



Белорусская государственная
орденов Октябрьской Революции
и Трудового Красного Знамени
сельскохозяйственная академия



РАЗРАБОТКИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ



Задания для аудиторной работы по разделу 1.

Решить уравнения.

1. $3x = 7$

2. $2(x+1) - 8x = -10$

3. $2x - 12 = 1$

4. $\frac{1}{2}(4x - 2) = 3x + 7$

5. $2 - 5x = 4x + 11$

6. $x - 4 = \frac{5}{2}(2x - 4)$

7. $x^2 + 3x - 10 = 0$

8. $(x - 4)(x + 4) - 2x + 13 = 0$

9. $x^2 - 5x + 6 = 0$

10. $(x + 1)(x - 3) = 3 - 3x$

Разложить квадратные трёхчлены на множители

1. $x^2 - 5x + 4$

2. $x^2 - 2x - 8$

3. $2x^2 + 3x - 2$

4. $3x^2 - 5x - 2$

Решить системы уравнений.

1.
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 3x - y = 9 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases}$$

Решить неравенства

1. $3x + 5 > 1 - x$

2. $x - 5 < 4x + 4$

3. $5x - 2 > 7x + 2$

4. $5x + 6 > x - 2$

5. $x^2 - 5x + 6 < 0$

6. $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

7. $-x^2 + 6x - 9 > 0$

8. $4x - 1 - 4x^2 \leq 0$

Решите систему неравенств.

1.
$$\begin{cases} 4x - 3 < 2x + 10 \\ 7 - 2x > x + 11 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 5x - 7 > -14 + 3x \\ -4x + 5 < 29 + 2x \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 10 - 6x < 8x - 40 \\ 4x - 1 < 5x - 3 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x + 8 > 3x + 1 \\ 7x - 10 < 4x + 6 \end{cases}$$



Задания для самостоятельной работы по разделу 1.

Решить уравнения.

1. $\frac{1}{4}(4x-8) = 3x+8$

2. $1-x = \frac{1}{3}(3x-6)$

3. $-x^2+6x-9=0$

4. $(x-1)(x+3) = 5$

Решить неравенства.

1. $2x+3 \geq 4x+7$

2. $2-x \leq \frac{1}{2}(4x-6)$.

3. $1+2x+x^2 \geq 0$

4. $2x^2-3x-5 \leq 0$

Решить системы неравенств.

1.
$$\begin{cases} -6x+4 > 2x-20 \\ -3x-15 > 10+2x \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 10-6x < 8x-40 \\ 4x-1 < 5x-3 \end{cases}$$

Решить системы уравнений.

1.
$$\begin{cases} 3x-4y = -1 \\ 2x-y = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x+3y = 2 \\ 5x-4y = 5 \end{cases}$$



Задания для аудиторной работы по разделу 2.

1. Определить, какие из точек $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ лежат на прямой $2x-3y-3=0$, а какие не лежат на ней. Построить данную прямую.

2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 расположены на прямой $3x-2y-6=0$ и их абсциссы соответственно равны числам: 4, 0, 2, -2, и -6. Определить ординаты этих точек. Построить данную прямую.

3. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой. Построить эти прямые.

4. Даны вершины треугольника $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;3)$. Составить уравнения его сторон.

5. Дана прямая $5x+3y-3=0$. Определить угловой коэффициент k прямой: 1) параллельной данной прямой; 2) перпендикулярной к данной прямой.

6. Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки:

1) $M_1(2;-5)$, $M_2(3;2)$; 2) $P(-3;1)$, $Q(7;8)$; 3) $A(5;-3)$, $B(-1; 6)$.

7. Определить угол φ между двумя прямыми:

1) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$; 2) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$;

3) $x-2y-4=0$, $2x-4y+3=0$; 4) $3x+2y-1=0$, $5x-2y+3=0$;

12. Даны вершины треугольника $M(2; 1)$, $N(-1;-1)$, $P(3; 2)$. Составить уравнения его высот.

6. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.

Задания для самостоятельной работы по разделу 2.

1. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$. Определить: 1) уравнения, длины его сторон и их угловые коэффициенты; 2) угол при вершине А в радианах; 3) уравнение медианы АЕ; 4) уравнение высоты АД и ее длину. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины А на медиану, проведенную из вершины В.



Задания для аудиторной работы по разделу 3.

Вычислить $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$

- | | | | |
|----|---|----|---|
| 1. | $f(x) = x^2 - 2x + 3$ | 2. | $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x + 1}$ |
| 3. | $f(x) = 5 + 2x - x^2$ | 4. | $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 9}$ |
| 5. | $f(x) = \frac{5 - 4x - 2x^2}{\sqrt{x + 3}}$ | 6. | $f(x) = \frac{\sqrt{3x + 2x^3}}{x - 4}$ |

Исследовать функции на чётность.

- | | | | |
|----|-------------------------|----|------------------------------------|
| 1. | $f(x) = x^4 - 2x^2$ | 2. | $f(x) = \frac{5x^2}{2x^3 + x}$ |
| 3. | $f(x) = 2x^5 - x^3 + x$ | 4. | $f(x) = \frac{\cos x}{3x^2 + x^4}$ |
| 5. | $f(x) = 3x^2 - x + 6$ | 6. | $f(x) = \frac{\sin x}{8x - 5x^3}$ |

Найти область определения функции.

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 1. | $y = \frac{x + 1}{5x - 20}$ | 2. | $y = \frac{2x}{x^2 - 4}$ |
| 3. | $y = \lg(3 - 4x)$ | 4. | $y = \sqrt{6x + 18}$ |
| 5. | $y = \lg(3x + 7) + \sqrt{3 - x}$ | 6. | $y = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$ |
| 7. | $y = \sqrt{x^2 - 8x + 15}$ | 8. | $y = \sqrt{x - 1} + \frac{x + 1}{x - 7}$ |
| 9. | $y = \sqrt{\frac{x - 1}{24 - 6x}}$ | 10. | $y = \ln\left(\frac{3 - 4x}{5 + 2x}\right)$ |
| 11. | $y = \ln(8 - 5x) + \frac{x^2 + 9}{2x + 9}$ | 12. | $y = \sqrt{x^2 - 9} + \frac{3x + 5}{2x + 1}$ |

Задания для самостоятельной работы по разделу 3.

Вычислить $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$.

- | | | | |
|----|----------------------------------|----|------------------------------|
| 1. | $f(x) = 2x^2 - x + 5$ | 2. | $f(x) = 7 + 3x - 2x^2$ |
| 3. | $f(x) = \frac{5x^2 - 3}{3x + 5}$ | 4. | $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 7}$ |



Исследовать функции на чётность.

1.	$f(x) = x^3 - 2 \sin x$	2.	$f(x) = \frac{5x^2}{2x^4 + \cos x}$
3.	$f(x) = 2x^2 - 6x + 5$	4.	$f(x) = \frac{x}{3x^2 + x^4}$

Найти область определения функции.

1.	$y = \frac{3x + 1}{6x - 24}$	2.	$y = \ln(5 - 4x)$
3.	$y = \lg(3x + 9) + \sqrt{5 - x}$	4.	$y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$



Задания для аудиторной работы по разделу 4.

Вычислить пределы функций

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-1}{3x-6}$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+4}{x-2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2x^2-x+4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+7x+1}{x^2-x+5}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-7x+2}{3x^3+6x^2-4}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x+2}{4-2x-4x^2}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+5x-1}{4x^2+4x^3+5}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3+5x^2+6}{2x^2+14x^3-3}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+4x^2+x}{x^2+15x^4-3}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^8-3x^5+6}{3x^2+4x^4-3}$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-4x+1}{2-3x-x^4}$

12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-8x+4}{x-2}$

13. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2x^2-x-1}$

15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{3x^2-5x-3}$

16. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-3x-4}{2x^2-7x-4}$

17. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-5x-3}$

18. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2+8x-3}{x^2+5x+6}$

19. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+3x}{x^2+5x+6}$

20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}$

Задания для самостоятельной работы по разделу 4.

Вычислить пределы функций

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x-5}{2x+4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+2}{3x^2-5x+4}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+5x-1}{4x^2+3x+5}$

6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+3x-2}{x+2}$



$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x + 2}{3x^3 + 4x^2 - 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 - 2x + 1}{5x^3 + 4x^8 + 7}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{3x^2 + 4x - 4}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16}$$



Задания для аудиторной работы по разделу 5.

Найти производные функций.

1. $y = \cos x - \ln x + 2$

2. $y = 5x + 4^x + 2\operatorname{tg}x$

3. $y = x^5 + 1$

4. $y = 2x^3 + 6$

5. $y = \frac{x^2}{2} - 3$

6. $y = \frac{1}{x^5} + 4$

7. $y = \frac{3}{4x^4} - 2x$

8. $y = \sqrt[3]{x^2}$

9. $y = \sqrt[7]{x} - 3$

10. $y = 6\sqrt[6]{x^5} + x^5$

11. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5x^2} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} - 1$

12. $y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3x^3} + \frac{8}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2$

13. $y = 3x^2 \cdot (1 - \cos x)$

14. $y = \sin x \cdot \operatorname{tg}x$

15. $y = (2 - x) \cdot \ln x$

16. $y = \frac{e^x}{2x^2 - 1}$

17. $y = \frac{5x^2 + 2}{x + 1}$

18. $y = \frac{x^2}{x + \ln x}$

Задания для самостоятельной работы по разделу 5.

Найти производные функций.

1. $y = \sin x - 5^x + 7$

2. $y = 5x + 4^x + 2\operatorname{tg}x$

3. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{4}\sqrt[4]{x}$

4. $y = 9\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{x^4}$

5. $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x^3}$

6. $y = (5 + x^2) \cdot \cos x$

7. $y = (1 - 3x^4) \cdot \ln x$

8. $y = \frac{e^x + 1}{x}$

9. $y = \frac{x^3 - 5}{2x^2 + 1}$

10. $y = \frac{\sin x - 3}{x^2}$



Задания для аудиторной работы по разделу 6.

Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 8$

2. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 8$

3. $y = x^4 - 2x^2 + 5$

4. $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 3$

Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки экстремума функции

1. $y = 3x^3 - x$

2. $y = x^3 - 3x^2 - 9x$

3. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$

4. $y = x^5 - x^3 - 2x + 4$

Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график.

1. $y = -x^3 + 3x - 4$

2. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2$

3. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

4. $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 5$

Задания для самостоятельной работы по разделу 6.

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

6. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

2. $y = 2x^3 - 12x^5 + 18x$

7. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10$

3. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$

8. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 8$

4. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

9. $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$

5. $y = -x^3 + 3x - 4$

10. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 2$



Задания для аудиторной работы по разделу 7.

Найти частные производные первого и второго порядков

- $Z = 2xy^3 - 3x^3y + x^2 - 4y^3 + 2$
- $Z = -\frac{1}{2}x^4y^2 + 2x^3y - 3xy^2 - 2y^3 + 7$
- $Z = \frac{1}{4}x^4y^2 - 4x^2y + 3xy^2 + x^2 + 2$
- $Z = x^3y^2 + 6xy^3 + 3xy + x^3 + 2y$
- $Z = -x^2y^3 + 3xy^4 + 4x^2y + y^3 - 4$
- $Z = \frac{1}{3}x^3y^6 + 4xy^2 - 2x^3y - x^3 + 1$
- $Z = -3xy^5 + 2x^5y - 4x^2y + x^3 - 7$
- $Z = -2x^5y^3 + 4x^8y^3 - 2x^3y - 6y$

Исследовать функцию двух переменных на экстремум.

- $Z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$
- $Z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1$
- $Z = 2xy + x^2 - 3y^2 + 4x - 5y + 3$
- $Z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 2$
- $Z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 2$
- $Z = 5xy + x^2 - 6y^2 + 2x - 3y + 1$

Задания для самостоятельной работы по разделу 7.

Исследовать функцию двух переменных на экстремум

- $Z = 3x^2 + xy - 6y^2 - 6x - y + 4$
- $Z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 5$
- $Z = 3 - 3x^2 + 5y^2 - 8xy + 4x + 26y$
- $Z = 8x^2 - xy + 2y^2 - 16x + y + 3$



Задания для аудиторной работы по разделу 8.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int (\cos(x) - 3^x + 5) dx$
2. $\int \left(\frac{1}{x} - e^x + 1\right) dx$
3. $\int (5x^3 - 3) dx$
4. $\int \left(\frac{4}{x^3} - 1\right) dx$
5. $\int \left(\frac{5}{x^6} + 3\right) dx$
6. $\int \left(-\frac{1}{x^2} + x\right) dx$
7. $\int \left(\frac{5}{x^6} + 3\right) dx$
8. $\int 7\sqrt[5]{x^2} dx$
9. $\int (8\sqrt[3]{x} - 2) dx$
10. $\int (20\sqrt[7]{x^3} + 3x^2) dx$
11. $\int (5x^3 - 3\sqrt[3]{x} - 2) dx$
12. $\int \left(x^4 - \frac{3}{x^2} + 5\right) dx$
13. $\int (-3x^2 - 4\sqrt[5]{x^3} + 5) dx$
14. $\int \left(x^5 - \frac{4}{x^3} + 3x\right) dx$
15. $\int \frac{3xe^x - x^3 + 4}{x} dx$
16. $\int \frac{2x^3 - x + x^2 \cos x}{x^2} dx$
17. $\int \frac{5x^2 \sin x - x^3 - 2}{x^2} dx$
18. $\int \frac{x^3 \cdot 5^x - x^5 + 2x}{x^3} dx$

Задания для самостоятельной работы по разделу 8.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int (\sin(x) + 2^x - 6) dx$
2. $\int (6x^5 - 2x) dx$
3. $\int \left(\frac{5}{x^6} + 3\right) dx$
4. $\int 5\sqrt[3]{x^2} dx$



5. $\int (7\sqrt[4]{x^3} + 1) dx$

7. $\int (2 - 4x^2 + \sqrt[3]{x^2}) dx$

6. $\int (x^4 - \frac{3}{x^2} + 5) dx$

8. $\int \frac{x^2 \sin x + 3 - 2x}{x^2} dx$



Задания для аудиторной работы по разделу 9.

Вычислить определенные интегралы

1. $\int_{-1}^2 (2x-1)dx$

3. $\int_{-1}^0 (3x^2+2)dx$

5. $\int_0^2 (8x^3-4x)dx$

7. $\int_0^1 (5\sqrt[4]{x}-8)dx$

9. $\int_1^8 (4\sqrt[3]{x}+1)dx$

11. $\int_0^1 (6\sqrt[5]{x}-5)dx$

2. $\int_{-2}^2 \left(\frac{2}{x^3} + 4x \right) dx$

4. $\int_{-3}^5 \left(-\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$

6. $\int_{-1}^1 \left(-\frac{5}{x^6} + 3x^2 \right) dx$

8. $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$

10. $\int_0^1 (e^x - 9x^2)dx$

12. $\int_1^e \left(\frac{1}{x} + 3 \right) dx$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y = -x^2 - 2x + 3, y = 0$

2. $y = 2x^2, x = 1, x = 2$

3. $y = x^2 + 4x, y - x - 4 = 0$

4. $y = -x^2 + 3x; y = 2x$



Задания для самостоятельной работы по разделу 9.

Вычислить определенные интегралы

1. $\int_{-2}^1 (6x+1)dx$

2. $\int_0^1 4\sqrt[3]{x} + 1 dx$

3. $\int_{-1}^1 \left(\frac{4}{x^3} + 2x \right) dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y = x^2 + 1; \quad y = 3x + 3$

2. $y = -x^2 - 2x + 3; \quad y = 4 - 2x$



Задания для аудиторной работы по разделу 10.

Решить уравнения

1. $xdx = ydy$

2. $xe^y \cdot y' = 1$

3. $y \cdot y' + \sin x = 0$

4. $xy' + y = 0$

5. $y^3 \cdot y' = x^{\frac{5}{2}}$

6. $y^3x^2y' - x^5y^2 = 0$

7. $y^2x^3y' - x^2y = 0$

8. $x^3y' - x^2y = 0$

Найти частное решение дифференциальных уравнений

1. $y' - x^2 = 0; y(1) = 3$

2. $x^2y' - x^3 = 0; y(0) = 2$

3. $xy^4y' - x^2y^3 = 0; y(1) = 0$

4. $y^2y' - x^2y = 0; y(0) = 0$

Задания для самостоятельной работы по разделу 11.

Решить уравнения

1. $3x^2dx = ydy$

2. $y \cdot y' - \cos(x) = 0$

3. $4y^3y' = \sqrt{x}$

4. $x^4y' - x^2y^3 = 0$

Найти частное решение дифференциальных уравнений

1. $y' - 2x^3 = 0; y(1) = 0$

2. $x^3y' - x^4 = 0; y(0) = -1$

3. $x^2y^4y' - 3x^4y^3 = 0; y(1) = 0$

4. $y^4y' - xy^3 = 0; y(0) = 0$



Задания для аудиторной работы по разделу 11.

Задание 1. Статистические ряды.

Приведены варианты заданий по урожайности зерновых культур в хозяйствах Республики Беларусь. На основании статистических данных требуется:

- 1) составить интервальные статистические ряды распределения частот и относительных частот;
- 2) построить гистограмму и полигон частот;
- 3) вычислить числовые характеристики выборки: выборочную среднюю \bar{x}_v , моду $Mo(X)$, медиану $Me(X)$, выборочную дисперсию D_v , выборочное среднее квадратическое отклонение σ_v .

№ п.п.	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	36,4	26,2	22,7	11,8	23,5	28,6	18,1	13,0	22,8	30,6
2	14,4	26,4	20,7	24,6	41,6	15,6	41,3	22,3	30,9	31,3
3	15,5	27,8	25,5	34,6	24,2	20,1	26,2	20,9	29,9	28,3
4	34,4	26,1	26,1	34,2	32,7	21,7	31,9	22,1	30,0	30,0
5	21,9	23,0	17,9	25,5	26,6	16,4	17,6	14,8	29,6	23,0
6	14,2	12,9	22,0	22,7	31,1	24,3	27,1	20,3	26,0	29,4
7	28,6	29,5	21,7	27,3	35,3	24,8	27,4	16,0	30,6	29,6
8	22,0	20,5	29,1	28,6	16,3	21,2	27,1	32,5	28,7	25,5
9	25,3	11,3	22,3	26,0	23,1	22,0	20,4	22,8	27,2	28,5
10	16,1	15,4	30,2	15,5	26,0	25,1	38,2	21,0	29,4	26,2
11	30,2	26,9	29,5	28,2	26,5	16,4	23,0	27,8	26,7	27,9
12	34,0	14,6	28,6	31,9	29,0	22,0	23,1	15,4	38,2	27,8
13	33,1	26,0	20,6	23,8	16,9	25,0	21,2	12,3	35,6	28,2
14	20,7	23,5	21,0	26,8	10,3	24,1	29,1	20,9	25,0	31,3
15	22,7	18,4	23,8	34,4	28,8	21,8	34,8	20,9	28,7	32,3
16	32,9	41,3	20,8	18,7	25,9	21,6	31,5	16,3	30,6	26,6
17	26,5	24,0	21,3	26,8	30,7	20,6	26,3	22,6	22,0	31,2
18	25,7	25,0	23,3	25,5	26,7	24,0	27,5	24,1	32,6	28,9
19	21,9	22,9	13,7	24,1	23,0	22,4	19,2	15,9	21,8	28,1
20	32,6	17,2	14,1	22,0	10,8	15,9	29,0	25,5	34,4	24,6
21	25,9	23,3	32,3	34,5	16,2	20,3	30,6	23,4	29,8	27,9
22	18,6	32,0	26,3	30,9	22,0	14,9	30,1	17,1	31,3	31,5
23	31,2	21,8	28,9	17,1	22,9	22,5	26,0	19,0	29,3	29,1



24	22,4	25,8	23,4	21,9	40,3	25,3	30,4	18,8	30,3	25,0
25	22,6	26,1	23,0	27,0	22,7	18,9	21,6	19,7	37,5	30,6
26	29,5	29,7	24,7	34,7	26,0	20,2	19,5	22,4	27,8	26,6
27	34,1	26,7	21,2	36,6	32,8	29,2	25,9	24,1	29,3	26,4
28	28,0	27,8	21,6	18,0	27,3	16,9	28,2	25,6	30,4	30,2
29	23,5	15,4	14,8	29,2	15,8	26,6	27,4	15,8	37,1	28,1
30	17,7	24,6	15,3	22,1	30,6	23,2	21,3	22,0	34,4	24,1
31	23,0	27,6	25,5	16,8	21,9	22,9	31,8	9,5	35,1	28,6
32	26,9	21,1	24,4	29,0	29,0	29,9	16,5	18,8	32,2	36,6
33	31,8	34,4	30,9	14,3	15,7	20,4	25,6	23,6	26,4	32,2
34	15,2	31,7	28,8	17,1	25,8	24,2	34,1	21,5	26,9	33,8
35	25,8	28,3	37,4	11,1	30,2	20,3	24,5	23,1	35,8	27,5
36	24,9	36,4	22,3	27,1	13,7	16,4	23,1	19,4	31,3	34,1
37	25,8	31,7	19,5	37,7	16,7	24,9	43,1	22,2	27,9	27,5
38	29,3	19,8	30,7	29,3	24,5	21,7	31,8	26,5	34,7	25,4
39	29,1	21,3	17,8	19,9	21,6	14,2	32,1	19,0	31,0	32,1
40	26,1	11,5	26,5	24,8	32,0	24,6	26,9	24,7	32,7	28,1
41	20,6	25,3	17,7	28,4	10,4	27,3	28,1	20,4	29,7	28,4
42	25,9	26,5	22,4	21,1	26,4	17,8	23,1	22,9	31,7	26,3
43	18,8	25,7	19,3	12,0	24,4	23,4	23,2	21,5	26,2	29,7
44	16,7	22,6	27,7	18,0	26,0	22,5	16,8	18,0	28,6	28,3
45	28,1	24,1	31,3	23,3	13,5	26,4	26,8	26,8	22,9	28,2
46	29,8	30,0	30,6	15,9	16,0	19,1	30,4	18,4	37,7	28,6
47	24,3	33,5	29,7	23,2	25,0	20,7	30,1	26,8	26,9	30,7
48	30,7	20,4	33,0	34,0	33,3	25,0	22,1	17,2	31,8	32,4
49	25,5	24,0	24,6	26,0	23,1	20,8	28,5	16,5	21,4	29,1
50	26,8	22,4	25,6	19,9	28,0	16,0	21,3	18,9	26,9	26,4

№ п.п.	Варианты									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	22,2	28,5	35,5	35,1	27,7	28,1	45,2	34,7	34,1	16,7
2	26,9	20,2	42,7	35,6	23,9	19,2	39,1	28,4	30,2	24,7
3	35,3	33,5	32,9	39,4	31,9	23,5	34,8	36,4	21,7	31,4
4	25,8	15,3	38,8	40,5	27,9	30,7	34,8	34,5	9,8	26,8
5	25,7	24,6	37,1	33,3	40,9	31,6	38,2	18,6	25,5	21,6
6	25,4	22,0	39,7	28,6	34,0	31,3	31,6	44,4	31,4	26,0
7	14,5	17,4	40,8	37,7	28,0	33,5	41,4	35,1	30,7	20,6
8	26,4	17,9	44,5	44,8	33,3	33,7	34,4	28,9	30,2	26,3



9	24,9	36,4	26,7	40,3	28,4	33,9	29,7	23,8	15,2	20,4
10	45,1	25,9	47,6	29,2	17,4	25,8	37,5	27,7	18,6	20,6
11	14,1	34,7	36,0	39,1	19,2	30,8	29,4	36,9	16,7	31,0
12	25,1	24,8	37,8	42,3	29,3	32,2	38,4	29,8	8,2	25,6
13	19,3	17,8	39,5	40,4	20,4	24,3	38,9	30,8	34,7	26,6
14	19,2	24,1	36,0	30,2	39,7	26,7	46,4	30,2	14,6	28,0
15	23,0	29,2	25,3	34,1	29,4	40,4	34,5	24,6	21,3	38,2
16	14,7	17,8	38,1	33,9	26,0	36,5	38,4	28,9	22,5	19,9
17	33,2	32,4	31,4	39,7	33,2	28,0	44,6	30,3	15,9	23,9
18	27,7	21,4	39,0	37,5	27,2	40,3	33,1	39,7	25,3	26,1
19	34,6	32,4	33,9	42,2	39,6	25,4	29,2	20,8	20,9	23,8
20	28,0	23,4	42,3	39,9	35,3	27,4	40,9	38,1	26,0	26,7
21	28,9	24,1	31,8	37,8	27,8	30,2	33,9	46,5	12,1	29,3
22	24,2	25,4	34,8	42,2	23,8	33,2	26,2	49,9	23,3	29,1
23	44,1	18,4	40,4	44,9	28,4	39,4	37,3	43,5	35,3	23,5
24	18,6	20,7	40,1	37,6	46,5	32,5	37,2	35,6	29,8	25,8
25	40,0	31,3	26,4	37,2	28,4	30,9	33,3	31,8	29,7	21,6
26	34,5	26,7	34,6	33,6	27,5	24,1	27,2	31,0	30,1	31,2
27	21,8	25,9	39,3	39,3	20,8	45,1	33,1	28,5	12,0	16,5
28	19,0	17,3	32,1	34,3	37,2	35,4	30,9	29,3	32,2	22,9
29	15,3	25,7	49,3	35,6	23,5	32,4	44,0	18,3	18,2	23,2
30	30,4	20,9	39,9	39,5	29,5	22,9	37,8	26,0	24,4	28,1
31	22,9	22,4	30,8	34,0	37,5	21,1	33,6	34,2	20,7	28,3
32	35,4	28,9	44,8	36,3	38,5	37,5	36,3	42,3	27,9	24,0
33	26,2	27,4	33,6	33,2	19,9	31,4	34,2	46,8	22,3	23,7
34	27,4	24,5	43,8	37,2	37,2	27,7	39,7	38,8	27,6	28,5
35	25,7	22,9	39,8	36,8	21,1	34,3	36,7	38,4	17,1	24,2
36	22,0	22,8	35,2	34,1	49,7	29,0	41,0	30,7	21,9	27,3
37	26,2	16,8	34,9	30,8	22,3	34,9	29,9	33,6	15,0	24,6
38	26,4	19,8	35,0	34,1	36,7	23,8	39,1	39,1	14,0	21,8
39	33,2	23,1	42,9	35,0	28,5	24,8	39,1	32,3	18,3	15,5
40	38,6	22,7	34,9	38,6	32,0	33,9	31,3	36,4	22,7	16,2
41	19,0	26,0	32,9	34,3	22,2	22,9	38,8	42,3	23,9	25,1
42	48,1	21,9	28,9	29,7	38,7	22,6	33,4	28,8	31,7	22,1
43	27,0	24,3	28,3	34,5	26,0	29,0	29,7	34,5	29,0	22,1
44	28,0	22,7	29,5	43,8	45,2	45,8	36,0	36,1	30,8	27,6
45	44,2	17,5	51,7	38,1	31,7	32,9	35,2	39,1	12,7	19,7
46	20,6	21,3	37,7	27,7	41,5	26,9	32,1	42,0	27,2	19,4



47	35,6	27,4	36,3	46,3	38,5	28,5	29,5	28,3	19,5	21,8
48	24,0	14,9	42,2	39,6	32,2	32,6	42,4	42,8	32,0	35,2
49	31,0	31,7	30,8	39,0	40,1	27,1	36,1	31,1	25,1	22,9
50	26,7	31,4	27,7	38,8	39,3	29,2	43,6	37,0	18,5	21,4

№ п.п.	Варианты									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	23,9	32,5	27,0	24,9	23,7	20,4	21,8	27,2	17,9	17,5
2	32,6	32,2	28,7	21,4	21,3	13,5	22,1	31,8	14,9	22,0
3	25,5	15,2	27,0	30,2	22,9	22,7	21,4	33,2	22,6	39,9
4	21,8	9,5	18,1	18,5	29,3	18,4	15,1	26,3	20,2	21,0
5	35,7	24,2	20,0	23,0	27,9	27,2	19,9	22,1	39,2	33,2
6	21,3	22,2	29,4	21,4	19,0	17,5	17,5	18,9	21,0	24,9
7	30,7	33,0	27,7	29,7	16,5	28,5	23,0	31,1	25,2	26,6
8	28,3	23,1	24,2	25,1	17,6	24,2	25,8	31,0	33,0	26,2
9	23,9	21,2	22,6	21,0	27,4	23,0	18,9	27,8	16,5	20,5
10	23,0	15,1	26,7	24,4	26,0	17,9	21,1	24,3	23,1	24,1
11	24,9	27,9	25,9	23,5	22,1	26,7	23,7	20,6	16,1	24,4
12	28,6	27,6	17,9	21,2	26,6	29,0	20,1	21,1	36,5	15,3
13	33,7	17,3	19,7	23,6	28,4	22,5	12,8	33,5	13,3	20,9
14	27,2	22,9	24,8	25,1	19,4	29,3	21,5	36,7	38,8	23,8
15	29,6	26,6	20,4	28,3	22,3	34,7	24,3	35,4	19,7	29,7
16	29,7	34,9	20,5	23,0	23,6	15,3	20,3	29,9	28,3	15,6
17	31,4	13,2	25,7	26,6	24,5	26,4	20,0	37,9	32,9	24,1
18	25,7	24,2	22,5	24,4	27,4	22,6	20,6	27,4	33,9	24,9
19	31,7	14,5	22,0	26,4	22,4	24,9	20,4	25,0	29,1	23,4
20	21,8	14,1	19,2	25,1	12,7	34,1	22,1	23,0	31,4	31,3
21	28,3	27,1	23,2	23,0	12,6	27,3	23,1	23,8	22,2	31,9
22	23,4	31,0	23,6	15,9	25,5	28,3	19,1	24,1	16,1	19,9
23	30,8	15,1	25,4	20,6	19,2	20,7	18,7	34,0	33,8	27,9
24	21,5	34,4	22,4	29,1	18,1	24,7	26,5	27,1	13,5	23,1
25	25,8	22,5	19,7	29,3	16,2	25,6	19,7	19,3	43,4	29,1
26	26,5	17,2	23,2	25,5	19,3	39,7	20,0	38,1	31,5	20,0
27	19,0	29,4	24,9	26,2	22,9	31,8	20,4	28,5	31,5	18,5
28	23,8	10,0	23,6	28,6	30,1	22,3	17,9	28,4	23,7	27,6
29	27,6	12,9	23,2	29,4	25,4	26,2	24,5	30,0	25,4	23,9
30	30,5	30,7	15,8	18,1	19,9	27,0	18,3	31,1	24,1	36,4
31	26,5	24,1	22,8	23,5	20,2	30,5	14,6	39,3	28,7	28,9



32	26,9	35,6	24,3	29,1	15,8	35,2	15,2	24,2	28,3	21,9
33	24,5	17,8	24,5	27,0	17,0	23,9	23,0	32,8	26,8	27,3
34	27,8	20,5	21,2	27,3	23,2	11,4	17,1	34,6	31,1	23,2
35	31,0	21,6	20,5	19,3	20,4	20,6	16,2	32,3	22,0	25,7
36	28,7	22,5	27,6	28,2	22,4	25,6	21,6	34,6	21,3	19,4
37	27,2	12,9	17,0	27,0	24,3	25,4	15,9	21,9	32,6	26,4
38	22,4	18,6	21,3	21,2	21,9	25,4	18,6	36,8	29,6	19,4
39	26,2	33,8	19,9	24,1	25,6	25,9	22,8	30,7	24,9	22,0
40	29,5	11,2	20,0	26,1	13,6	28,3	23,3	29,1	28,4	18,3
41	27,4	24,4	18,3	28,5	20,3	18,4	18,4	34,9	45,1	26,6
42	21,5	24,7	22,2	25,7	18,1	20,9	19,5	31,5	23,8	23,0
43	19,6	30,2	24,0	23,1	25,7	21,8	22,7	32,5	36,9	19,0
44	28,9	32,0	17,7	19,1	23,5	21,4	22,5	32,7	21,9	21,8
45	28,3	28,7	17,8	29,6	19,5	33,8	21,6	32,0	19,0	11,8
46	21,1	22,1	24,5	34,3	21,1	34,6	16,1	21,7	31,3	21,1
47	25,8	27,8	27,1	23,7	24,6	18,8	15,2	25,7	30,1	14,7
48	24,6	13,6	27,0	34,0	20,9	23,2	19,5	20,4	18,2	21,7
49	24,6	18,4	23,3	24,8	23,2	26,8	16,2	22,2	22,1	28,3
50	23,1	34,2	21,1	30,6	24,9	29,3	21,5	22,3	28,4	35,1

Решение типового примера

31	36	34	35	41	44	44	35	34	39
40	40	34	48	37	44	39	41	32	38
36	37	39	38	37	34	44	41	34	35
33	30	40	41	40	43	36	30	35	36
35	45	37	33	34	35	34	36	35	36

На основании статистических данных случайной величины X требуется:

- 1) составить интервальные статистические ряды распределения частот и относительных частот;
- 2) построить гистограмму и полигон частот;
- 3) вычислить числовые характеристики выборки: выборочную среднюю $\bar{x}_в$, моду $Mo(X)$, медиану $Me(X)$, выборочную дисперсию $D_в$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$.

Решение. 1. Построение интервального вариационного ряда начинается с разбиения интервала изменения случайной величины на k частичных интервалов одинаковой ширины и подсчета частот попадания случайной величины в каждый из этих интервалов.



Для определения числа интервалов k можно пользоваться формулой $k \approx 1 + 3,32 \cdot \lg n$, где n – объем выборки.

При $n = 50$ получаем $k = 1 + 3,32 \cdot \lg 50 \approx 7$.

Определим границы интервалов. Для этого находим размах выборки R :

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

В нашем случае $x_{\max} = 48$, $x_{\min} = 30$, $R = 48 - 30 = 18$.

Обычно начало интервала выбирают на половину ширины интервала левее x_{\min} , а конец последнего на половину ширины интервала правее x_{\max} . Тогда ширина интервала определяется по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k - 1}.$$

Границы интервала находятся следующим образом:

$$a_0 = x_{\min} - \frac{h}{2}; \quad a_1 = a_0 + h; \quad a_2 = a_1 + h; \quad \dots; \quad a_n = a_{n-1} + h.$$

В качестве контроля должно выполняться равенство

$$a_n = x_{\max} + \frac{h}{2}.$$

В нашем случае $h = \frac{18}{6} = 3$. Тогда

$$a_0 = 30 - 1,5 = 28,5; \quad a_1 = 28,5 + 3 = 31,5; \quad a_2 = 31,5 + 3 = 34,5;$$

$$a_3 = 34,5 + 3 = 37,5; \quad a_4 = 37,5 + 3 = 40,5; \quad a_5 = 40,5 + 3 = 43,5;$$

$$a_6 = 43,5 + 3 = 46,5; \quad a_7 = 46,5 + 3 = 49,5.$$

Составим статистические ряды распределения частот и относительных частот.

Интервалы значений СВ X	Подсчет частот	Частоты m_i	Относительные частоты $w_i = m_i / n$
[28,5; 31,5)	Ш	3	0,06
[31,5; 34,5)	ШШШШШ	10	0,2
[34,5; 37,5)	ШШШШШШШШШШ	17	0,34
[37,5; 40,5)	ШШШШШ	9	0,18
[40,5; 43,5)	ШШШ	5	0,1
[43,5; 46,5)	ШШШ	5	0,1
[46,5; 49,5]	Ш	1	0,02

При подсчете частот в каждый интервал включаются те значения X , которые больше или равны нижней границы и меньше верхней границы соответствующего интервала. Сумма всех частот должна рав-



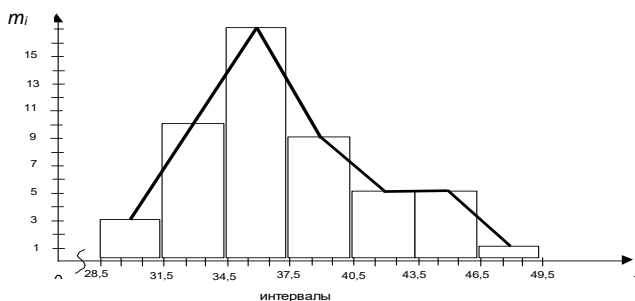
няться объему выборки ($n = 50$). Для нахождения относительных частот нужно частоты разделить на объем выборки:

$$w_i = \frac{m_i}{n}.$$

2. Для построения гистограммы частот по оси Ox откладываем частичные интервалы и на каждом из них строим прямоугольник, высота которого равна частоте соответствующего интервала. Полученная при этом фигура называется гистограммой частот.

Для построения полигона частот проводим ломаную линию, соединяющую середины верхних оснований прямоугольников.

Гистограмма и полигон частот



Аналогичным образом строится гистограмма и полигон относительных частот.

3. Для нахождения выборочной средней $\bar{x}_в$ воспользуемся формулой

$$\bar{x}_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot m_i,$$

где x_i и m_i – соответственно середина и частота i -го интервала ($i = \overline{1,7}$).

Средины интервалов определяем по формуле

$$x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}.$$

В нашем случае

$$x_1 = \frac{28,5 + 31,5}{2} = 30; \quad x_2 = \frac{31,5 + 34,5}{2} = 33 \text{ и т.д.}$$

Расчеты сводим в таблицу.



Интервалы значений	Середины интервалов x_i	Частоты m_i	$x_i m_i$
[28,5; 31,5)	30	3	90
[31,5; 34,5)	33	10	330
[34,5; 37,5)	36	17	612
[37,5; 40,5)	39	9	351
[40,5; 43,5)	42	5	210
[43,5; 46,5)	45	5	225
[46,5; 49,5]	48	1	48
Суммы		50	1866

Тогда $\bar{x} = \frac{1866}{50} = 37,32$.

Моду вычисляем по формуле

$$Mo(X) = x_0 + h \frac{m_0 - m_1}{(m_0 - m_1) + (m_0 - m_2)},$$

где $x_0 = 34,5$ – начало модального интервала (интервала с наибольшей частотой);

$h = 3$ – ширина интервала;

$m_0 = 17$ – частота модального интервала;

$m_1 = 10$ – частота интервала, предшествующего модальному;

$m_2 = 9$ – частота интервала, следующего за модальным.

В нашем случае

$$Mo(X) = 34,5 + 3 \cdot \frac{17 - 10}{(17 - 10) + (17 - 9)} = 35,9.$$

Для определения медианы воспользуемся формулой

$$Me(X) = x_0 + h \cdot \frac{n - 2 \cdot n_1}{2 \cdot m_{Me}},$$

где x_0 – начало медианного интервала (первого из интервалов, у которого накопленная частота больше половины объема выборки);

h – ширина интервала;

n – объем выборки;

n_1 – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

m_{Me} – частота медианного интервала.



Подсчитаем накопленные частоты интервалов и сведем полученные результаты в таблицу.

Интервалы	Частоты	Накопленные частоты
[28,5; 31,5)	3	3
[31,5; 34,5)	10	13
[34,5; 37,5)	17	30
[37,5; 40,5)	9	39
[40,5; 43,5)	5	44
[43,5; 46,5)	5	49
[46,5; 49,5]	1	50

Имеем $x_0 = 34,5$; $h = 3$; $n = 50$; $n_1 = 13$; $m_{Me} = 17$. Тогда

$$Me(X) = 34,5 + 3 \cdot \frac{25 - 13}{17} = 36,6 .$$

Выборочную дисперсию найдем по формуле

$$D_B = \overline{x^2} - (\overline{x_B})^2 ,$$

где $\overline{x^2}$ – среднее значение квадрата случайной величины;

$\overline{x_B}$ – среднее значение случайной величины.

Вычислим $\overline{x^2}$ по формуле $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 m_i$ и получим

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{30^2 \cdot 3 + 33^2 \cdot 10 + 36^2 \cdot 17 + 39^2 \cdot 9 + 42^2 \cdot 5 + 45^2 \cdot 5 + 48^2 \cdot 1}{50} = \\ &= \frac{70560}{50} = 1411,2 . \end{aligned}$$

Тогда $D_B = 1411,2 - (37,32)^2 = 1411,2 - 1392,8 = 18,4$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma_B = \sqrt{D(X)} = \sqrt{18,4} \approx 4,3$.

Задание 2. Корреляция.

По данной корреляционной таблице требуется найти:

- 1) условные средние $\overline{y_x}$ и $\overline{x_y}$, построить точки $(x_i; \overline{y_x})$, $(\overline{x_y}; y_j)$ и по характеру их расположения подобрать вид функций регрессии;
- 2) коэффициент корреляции и сделать вывод о силе корреляционной связи;
- 3) теоретические зависимости $X(y)$ и $Y(x)$, построить их графики.



Корреляционные таблицы выборочных данных случайных величин X и Y .

1.

Случайные величины		X						m_y
		5	10	15	20	25	30	
Y	15	1	2					3
	25		4	2				6
	35			1	23	1		25
	45			1	5	3		9
	55				2	3	2	7
m_x		1	6	4	30	7	2	$n = 50$

2.

Случайные величины		X						m_y
		20	25	30	35	40	45	
Y	25	2	1					3
	35		3	2				5
	45			3	22	1		26
	55			1	4	3		8
	65				2	4	2	8
m_x		2	4	6	28	8	2	$n = 50$

3.

Случайные величины		X						m_y
		10	15	20	25	30	35	
Y	20	1	3					4
	30		2	2				4
	40			3	18	4		25
	50			1	5	4		10
	60				2	3	2	7
m_x		1	5	6	25	11	2	$n = 50$

4.

Случайные величины		X						m_y
		15	20	25	30	35	40	
Y	30	1	3					4
	40		2	2				4
	50			5	20	1		26
	60			2	5	3		10
	70				2	3	1	6
m_x		1	5	9	27	7	1	$n = 50$

5.

Случайные величины		X						m_y
		25	30	35	40	45	50	
Y	35	3	1					4
	45		3	1				4
	55			3	20	2		25
	65			1	4	3		8
	75				2	3	4	9
m_x		3	4	5	26	8	4	$n = 50$



6.

Случайные величины	X							
	10	15	20	25	30	35	my	
Y	20	1	2				3	
	30		2	3			5	
	40			2	15	5	22	
	50			4	5	4	13	
	60				2	3	2	7
	mx	1	4	9	22	12	2	n = 50

7.

Случайные величины	X							
	1	6	11	16	21	26	my	
Y	10	1	2				3	
	20		2	2			4	
	30			2	24	1	27	
	40			1	5	3	9	
	50				1	4	2	7
	mx	1	4	5	30	8	2	n = 50

8.

Случайные величины	X							
	2	7	12	17	22	27	my	
Y	25	1	2				3	
	35		3	2			5	
	45			3	22	2	27	
	55			1	4	3	8	
	65				2	3	2	7
	mx	1	5	6	28	8	2	n = 50

9.

Случайные величины	X							
	3	8	13	18	23	28	my	
Y	30	2	2				4	
	40		3	2			5	
	50			20	1	4	25	
	60			2	5	3	10	
	70				2	3	1	6
	mx	2	5	24	8	10	1	n = 50

10.

Случайные величины	X							
	4	9	14	19	24	29	my	
Y	32	2	2				4	
	42		2	3			5	
	52			6	21	2	29	
	62			1	4	2	7	
	72				1	1	3	5
	mx	2	4	10	26	5	3	n = 50



11.

Случайные величины	X							
	6	11	16	21	26	31	my	
Y	16	2	2				4	
	26		3	3			6	
	36			1	22	1	24	
	46			1	6	6	13	
	56				1	1	1	3
	mx	2	5	5	29	8	1	n = 50

12.

Случайные величины	X							
	11	16	21	26	31	36	my	
Y	21	2	2				4	
	31		2	3			5	
	41			3	19	3	25	
	51			2	5	3	10	
	61				3	1	2	6
	mx	2	4	8	27	7	2	n = 50

13.

Случайные величины	X							
	21	26	31	36	41	46	my	
Y	24	2	2				4	
	34		3	2			5	
	44			3	20	1	24	
	54			2	4	3	9	
	61				2	4	2	8
	mx	2	5	7	26	8	2	n = 50

14.

Случайные величины	X							
	13	18	23	28	33	38	my	
Y	32	2	2				4	
	42		2	3			5	
	52			6	21	2	29	
	62			1	4	2	7	
	72				1	1	3	5
	mx	2	4	10	26	5	3	n = 50

15.

Случайные величины	X							
	20	25	30	35	40	45	my	
Y	37	2	1				3	
	47		2	2			4	
	57			3	20	1	24	
	67			2	2	4	8	
	77				3	3	5	11
	mx	2	3	7	25	8	5	n = 50



16.

Случайные величины	X							
	11	16	21	31	36	41	my	
Y	21	2	1				3	
	31		2	4			6	
	41			2	14	4	20	
	51			5	1	4	10	
	61				5	2	4	11
	m _x	2	3	11	20	10	4	n = 50

17.

Случайные величины	X							
	11	16	21	26	31	36	my	
Y	11	2	1				3	
	12		2	3			4	
	13			2	23	2	27	
	14			2	4	1	9	
	15				1	5	2	7
	m _x	2	3	7	28	8	2	n = 50

18.

Случайные величины	X							
	3	8	13	18	23	28	my	
Y	20	2	2				3	
	25		2	1			3	
	30			2	21	3	26	
	35			2	3	3	8	
	40				3	3	4	10
	m _x	2	4	5	27	9	4	n = 50

19.

Случайные величины	X							
	4	9	14	19	24	27	my	
Y	31	3	1				4	
	41		4	2			6	
	51			21	1	3	25	
	61			2	4	2	8	
	71				3	2	2	7
	m _x	3	5	25	8	7	2	n = 50

20.

Случайные величины	X							
	1	6	11	16	21	26	my	
Y	31	1	2				3	
	41		3	2			5	
	51			1	20	1	22	
	61			1	5	2	8	
	71				3	6	3	12
	m _x	1	5	4	28	9	3	n = 50



21.

Случайные величины	X							
	31	40	50	63	67	72	my	
Y	1	1	2				3	
	6		3	2			5	
	11			1	20	1	22	
	16			1	5	2	8	
	20				3	6	3	12
	mx	1	5	4	28	9	3	n = 50

22.

Случайные величины	X							
	15	25	33	40	45	52	my	
Y	9	3	1				4	
	15		4	2			6	
	20			21	1	3	25	
	25			2	4	2	8	
	30				3	2	2	7
	mx	3	5	25	8	7	2	n = 50

23.

Случайные величины	X							
	2	7	15	19	25	29	my	
Y	13	2	2				3	
	18		2	1			3	
	27			2	21	3	26	
	35			2	3	3	8	
	40				3	3	4	10
	mx	2	4	5	27	9	4	n = 50

24.

Случайные величины	X							
	17	22	27	34	38	45	my	
Y	22	2	1				3	
	33		2	4			6	
	40			2	14	4	20	
	54			5	1	4	10	
	62				5	2	4	11
	mx	2	3	11	20	10	4	n = 50

25.

Случайные величины	X							
	1	6	12	16	21	26	my	
Y	124	2	2				4	
	134		3	2			5	
	144			3	20	1	24	
	154			2	4	3	9	
	161				2	4	2	8
	mx	2	5	7	26	8	2	n = 50



26.

Случайные величины	X							
	11	16	21	27	31	35	my	
Y	120	1	2				3	
	130		2	3			5	
	140			2	15	5	22	
	150			4	5	4	13	
	160				2	3	2	7
	mx	1	4	9	22	12	2	n = 50

27.

Случайные величины	X							
	125	130	135	140	145	150	my	
Y	25	3	1				4	
	35		3	1			4	
	45			3	20	2	25	
	55			1	4	3	8	
	65				2	3	4	9
	mx	3	4	5	26	8	4	n = 50

28.

Случайные величины	X							
	115	120	125	130	135	140	my	
Y	10	1	3				4	
	20		2	2			4	
	30			5	20	1	26	
	40			2	5	3	10	
	50				2	3	1	6
	mx	1	5	9	27	7	1	n = 50

29.

Случайные величины	X							
	10	15	20	25	30	35	my	
Y	125	2	1				3	
	135		3	2			5	
	145			3	22	1	26	
	155			1	4	3	8	
	165				2	4	2	8
	mx	2	4	6	28	8	2	n = 50

30.

Случайные величины	X							
	15	20	25	28	30	34	my	
Y	11	1	2				3	
	31		4	2			6	
	42			1	23	1	25	
	53			1	5	3	9	
	64				2	3	2	7
	mx	1	6	4	30	7	2	n = 50



Решение типового примера

В виде корреляционной таблицы дана зависимость СВ X и Y .

Y	X						m _y
	39	45	51	57	63	69	
0,6	2	3					5
0,9		4	5				9
1,2			2	17	3		22
1,5			2	6	3		11
1,8				1	1	1	3
m _x	2	7	9	24	7	1	n = 50

Требуется найти:

- 1) условные средние \bar{y}_x и \bar{x}_y , построить точки $(x_j; \bar{y}_{xj})$, $(\bar{x}_{yi}; y_i)$ и по характеру их расположения подобрать вид функций регрессии;
- 2) коэффициент корреляции и сделать вывод о силе корреляционной связи;
- 3) теоретические зависимости $X(y)$ и $Y(x)$, построить их графики.

Решение. 1. Определим условные средние \bar{y}_{xj} по формуле

$$\bar{y}_{xj} = \frac{m_{1j}y_1 + m_{2j}y_2 + \dots + m_{kj}y_k}{m_{1j} + m_{2j} + \dots + m_{kj}} = \frac{1}{m_{xj}} \sum_{i=1}^k m_{ij} y_i$$

$$\bar{y}_{39} = 0,6; \quad \bar{y}_{45} = \frac{0,6 \cdot 3 + 0,9 \cdot 4}{7} \approx 0,8;$$

$$\bar{y}_{51} = \frac{0,9 \cdot 5 + 1,2 \cdot 2 + 1,5 \cdot 2}{9} = 1,1; \quad \bar{y}_{57} = \frac{1,2 \cdot 17 + 1,5 \cdot 6 + 1,8}{24} = 1,3;$$

$$\bar{y}_{63} = \frac{1,2 \cdot 3 + 1,5 \cdot 3 + 1,8}{7} \approx 1,4; \quad \bar{y}_{69} = 1,8.$$

Результаты вычислений занесем в таблицу.

\bar{X}	39	45	51	57	63	69
\bar{Y}_x	0,6	0,8	1,1	1,3	1,4	1,8

Аналогичным образом определим условные средние \bar{x}_{yi} :

$$\bar{x}_{yi} = \frac{m_{i1}x_1 + m_{i2}x_2 + \dots + m_{is}x_s}{m_{i1} + m_{i2} + \dots + m_{is}} = \frac{1}{m_{yi}} \sum_{j=1}^s m_{ij} x_j$$



Получим:

$$\bar{x}_{0,6} = \frac{39 \cdot 2 + 45 \cdot 3}{5} = 42,6;$$

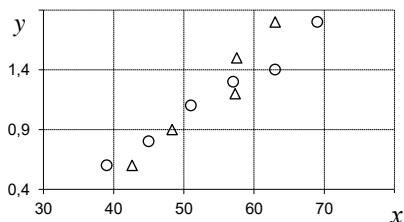
$$\bar{x}_{0,9} = \frac{45 \cdot 4 + 51 \cdot 5}{9} = 48,3;$$

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{51 \cdot 2 + 57 \cdot 17 + 63 \cdot 3}{22} \approx 57,3; \quad \bar{x}_{1,5} = \frac{51 \cdot 2 + 57 \cdot 6 + 63 \cdot 3}{11} \approx 57,5;$$

$$\bar{x}_{1,8} = \frac{57 + 63 + 69}{3} = 63.$$

\bar{Y}	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8
\bar{X}_y	42,6	48,3	57,3	57,5	63

Принимая каждую пару значений $(x_j; \bar{y}_{xy})$ и $(\bar{x}_{yi}; y_i)$ за координаты точек, строим эти точки в прямоугольной системе координат. По характеру расположения построенных точек сделаем вывод о виде функции регрессии $y(x)$ и $x(y)$.



При этом кружочками покажем точечный график зависимости $y(x)$, треугольниками – $x(y)$. Характер расположения точек указывает на линейную зависимость между x и \bar{y}_x , y и \bar{x}_y , поэтому можно предположить, что связь между данными осуществляется по формулам: $\bar{y}_x = k_1 x + b_1$ и $\bar{x}_y = k_2 y + b_2$. Установим их параметры.

2. Для определения коэффициента корреляции воспользуемся формулой

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

предварительно вычислив все входящие в нее величины:



$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s x_j m_{xj} = \frac{1}{50} (39 \cdot 2 + 45 \cdot 7 + 51 \cdot 9 + 57 \cdot 24 + 63 \cdot 7 + 69 \cdot 1) \approx 54,6;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k y_i m_{yi} = \frac{1}{50} (0,6 \cdot 5 + 0,9 \cdot 9 + 1,2 \cdot 22 + 1,5 \cdot 11 + 1,8 \cdot 3) \approx 1,2;$$

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^s x_j y_i m_{ij} = \frac{1}{50} (39 \cdot 0,6 \cdot 2 + 45 \cdot (0,6 \cdot 3 + 0,9 \cdot 4) + \\ &+ 51 \cdot (0,9 \cdot 5 + 1,2 \cdot 2 + 1,5 \cdot 2) + 57 \cdot (1,2 \cdot 17 + 1,5 \cdot 6 + 1,8 \cdot 1) + \\ &+ 63 \cdot (1,2 \cdot 3 + 1,5 \cdot 3 + 1,8 \cdot 1) + 69 \cdot 1,8 \cdot 1) = \frac{3321}{50} \approx 66,4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s (x_j - \bar{x})^2 m_{xj} = \frac{1}{50} ((39 - 54,6)^2 \cdot 2 + (45 - 54,6)^2 \cdot 7 + \\ &+ (51 - 54,6)^2 \cdot 9 + (57 - 54,6)^2 \cdot 24 + (63 - 54,6)^2 \cdot 7 + (69 - 54,6)^2 \cdot 1) = \\ &= \frac{2088}{50} = 41,76; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2 m_{yi} = \frac{1}{50} ((0,6 - 1,2)^2 \cdot 5 + (0,9 - 1,2)^2 \cdot 9 + \\ &+ (1,2 - 1,2)^2 \cdot 22 + (1,5 - 1,2)^2 \cdot 11 + (1,8 - 1,2)^2 \cdot 3) = \\ &= \frac{1}{50} (1,8 + 0,81 + 0,99 + 1,08) = \frac{4,68}{50} \approx 0,09; \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} \approx 6,5; \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,09} = 0,3.$$

Тогда коэффициент корреляции будет равен

$$r = \frac{66,4 - 54,6 \cdot 1,2}{6,5 \cdot 0,3} = \frac{66,4 - 65,52}{1,95} = \frac{0,88}{1,95} = 0,46.$$

Так как коэффициент корреляции $r = 0,46$, то между СВ X и Y существует прямая корреляционная зависимость. По величине коэффициента корреляции определяем, что эта связь средняя.

3. Уравнение прямой регрессии $y(x)$ имеет следующий вид:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}).$$

В нашем случае получим

$$\bar{y}_x - 1,2 = 0,46 \cdot \frac{0,3}{6,46} (x - 54,6).$$

Упростив, получим зависимость $y(x)$:



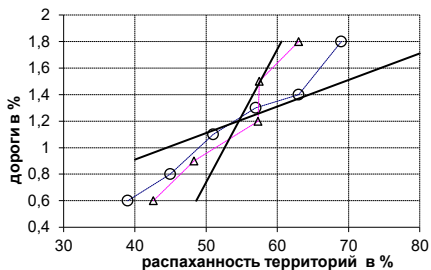
$$\bar{y}_x = 0,02x + 0,11 .$$

Аналогично получим зависимость $x(y)$:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}), \quad \bar{x}_y - 54,6 = 0,46 \cdot \frac{6,46}{0,3} (y - 1,2), \text{ или}$$

$$\bar{x}_y = 9,97y + 42,64 .$$

Построим эмпирические и теоретические зависимости.



Нетрудно заметить, что обе прямые проходят через точку $(\bar{x}; \bar{y})$, т. е. точку $(54,6; 1,2)$.