точке $x = 0$ функция имеет максимум, а в точке $x = 4$ – минимум. При этом:

$$y_{max} = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1, \quad y_{min} = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 1 = -9\frac{2}{3}.$$

Таким образом, $y = 1$ и $y = -9\frac{2}{3}$ являются экстремумами функции.

7. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Будем рассматривать две независимые переменные x и y. Каждой паре значений x и y на плоскости соответствует точка, для которой x и y являются координатами. Возьмём на плоскости множество точек и обозначим его $D = \{x, y\}$.

Величина z называется ***функцией*** переменных величин x и y на множестве D, если каждой точке этого множества соответствует одно определённое значение величины z. Обозначается функция $z = f(x, y)$. Множество D называется ***областью определения функции***.

Графиком функции двух независимых переменных является некоторая ***поверхность в пространстве***.

Рассмотрим функцию $z = f(x,y)$. Положим $z = C$, где C – постоянная величина. Тогда уравнение $C = f(x,y)$ даёт зависимость между переменными x и y, при которой заданная функция z сохраняет заданное значение C. Геометрически это означает, что поверхность $z = f(x,y)$ пересекается плоскостью $z = C$, параллельной плоскости xOy. В результате такого пересечения полученная линия проектируется на плоскость xOy и задаётся уравнением $C = f(x,y)$. При перемещении точки с координатами (x,y) вдоль этой линии функция сохраняет постоянное значение, равное C.

Линия на плоскости xOy, в каждой точке которой функция $z = f(x,y)$ сохраняет постоянное значение, называется ***линией уровня*** этой функции.

Пример 1. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Поверхность, определяемая функцией $z = x^2 + y^2$, является параболоидом вращения. Линиями уровня являются концентрические окружности $x^2 + y^2 = C$.

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$. Дадим независимой переменной x приращение Δx. При этом переменная y будет сохранять своё значение. Тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ по переменной x в точке (x_0, y_0). Это приращение называется ***частным приращением функции по переменной x*** в точке (x_0, y_0). Аналогично определяется ***частное приращение функции по переменной y*** в точке (x_0, y_0): $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения функции к частному приращению соответствующего аргумента, если последнее стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \; z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

По определению частная производная функции двух переменных находится как производная функции одной переменной, когда вторая переменная остаётся постоянной. Поэтому вычисление частных производных ничем не отличается от вычисления производных функции одной переменной и выполняется по тем же правилам.

Пример 2. Найти частные производные функции двух переменных $z = 2x^3 y - 7xy^2 - 3x + 5$.

Решение. Найдём частную производную по переменной x, считая переменную y постоянной: $z'_x = 6x^2 y - 7y^2 - 3$. Теперь будем считать, что переменная x остаётся постоянной: $z'_y = 2x^3 - 14xy$.

Предположим, что частные производные z'_x и z'_y функции $z = f(x, y)$ в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y. Тогда частные производные от этих частных производных называются частными производными второго порядка или вторыми частными производными функции $z = f(x, y)$: $z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x$, $z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y$, $z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x$, $z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y$. Производные z''_{xy} и z''_{yx} называются смешанными. Для функций, удовлетворяющих некоторым определенным условиям, они равны между собой.

Пример 3. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^2 - 3xy^3 - xy + 1$.

Решение. $z'_x = 3x^2 y^2 - 3y^3 - y$, $z'_y = 2x^3 y - 9xy^2 - x$,

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(3x^2 y^2 - 3y^3 - y\right)'_x = 6xy^2,$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(3x^2y^2 - 3y^3 - y\right)'_y = 6x^2y - 9y^2 - 1,$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(2x^3y - 9xy^2 - x\right)'_x = 6x^2y - 9y^2 - 1,$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(2x^3y - 9xy^2 - x\right)'_y = 2x^3 - 18xy.$$

Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D = \{x, y\}$ и пусть точка $P_0(x_0, y_0) \in D$. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0)$ есть наибольшее значение функции в окрестности этой точки. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0)$ есть наименьшее значение функции в окрестности этой точки. Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***.

Значение функции в точке максимума называется ***максимумом функции***, а значение функции в точке минимума – ***минимумом функции***. Максимум и минимум функции называются ***экстремумами функции***.

Если в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны нулю, т. е. $z'_x(x_0, y_0) = 0$ и $z'_y(x_0, y_0) = 0$. Это ***необходимые условия экстремума***.

Точка, в которой обе частные производные равны нулю, называется ***критической точкой*** функции $z = f(x, y)$. Для отыскания критических точек функции нужно найти её частные производные, приравнять их нулю и решить систему двух уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$ Точки экстремума, если они есть, находятся среди критических точек функции.

Пусть $P_0(x_0, y_0)$ является критической точкой функции $z = f(x, y)$. Вычислим частные производные второго порядка в этой точке: $z''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $z''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $z''_{yy}(x_0, y_0) = C$. Составим выражение $AC - B^2$ и проанализируем его знак:

1) если $AC - B^2 > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум: максимум при A<0 и минимум при A>0;

2) если $AC - B^2 > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремума не имеет;

3) если $AC - B^2 = 0$, то для определения экстремума нужны дополнительные исследования.

Рассмотренные условия называются ***достаточными условиями экстремума***.

Пример 4. Исследовать функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ на экстремум.

Решение. Найдём частные производные $z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x$, $z'_y = 2xy + 2y$ и решим систему уравнений $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2xy + 2y = 0. \end{cases}$ Из второго уравнения $2y(x + 1) = 0$, $y = 0$, $x = -1$. Подставим $y = 0$ в первое уравнение: $6x^2 + 10x = 0$, $2x(3x + 5) = 0$, $x = 0$, $3x + 5 = 0$, $x = -\frac{5}{3}$. Таким образом, найдены две критические точки $M_1(0,\ 0)$, $M_2\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$. Теперь в первое уравнение подставим $x = -1$: $6 + y^2 - 10 = 0$, $y^2 = 4$, $y = -2$, $y = 2$. Следовательно, стали известны ещё две критические точки $M_3(-1, -2)$, $M_4(-1,\ 2)$. Найдём частные производные второго порядка: $z''_{xx} = 12x + 10$, $z''_{xy} = 2y$, $z''_{yy} = 2x + 2$.

Проверим достаточные условия для точки $M_1(0,\ 0)$:

$A = z''_{xx}(0, 0) = 12 \cdot 0 + 10 = 10$, $B = z''_{xy}(0, 0) = 2 \cdot 0 = 0$,

$C = z''_{yy}(0, 0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$, $AC - B^2 = 10 \cdot 2 - 0^2 = 10$. Следовательно, в точке $M_1(0, 0)$ функция имеет экстремум. Так как A>0, то это минимум. При этом $z_{\min} = 2 \cdot 0^3 - 0 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0^2 + 0^2 = 0$.

Аналогично установим, что в точке $M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ функция имеет максимум, причём $z_{\max} = 2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)\cdot 0^2 + 5\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0^2 = 4\frac{17}{27}$. В точках $M_3(-1, -2)$ и $M_4(-1, 2)$ экстремума нет.

8. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Если $F(x)$ есть первообразная функция для функции $f(x)$, то каждая из функций $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, будет также первообразной для функции $f(x)$. Это означает, что если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную функцию, то она имеет бесконечное множество первообразных функций и все они отличаются друг от друга на постоянную величину.

Совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$. Процесс нахождения первообразной функции называется ***интегрированием***. Переменная x называется ***переменной интегрирования***, функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***. Неопределённый интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций.

- Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т. е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
- Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
- Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т. е. $\int dF(x) = F(x) + C$.
- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

• Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е. $\int(f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

• Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то при замене переменной интегрирования x на t $\int f(t)dt=F(t)+C$. Такое свойство называется ***инвариантностью формулы интегрирования***.

При интегрировании удобно пользоваться формулами, которые составляют основную таблицу интегралов:

1	$\int dx=x+C$	7	$\int\cos xdx=\sin x+C$
2	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	8	$\int\frac{1}{\cos^2 xdx}=\mathrm{tg}x+C$
3	$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	9	$\int\frac{1}{\sin^2 xdx}=-\mathrm{ctg}x+C$
4	$\int e^x dx=e^x+C$	10	$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$
5	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\mathrm{arctg}x+C$
6	$\int\sin xdx=-\cos x+C$		

Интегралы, занесённые в таблицу, называются ***табличными***. Каждая из формул таблицы справедлива в области определения подынтегральной функции.

Основные методы интегрирования

При интегрировании функций не всегда можно сразу использовать таблицу интегралов. Как правило, вначале нужно данный интеграл преобразовать таким образом, чтобы свести его к одной или нескольким формулам таблицы. Для этого используются специальные методы интегрирования, основными из которых являются ***непосредственное интегрирование, замена переменной (или метод подстановки), метод интегрирования по частям***.

Суть метода непосредственного интегрирования состоит в том, что данный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств неопределённого интеграла сводится к табличным интегралам.

При этом часто удобно пользоваться некоторыми преобразованиями дифференциала, которые называются «подведением под знак дифференциала»:

- $du = d(u+a)$, где a – число;
- $du = \dfrac{1}{a}d(au)$, где a – некоторое не равное нулю число;
- $udu = \dfrac{1}{2}d(u^2)$;
- $\cos u \cdot du = d(\sin u)$;
- $\sin u \cdot du = -d(\cos u)$;
- $\dfrac{1}{u}du = d(\ln u)$;
- $\dfrac{1}{\cos^2 u}du = d(tgu)$.

Примеры 1–4. Найти неопределённые интегралы:

1) $\int x^6 dx$; 2) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right)dx$;

3) $\int \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + e^x - 4\sin x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx$;

4) $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$.

Решение. 1) $\int x^2 dx = \dfrac{x^{6+1}}{6+1} + C = \dfrac{x^7}{7} + C$;

2) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right)dx = 2\int x^3 dx - 4\int x^2 dx + 5\int dx = 2\cdot\dfrac{x^4}{4} - 4\cdot\dfrac{x^3}{3} +$

$+5\cdot x + C = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + 5x + C$;

3) $\int \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + e^x - 4\sin x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int x^2 dx - \int \dfrac{1}{x}dx + \int e^x dx -$

$-4\int \sin x dx + \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \dfrac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x - 4\cdot(-\cos x) + \operatorname{tg} x + C =$

$= \dfrac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x + 4\cos x + \operatorname{tg} x + C$;

4) $\int\left(3\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=3\int x^{\frac{3}{4}}-2\int\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=$

$=3\int x^{\frac{3}{4}}dx-2\int x^{-\frac{1}{3}}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=3\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}-2\cdot\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\operatorname{arctg}x+C=$

$=3\cdot\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}-2\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+\operatorname{arctg}x+C=\frac{12}{7}\sqrt[4]{x^7}-3\sqrt[3]{x^2}+\operatorname{arctg}x+C.$

9. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Выполним следующие действия:

разобьём отрезок $[a,b]$ точками $x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n=b$ на n отрезков $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, … , $[x_{n-1},x_n]$, которые называются частичными;

в каждом частичном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ произвольно выберем точку $c_i\in[x_{i-1},x_i]$, вычислим значение функции в этой точке $f(c_i)$ и произведение $f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$;

если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек $c_i\in[x_{i-1},x_i]$, то он называется ***определённым интегралом*** от функции $y=f(x)$ на отрезке $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются ***нижним и верхним пределами интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***, $[a,b]$ – ***отрезком интегрирования***.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, сбоку – прямыми $x = a$ и $x = b$, называется ***криволинейной трапецией***.

Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит ***геометрический смысл определённого интеграла***.

Определенный интеграл обладает следующими основными свойствами:

- постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т. е. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;
- определённый интеграл от алгебраической суммы непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

- если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определённый интеграл изменит знак на противоположный, т. е. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
- если пределы интегрирования равны между собой, то определённый интеграл равен нулю, т. е. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
- определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$;
- если отрезок интегрирования $[a,b]$ разбит на две части $[a,c]$ и $[c,b]$ и, если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Для вычисления определённых интегралов используется формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$, т. е. $F(x)$ – любая первообразная функция для $f(x)$.

Непосредственное интегрирование предполагает сведение данного интеграла с помощью алгебраических и арифметических преобразований к формулам таблицы основных интегралов и использование формулы Ньютона - Лейбница.

Примеры 1–5. Вычислить интегралы: 1) $\int_1^2 xdx$; 2) $\int_0^\pi \sin xdx$;

3) $\int_0^1 e^x dx$; 4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx$; 5) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4}dx$.

Решение. 1) $\int_1^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

2) $\int_0^\pi \sin xdx = -\cos\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$;

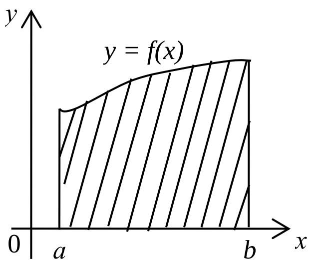
3) $\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$;

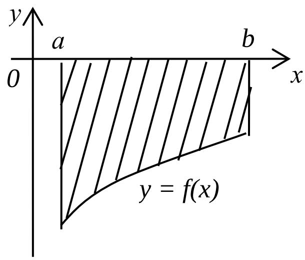
4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3}$;

5) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4}dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{3x^3}\Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{3\cdot 2^3} - \left(-\frac{1}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}\right) = 2\frac{5}{8}$.

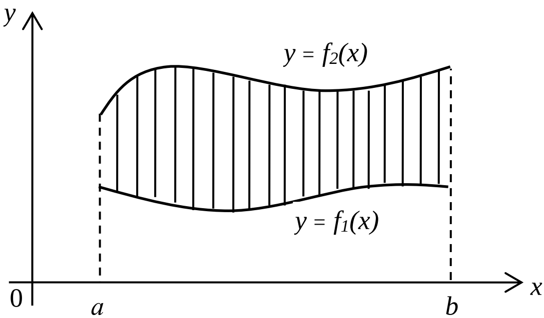
Вычисление площадей плоских фигур

Согласно геометрическому смыслу определённого интеграла площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс, равна определённому интегралу от функции $f(x)$: $S=\int_a^b f(x)dx$. Если плоская фигура расположена ниже оси абсцисс, то её площадь может быть вычислена по формуле $S=-\int_a^b f(x)dx$.





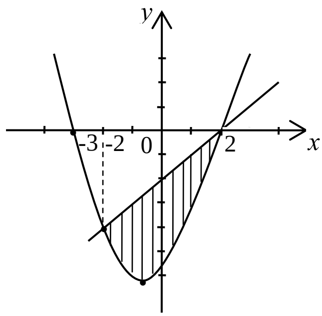
Пусть фигура ограничена снизу графиком функции $y=f_1(x)$, сверху – графиком функции $y=f_2(x)$, слева – прямой $x = a$ и справа – прямой $x = b$.



Тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, вычисляется по формуле $S=\int\limits_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+x-6$, $y-x+2=0$.

Решение. Графиком функции $y=x^2+x-6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём точки пересечения параболы с осью Ox: $x^2+x-6=0$, $D=1-4\cdot 1\cdot(-6)=25$, $x_1=-3$, $x_2=2$. Уравнение прямой $y-x+2=0$ запишем в виде $y=x-2$. Изобразим эти линии в системе координат и найдём площадь заштрихованной фигуры.



Найдём абсциссы точек пересечения линий: $x^2+x-6=x-2$, $x^2-4=0$, $x_1=-2$, $x_2=2$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $\int\limits_{-2}^{2}\left(x-2-\left(x^2+x-6\right)\right)dx=\int\limits_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-2}^{2}=$

$$=-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2-\left(-\frac{(-2)^3}{3}+4\cdot(-2)\right)=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=10\frac{2}{3}\text{(кв. ед.)}.$$

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. ОБЩЕЕ И ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

При изучении различных явлений часто не удаётся найти закон, который непосредственно связывает независимую переменную и искомую функцию, но можно установить связь между независимой переменной, искомой функцией и её производными.

Соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные, называется ***дифференциальным уравнением***:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – производные искомой функции. При этом в соотношении (1) обязательно наличие хотя бы одной производной.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (2)$$

Так как в это уравнение входит производная только первого порядка, то оно называется ***дифференциальным уравнением первого порядка.***

Если уравнение (2) можно разрешить относительно производной и записать в виде

$$y' = f(x, y), \qquad (3)$$

то такое уравнение называется ***дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме.***

Во многих случаях целесообразно рассматривать уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (4)$$

которое называется ***дифференциальным уравнением первого порядка, записанным в дифференциальной форме.***

Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (3) можно записать в виде $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ или $f(x, y)dx - dy = 0$, где можно считать

$P(x, y) = f(x, y)$ и $Q(x, y) = -1$. Это означает, что уравнение (3) преобразовано в уравнение (4).

Запишем уравнение (4) в виде $P(x, y) + Q(x, y)\dfrac{dy}{dx} = 0$. Тогда $Q(x, y)y' = -P(x, y)$, $y' = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $Q(x, y) \neq 0$, где можно считать $f(x, y) = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, т. е. получено уравнение вида (3). Таким образом, уравнения (3) и (4) равносильны.

Решением дифференциального уравнения (2) или (3) называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке её в уравнение (2) или (3) обращает его в тождество:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \text{ или } \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения называется его ***интегрированием***, а график решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой*** этого уравнения.

Если решение дифференциального уравнения получено в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется ***интегралом*** данного дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется семейство функций вида $y = \varphi(x, C)$, зависящее от произвольной постоянной *C*. Каждая из функций является решением данного дифференциального уравнения при любом допустимом значении произвольной постоянной *C*. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из формулы общего решения при конкретном значении произвольной постоянной *C*, включая $\pm\infty$.

11. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Предмет и задачи математической статистики

Математическая статистика изучает методы сбора, систематизации и анализа экспериментальных данных, полученных в результате наблюдения массовых случайных явлений. Исследования математической статистики базируются на понятиях и методах теории вероятностей, но устанавливают свойства математической модели, исходя из наблюдаемых статистических данных.

В зависимости от цели исследования математическая статистика принимает решения в условиях неопределенности. Типичными задачами являются следующие:

– сбор, упорядочивание и представление статистических данных в удобном для анализа виде;

– определение закона распределения изучаемой случайной величины;

– оценивание неизвестных характеристик, параметров распределения изучаемой случайной величины;

– изучение зависимости случайной величины от одной или нескольких величин;

– проверка статистических гипотез, т.е. задача согласования результатов оценивания или других выводов с опытными данными.

Генеральная и выборочная совокупности

Для изучения количественного признака некоторых объектов или случайных величин проводится статистическое наблюдение. Совокупность результатов изучения всех объектов образует ***генеральную совокупность***. Однако провести сплошное наблюдение, как правило, трудно, экономически нецелесообразно или невозможно. В этом случае наилучшим способом исследования является выборочное наблюдение.

Выборочной совокупностью или ***выборкой*** называется часть объектов, выбранных случайным образом из генеральной совокупности. Число элементов выборочной совокупности называется *объемом* выборки. Метод статистического исследования объектов на основании выборки называется *выборочным методом.*

Различают выборки *повторные* с возвращением изучаемого объекта в генеральную совокупность и *бесповторные* без возвращения.

Для получения хороших, подходящих оценок изучаемых характеристик случайной величины выборка должна быть репрезентативной или представительной, т. е. достаточно полно представлять изучаемые признаки генеральной совокупности. Достаточным для этого является соблюдение условия случайного отбора, при котором все элементы генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку. Для обеспечения репрезентативности используют различные методы отбора: простой, типический, механический и серийный отборы.

Статистические ряды

Для изучения случайной величины X производится выборка объемом n. Допустим, значение x_1 встречается в выборке m_1 раз, значение x_2 – m_2 раз, и т.д. значение $x_к$ – $m_к$ раз. Значения $x_i, i=\overline{1,n},$ записанные по возрастанию, называются ***вариантами*** и образуют вариационный ряд. Числа m_i, показывающие сколько раз встречаются значения x_i в выборке, называются ***частотами***, причем $\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$ Отношение частот к объему выборки называется ***относительными частотами*** или ***частостями*** $w_i = \frac{m_i}{n}, i=\overline{1,k},$ причем сумма относительных частот $\sum_{i=1}^{k} w_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} = 1.$

Выборка представляет собой первичный статистический материал, который необходимо представить в виде дискретного или интервального статистических рядов распределения частот или относительных частот. ***Дискретным статистическим рядом*** называется перечень вариант в виде вариационного ряда и соответствующих им частот или относительных частот. Графическим изображением дискретного ряда служит полигон частот или относительных частот.

Полигоном *относительных частот* называется ломанная, отрезки которой соединяют точки $(x_i; w_i), i=\overline{1,k}.$ Варианты x_i откладываются на оси Ox, а относительные частоты w_i на оси Oy.

Интервальным статистическим рядом называется перечень частичных интервалов и соответствующих им частот или относительных частот. Для построения интервального ряда прежде всего вычисляем количество интервалов, например, по формуле $k = 1 + \log_2 n \approx 1 + 3{,}32 \cdot \lg n$. Затем размах вариации $R = x_{\max} - x_{\min}$, где $x_{\max}$ – максимальная варианта выборки, а $x_{\min}$ – минимальная. Шаг разбиения вычисляем по формуле: $h = \dfrac{R}{k-1} = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{k-1}$. Далее находим границы интервалов $a_0 = x_{\min} - \dfrac{h}{2}, a_1 = a_0 + h, a_2 = a_1 + h, \ldots,$ $a_k = a_{k-1} + h$ и записываем сами интервалы $[a_0; a_1), [a_1; a_2), \ldots, [a_{k-1}; a_k]$.

Графическим изображением интервального ряда служит гистограмма и полигон частот или относительных частот. Для построения гистограммы относительных частот откладываем на оси Ox частичные интервалы и каждый интервал достраиваем до прямоугольника с высотой, равной относительной частоте w_i или ее плотности $\dfrac{w_i}{h}$. Полученная ступенчатая фигура называется *гистограммой* относительных частот. Соединив середины верхних оснований прямоугольников, получим полигон относительных частот для интервального статистического ряда.

Числовые характеристики выборки

К основным числовым характеристикам выборки относятся среднее значение выборки, мода, медиана, выборочная дисперсия и среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Средним значением выборки или ***выборочной средней*** называется величина $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ для несгруппированных данных и величина $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$ для статистических рядов. Причем, для интервального статистического ряда $x_i = \dfrac{a_{i-1} + a_i}{2}, i = \overline{1, n}$ равно середине интервала.

Модой *Mo* называется варианта, соответствующая наибольшей частоте. Для интервального статистического ряда мода вычисляется по формуле:

$$Mo = x_0 + h \cdot \frac{m_0 - m_1}{(m_0 - m_1) + (m_0 - m_2)},$$

где x_0 – начало модального интервала или интервала с наибольшей частотой; h – ширина интервала; m_0 – частота модального интервала; m_1 – частота интервала, предшествующая модальному; m_2 – частота интервала, следующего за модальным.

Медианой *Me* называется варианта, разделяющая статистический ряд на две равные по количеству вариант части. Для интервального статистического ряда медиана вычисляется по формуле:

$$Me = x_0 + h \cdot \frac{n - 2n_1}{2m_e},$$

где x_0 – начало медианного интервала или интервала, накопленная частота которого больше половины объема выборки; h – ширина интервала; n_1 – накопленная частота интервала, предшествующая медианному; m_e – частота медианного интервала.

Выборочной дисперсией называется величина $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ для несгруппированных данных и величина $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot m_i$ для статистических рядов.

Рабочая формула для вычисления дисперсии имеет вид

$$D_в = = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i - \left(\overline{x}\right)^2.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из выборочной дисперсии $\sigma_в = \sqrt{D_в}$.

Коэффициентом вариации называется величина

$$v = \frac{\sigma_в}{\overline{x}} \cdot 100\%,$$

определяющая в процентах степень отклонения от выборочной средней для различных статистических рядов.

Корреляция. Корреляционная зависимость

Случайные величины X и Y могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, статистической зависимостью или быть независимыми. Строгая функциональная зависимость между значениями одной величины и значениями другой реализуется довольно редко из-за влияния случайных факторов на величины.

Статистической зависимостью называется зависимость между значениями одной величины и параметрами распределения другой. Частным случаем этой зависимости является *корреляционная* зависимость между значениями одной величины и средними значениями другой.

Изучение корреляционной зависимости удобно проводить для сгруппированных данных. Данные выборочных наблюдений над случайными величинами X и Y группируют и записывают в виде корреляционной таблицы.

Случайные величины		X				
		x_1	x_2	$\ldots$	x_s	m_y
Y	y_1	m_{11}	m_{12}	$\ldots$	m_{1s}	m_{y_1}
	y_2	m_{21}	m_{22}	$\ldots$	m_{2s}	m_{y_2}
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	y_k	m_{k1}	m_{k2}	$\ldots$	m_{ks}	m_{y_k}
	m_x	m_{x_1}	m_{x_2}	$\ldots$	m_{x_s}	n

Суммы частот в последних строке и столбце равны объему выборки: $\sum_{i=1}^{k} m_{yi} = \sum_{j=1}^{s} m_{xj} = n.$

В таблице можно выделить s условных законов распределения Y при $X = x_1, x_2, \ldots, x_s$ и k условных законов распределения X при $Y = y_1, y_2, \ldots, y_k$ соответственно и вычислить условные средние: $\bar{y}_{x_j} = \frac{1}{m_{xj}} \sum_{i=1}^{k} y_i \cdot m_{ij},\ j = \overline{1, s};$ $\quad \bar{x}_{y_i} = \frac{1}{m_{y_i}} \sum_{j=1}^{s} x_j \cdot m_{ij}, i = \overline{1, k}.$ В этом случае получаем взаимно однозначное соответствие между значениями одной величины и условными средними другой. Эту корреляционную зависимость можно записать уравнениями регрессии: $\bar{y}_x = f(x)$ и $\bar{x}_y = \varphi(y)$.

Для определения вида функции регрессии (линейная, квадратическая или другая) на координатную плоскость наносим точки $\left(x_1;\overline{y}_1\right)$, $\left(x_2;\overline{y}_2\right)$, … , $\left(x_s;\overline{y}_s\right)$ или $\left(\overline{x}_1;y_1\right)$, $\left(\overline{x}_2;y_2\right)$, … , $\left(\overline{x}_k;y_k\right)$ и по характеру расположения точек выбираем подходящий вид регрессии.

Коэффициент линейной корреляции

Выборочный коэффициент линейной корреляции служит мерой тесноты линейной корреляционной зависимости между случайными величинами и выражается формулой:

$$r_в = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где $\overline{x}, \overline{y}$ – средние значения выборок, σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения случайных величин X и Y, средняя величина $\overline{xy}$ вычисляется по корреляционной таблице: $\overline{xy} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} x_j y_i m_{ij}$.

Свойства коэффициента линейной корреляции:

1. Значение коэффициента линейной корреляции по модулю не превышает единицы: $\left|r_в\right| \le 1$.

2. Если $\left|r_в\right| = 1,$ то между случайными величинами существует линейная функциональная зависимость.

3. Если коэффициент линейной корреляции $r_в > 0,$ то корреляционная зависимость между величинами X и Y прямая, а если $r_в < 0,$ то обратная.

4. Если $\left|r_в\right| \ge 0,7;$ то между случайными величинами существует тесная линейная корреляционная зависимость, если $0,4 \le \left|r_в\right| < 0,7;$ то корреляция средняя.

5. Если случайные величины независимы, то коэффициент линейной корреляции $r_в = 0.$

6. Если коэффициент линейной корреляции $r_в = 0,$ то случайные величины некоррелированы.

Квадрат коэффициента корреляции $D = r_в{}^2 \cdot 100\,\%$ называется *коэффициентом детерминации.* Он показывает, на сколько процентов в среднем изменение зависимой переменной *Y* зависит от независимой переменной *X*.

Методом наименьших квадратов можно получить уравнения линейной регрессии y на x и x на y соответственно:

$$\overline{y}_x = r_в \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot \left(x - \overline{x}\right) + \overline{y} \;\text{ и }\; \overline{x}_y = r_в \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \left(y - \overline{y}\right) + \overline{x}.$$