Лабораторная работа № 23.
СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В MICROSOFT EXCEL

Цель: ознакомиться с технологией создания табличной модели оптимизационной задачи в Microsoft Excel; научиться использовать надстройку Поиск решения для решения прикладных задач.

Основные понятия

В современных условиях большие транспортные расходы связаны с простоями в ожидании обслуживания на погрузочно-разгрузочных работах, порожними пробегами, встречными и нерациональными перевозками, затратами на бензин, техническое обслуживание и заработную плату водителей. В связи с этим необходимо решать задачи оптимального планирования перевозок грузов из пунктов отправления (баз, станций, фабрик, сельхозпредприятий, заводов) в пункты назначения (магазины, склады) методами, позволяющими оптимизировать план по какому-либо экономическому показателю, например финансовых затрат или времени на перевозку грузов, расстояния. Задачи такого вида называются транспортными задачами.

Постановка задачи. Требуется составить план перевозок однородного груза таким образом, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

Исходная информация:

a_i – количество единиц груза в i-м пункте отправления ($i=\overline{1,m}$);

b_j – потребность в j-м пункте назначения ($j=\overline{1,n}$), в единицах груза;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта в j-й.

Найти:

x_{ij} – планируемое количество единиц груза для перевозки из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Цель: минимум затрат на перевозку.

Математическая модель

Математическая модель задачи выглядит следующим образом.

Целевая функция:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \to \min$$

Целевая функция представляет суммарную стоимость перевозок.

Ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \ i = \overline{1, m},$$

что означает следующее, вывоз груза из *i*-го пункта отправления равен запасу груза в этом пункте.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1, n},$$

что означает следующее, доставка груза в *j*-й пункт назначения равна спросу на груз в этом пункте.

Граничные условия:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},$$

что означает следующее, объем перевозимого груза не может быть отрицательным.

Согласно уравнениям ограничений модели количество вывезенного груза должно быть равно количеству принятого, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям. Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, называется закрытой моделью, в противном случае – открытой. Для открытой модели может быть два случая:

1) суммарные запасы превышают суммарные потребности:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j ;$$

2) суммарные потребности превышают суммарные запасы:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \leq \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Целевая функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,\dots m \text{ и } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\dots n,$$

для первого случая.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\dots m \text{ и } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \quad j = 1,\dots n,$$

для второго случая.

Практическая работа

Задание 1. Разработать математическую модель, создать компьютерную модель (электронную таблицу) и найти оптимальное решение задачи.

Постановка задачи. Три поставщика одного и того же продукта располагают в планируемый период следующими запасами этого продукта: первый имеет – 120, второй – 100 и третий 80 условных единиц. Этот продукт должен быть перевезен к трем потребителям, спрос которых соответственно равен 90, 90 и 120 условных единиц. Приведенная ниже таблица содержит показатели затрат, связанных с перевозкой продукта из пунктов отправления в пункты потребления, потребность в грузе потребителями и наличие груза у поставщиков.

Поставщики	Потребители			Запас
	А	Б	В	
I	7	6	4	120
II	3	8	5	100
III	2	3	7	80
Спрос	90	90	120	

Требуется перевезти продукты с минимальными затратами.

Математическая модель

Целевая функция имеет следующий вид:

$$7x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 2x_{31} + 3x_{31} + 7x_{33} \to \min.$$

При этом рекомендуется записать ее в форме приближенной к содержанию таблицы:

$$\begin{aligned}&7x_{11}+6x_{12}+4x_{13}+\\&+3x_{21}+8x_{22}+5x_{23}+\\&+2x_{31}+3x_{32}+7x_{33}\to\min\end{aligned}.$$

Ограничения имеют вид:

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}=120;\\x_{21}+x_{22}+x_{23}=100;\\x_{31}+x_{32}+x_{33}=80.\end{cases}\qquad\begin{cases}x_{11}+x_{21}+x_{31}=90;\\x_{12}+x_{22}+x_{32}=90;\\x_{13}+x_{23}+x_{33}=120.\end{cases}.$$

Граничные условия: $x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,3},\quad j=\overline{1,3}.$

Электронная таблица. Исходные данные для решения задачи в электронной таблице Microsoft Excel, представленs на рис. 1. Коэффициенты целевой функции, означающие затраты на доставку расположены в блоке ячеек **B4:D4**. Требования к ограничениям по спросу и запасам представлены соответственно в ячейках **B7:D7** и **E4:E6**.

	A	B	C	D	E
1	**Затраты на перевозку единицы груза, спрос и запас**				
2	Поставщики	Потребители			Запас
3		A	B	C	
4	I	7	6	4	=120
5	II	3	8	5	=100
6	III	2	3	7	=80
7	Спрос	=90	=90	=120	

Рис. 1. Исходные данные транспортной задачи

Искомые значения x_{ij} находятся в блоке ячеек **B12:D14**, можно ввести в этот блок 0 или 1 или оставить пустым. Формула целевой функции ведена в ячейку **E15**:

=СУММПРОИЗВ(B4:D6;B12:D14).

Формулы левой части ограничений находятся соответственно в ячейках **B15:D15** – ограничения по доставке, **E12:E14** – ограничения на вывоз (рис. 2).

	A	B	C	D	E	F
1	**Затраты на перевозку единицы груза, спрос и запас**					
2	Поставщики	Потребители			Запас	
3		A	B	C		
4	I	7	6	4	=120	
5	II	3	8	5	=100	
6	III	2	3	7	=80	
7	Спрос	=90	=90	=120		=СУММ(B7:D7)
8					=СУММ(E4:E6)	
9	**Оптимальный план перевозки грузов**					
10	Поставщики	Потребители			Вывоз	
11		A	B	C		
12	I	0	0	0	=СУММ(B12:D12)	
13	II	0	0	0	=СУММ(B13:D13)	
14	III	0	0	0	=СУММ(B14:D14)	
15	Доставка	=СУММ(B12:B14)	=СУММ(C12:C14)	=СУММ(D12:D14	=СУММПРОИЗВ(B4:D6;B12:D14)	min

Рис. 2. Макет электронной таблицы

Поиск оптимального решения

1. Выполните команды **Данные➤Анализ➤Поиск решения**.

2. Введите параметры в окно диалога **Поиск решения** (рис. 3):

– в поле **Установить целевую ячейку** – введите ссылку на ячейку, содержащую целевую функцию. В данной задаче это ячейка **E15**. Абсолютную адресацию добавляет **Поиск решения**;

– в группе **Равной**, установите переключатель – **минимальному значению;**

– в поле **Изменяя ячейки** введите диапазон ячеек **B12:D14**, который содержит переменные модели. Значения в ячейках, будут изменяться при выполнении программы.

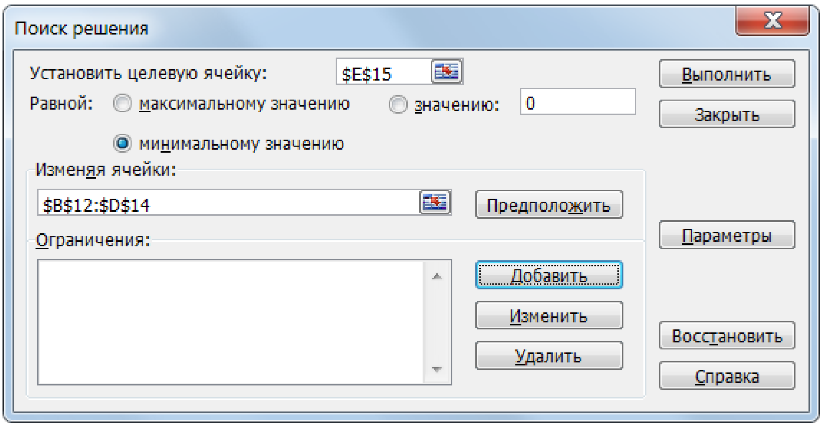

Рис. 3. Окно диалога **Поиск решения** с введенными параметрами

3. Нажмите кнопку **<Добавить>** для ввода ограничений модели в область **Ограничения:**. Откроется окно диалога **Добавление ограничения** (рис. 4):

– в поле **Ссылка на ячейку** введите диапазон ячеек **B15:D15**, он содержит суммарную доставку продуктов каждому потребителю;

– в следующем поле со списком выберите знак «=», в соответствии с условием задачи;

– в поле **Ограничение** введите диапазон ячеек, содержащий спрос потребителей, т. е. **B7:D7**.

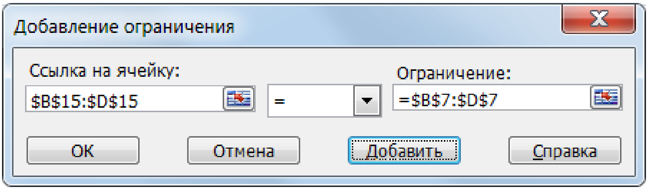

Рис. 4. Добавление ограничения «Доставка – Спрос»

4. Нажмите кнопку **<Добавить>** для ввода следующего ограничения и введите параметры (рис. 5). Нажмите кнопку **<OK>**, для возврата в окно диалога **Поиск решения**.

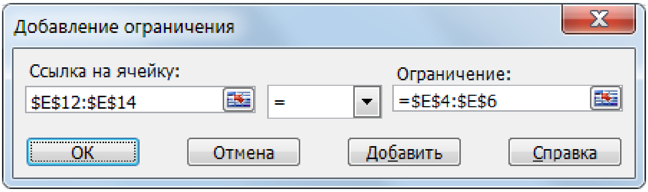

Рис. 5. Добавление ограничения «Вывоз – Запас»

Введенные ограничения отобразятся в соответствующей области (рис. 6).

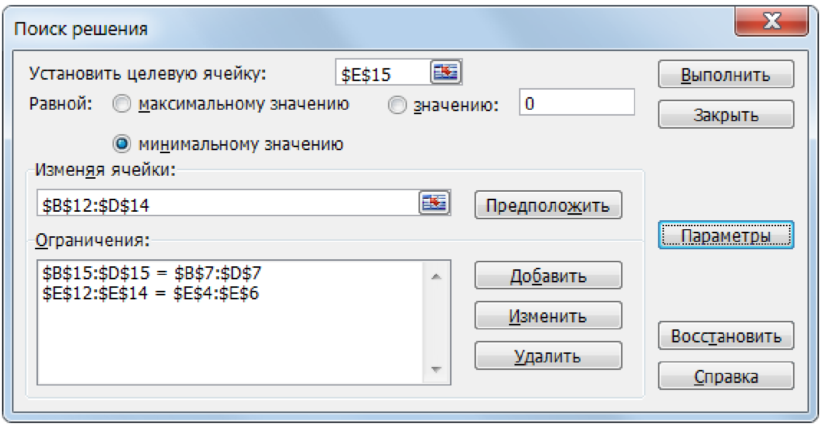

Рис. 6. Ограничения в окне диалога **Поиск решения**

5. Для ввода параметров поиска нажмите кнопку **<Параметры>**. В окне диалога **Параметры поиска решения** (рис. 7) ведите рекомендуемые параметры: **Линейная модель** и **Неотрицательные значения** и нажмите кнопку **<OK>**, чтобы вернуться в диалог **Поиск решения**.

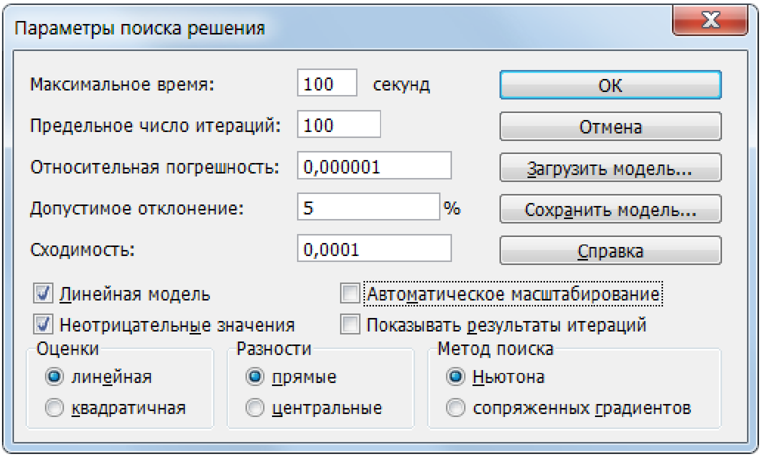

Рис. 7. Окно диалога **Параметры поиска решения**

6. В окне диалога **Поиск решения** нажмите кнопку **<Выполнить>** для получения результата (рис. 8).

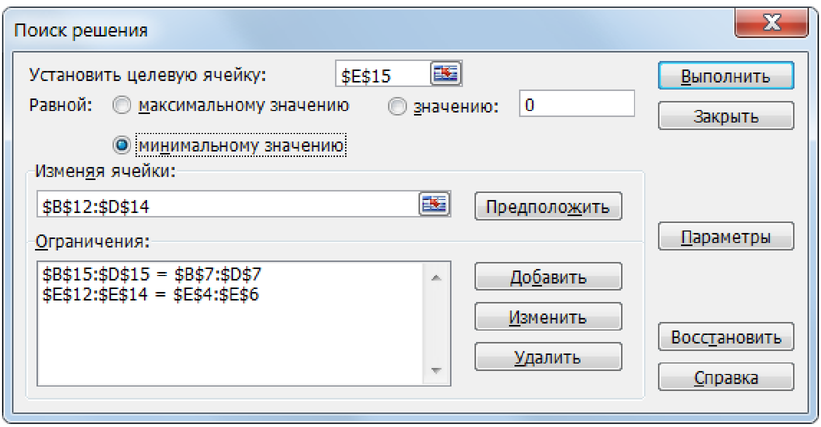

Рис. 8. Диалог **Поиск решения** с кнопкой **<Выполнить>** для запуска программы

7. Если программа нашла решение, то оно будет отображено в окне диалога **Результаты поиска решения** в виде сообщения (рис. 9). В этом случае нужно нажать кнопку **<OK>**, т. е. сохранить найденное решение. Если сообщение другого содержания, нужно установить переключатель: **Восстановить исходные значения**, нажать кнопку **<OK>** и проверить правильность ввода формул в электронную таблицу, ввода параметров в окно диалога **Поиск решения**, внести изменения при обнаружении ошибки и повторить операцию поиска оптимального решения.

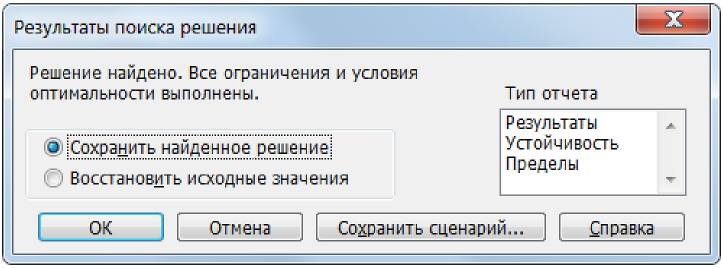

Рис. 9. Окно диалога **Результаты поиска решения**

Результат составления оптимального плана перевозки продуктов с минимальными затратами представлен на рис. 10.

	A	B	C	D	E	F
1	**Затраты на перевозку единицы груза, спрос и запас**					
2	Поставщики	Потребители			Запас	
3		A	B	C		
4	I	7	6	4	=120	
5	II	3	8	5	=100	
6	III	2	3	7	=80	
7	Спрос	=90	=90	=120		300
8					300	
9	**Оптимальный план перевозки грузов**					
10	Поставщики	Потребители			Вывоз	
11		A	B	C		
12	I	0	10	110	120	
13	II	90	0	10	100	
14	III	0	80	0	80	
15	Доставка	90	90	120	1060	min

Рис. 10. Результат решения задачи

Задание 2. Разработать математическую модель, создать компьютерную модель (электронную таблицу) и найти оптимальные решения задач.

Составить оптимальный план перевозки груза от поставщиков к потребителям. Стоимость перевозки ед. груза, объемы производства и спрос потребителей представлены в таблице.

Затраты на поставку единицы груза

Поставщики	Потребители				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	11	1	4	20
A_2	5	2	7	3	67
A_3	10	4	3	5	39
Спрос	44	32	25	25	

Ответ: 462

2.1. Решить задачу при условии, что запрещена перевозка груза от 3-го поставщика 4-му потребителю. Определить, как изменились затраты из-за запрета перевозки по сравнению с оптимальным вариантом.

2.2. Решить задачу при условии, что поставка груза от 1-го поставщика 2-му потребителю зафиксирована и равна 20 единиц. Оценить удорожание перевозок груза по сравнению с оптимальным вариантом.

2.4. Решить транспортную задачу с нарушенным балансом.

Затраты на перевозку груза

Пункты отправления	Пункты назначения				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Потребность	80	80	60	80	

Ответ: 780

Самостоятельная работа

Задание 1. На трех складах оптовой базы сосредоточена мука в количествах, равных 150, 360 и 180 т соответственно. Эту муку необходимо завезти в пять магазинов, каждый из которых должен получить

90, 120, 230, 180 и 60 т соответственно. С 1-го склада муку не представляется возможным перевозить во 2-й и 5-й магазины, а из 2-го склада в 3-й магазин должно быть завезено 100 т муки. Тарифы на перевозку 1 т муки с каждого склада в соответствующие магазины, представлены в таблице. Составьте план перевозок, обеспечивающий минимальную общую стоимость.

Склады	Тарифы на перевозку 1 т				
	Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	Магазин №5
Склад №1	7	6	8	2	4
Склад №2	4	3	1	5	6
Склад №3	5	2	3	2	8

Задание 2. Составьте план перегонки автомобилей из городов Ижевск, Казань, Тольятти в города Москву, Саранск и Ульяновск, обеспечивающий минимальные затраты. Стоимость перевозки одного автомобиля составляет 10 руб/км. Расстояние между городами, объемы заявок и наличие автомобилей представлены в таблице.

Города	Расстояние между городами, км			Запасы, шт.
	Москва	Саранск	Ульяновск	
Ижевск	1050	600	450	20
Казань	750	390	210	65
Тольятти	900	360	150	80
Заказы, шт.	100	50	15	

Задание 3. Имеются четыре участка земли для посева: 1) ржи, 2) пшеницы, 3) ячменя, 4) кукурузы. Площади участков соответственно равны 400, 200, 240 и 220 га. Урожайность культур (ц/га) на соответствующих участках земли представлена матрицей С.

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 20 & 22 \\ 26 & 22 & 30 & 28 \\ 22 & 14 & 16 & 18 \\ 40 & 42 & 47 & 50 \end{pmatrix}$$

Определить, сколько гектаров земли нужно засеять каждой из культур на каждом участке, чтобы суммарная стоимость собранного зерна была максимальной. Известно, что из-за ограниченности в семенном фонде можно засеять рожью, пшеницей, ячменем и кукурузой соответственно 240, 200, 300 и 320 га. Стоимости центнера зерна соответствующих культур равны S_j единиц, j=1,4 (S_1=3; S_2=5; S_3=4; S_4=7).

Задание 4. Три электрогенерирующие станции мощностью 25, 40 и 30 мил. кВтч поставляют электроэнергию в три города. Максимальная потребность в электроэнергии этих городов оценивается в 30, 35 и 24 мил. кВтч. Цены за миллион кВтч в данных городах приведены в таблице.

Стоимость за электроэнергию, руб./млн. кВт-ч

Станции	Города		
	1	2	3
Станция №1	600	700	400
Станция №2	320	300	350
Станция №3	500	480	450

1. Разработать наиболее экономичный план распределения электроэнергии.

2. В августе на 20% возрастает потребность в электроэнергии в каждом из трех городов. Недостаток электроэнергии могут восполнить из другой электросети по цене 1 000 за 1 мил. кВтч. Но третий город не может подключиться к альтернативной электросети. Разработать наиболее экономичный план распределения электроэнергии и восполнения ее недостатка в августе.

Контрольные вопросы

1. Что такое математическая модель? 2. Назовите основные элементы математической модели транспортной задачи?

3. В каких задачах требуется максимизировать, а в каких минимизировать целевую функцию?

4. Какое ограничение накладывается на неизвестные переменные *x* во всех представленных задачах?

5. Что такое математическая модель экономической системы?

6. Для решения задач, какого типа используется линейное программирование?

7. Какие задачи относятся к задачам линейного программирования?

8. Какие параметры надо задавать при использовании надстройки «Поиск решения»?

9. Какие задачи можно решать с помощью надстройки «Поиск решения»?